

**Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»**

А.В. Локтионов

Теоретическая механика

**Тестовый контроль и программированные
задачи по разделу «Динамика»**

Часть 1

Библиотека ВГТУ



**Витебск
2007**

УДК 531
ББК 22.2
Л73

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова» Г.И. Михасев;

кандидат технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов и деталей машин учреждения образования «Витебский государственный технологический университет» А.М. Тимофеев

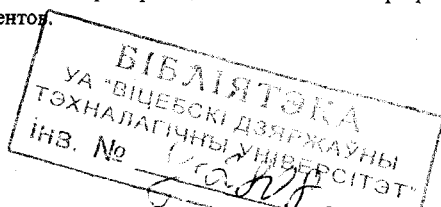
*Рекомендовано в качестве пособия редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол №1 от 16 марта 2007г.*

Локтионов, А.В.

Л73 Теоретическая механика: тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика», ч. 1 / А.В. Локтионов; УО «ВГТУ». – Витебск : УО «ВГТУ», 2007. – 227 с.

ISBN 985-481-081-X

Пособие предназначено для оказания помощи студентам по освоению курса теоретической механики и преподавателям технических специальностей высших учебных заведений при проведении тестового и программированного контроля знаний студентов.



УДК 531
ББК 22.2

ISBN 985-481-081-X

© Локтионов, А.В., 2007
© УО «ВГТУ», 2007

ВВЕДЕНИЕ.....	6
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА.....	10
РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ	
ТЕСТОВЫЙ КОНТРОЛЬ И ПРОГРАММИРОВАННЫЕ	
ЗАДАЧИ ПО РАЗДЕЛУ «ДИНАМИКА» КУРСА	
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.....	13
ГЛАВА 1	
ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ.....	13
1.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль	13
1.2 Прямая задача динамики	15
1.3 Обратная задача динамики	19
1.4 Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка	22
1.5 Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка	26
1.6 Программированные задачи для самостоятельного решения	30
ГЛАВА 2	
КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ	36
2.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль	36
2.2 Программированные задачи	39
2.3 Задачи на определение параметров колебательного движения	62
ГЛАВА 3	
ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	70
3.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль	70
3.2 Программированные задачи	73
ГЛАВА 4	
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ	80
4.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль	80
ГЛАВА 5	
КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ	83
5.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль	83
5.2 Программированные задачи	86
5.3 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	94

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ 96

ГЛАВА 6

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 96

- 6.1 Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки 96
- 6.2 Относительное движение и колебания материальной точки 104
- 6.3 Применение теоремы об изменении кинетической энергии точки 113
- 6.4 Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы 116

ГЛАВА 7

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ 128

- 7.1 Применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения системы 128
- 7.2 Применение теоремы об изменении количества движения системы 135
- 7.3 Применение теоремы об изменении кинетического момента системы и дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела 140
- 7.4 Применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела 149
- 7.5 Применение к изучению движения системы принципа Даламбера 156

ГЛАВА 8

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 167

- 8.1 Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений 167
- 8.2 Применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера-Лагранжа) 175
- 8.3 Применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа 181
- 8.4 Исследование малых колебаний системы с одной степенью свободы 192

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ 196

ГЛАВА 9

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ 196

- 9.1 Скалярные и векторные величины 196

9.2 Проекция вектора на ось и на плоскость. Аналитическое задание вектора	197
9.3 Сложение векторов	199
9.4 Разложение вектора по координатным осям. Аналитический способ сложения векторов	200
9.5 Произведение векторов	201

ГЛАВА 10

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛЕ.

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ	204
10.1 Понятие о производной. Геометрический смысл производной ..	204
10.2 Неопределенный интеграл и простейшие приемы его вычисления	206

ГЛАВА 11

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	209
11.1 Дифференциальные уравнения первого порядка	209
11.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	211
11.3 Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	212
11.4 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	215

ГЛАВА 12

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	219
---	-----

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	227
--	-----

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящего пособия – помочь студентам при самостоятельной, внеаудиторной работе по освоению курса теоретической механики (раздел “Динамика”) и преподавателям при работе со студентами на консультациях и практических занятиях.

Не подменяя учебную и методическую литературу, пособие является дополнительным материалом и охватывает все разделы динамики курса теоретической механики. Предназначено для студентов как механических, так и технологических специальностей.

При тестовом контроле знаний студентов по всем темам предложен ряд вопросов, на которые приводятся в произвольной последовательности однозначные ответы. Студент должен подобрать номер ответа на все вопросы; при этом ни один ответ не должен повторяться.

Программированные материалы целесообразно использовать для усвоения и контроля знаний студентов. При этом достигается активизация мысленной и творческой их деятельности, обеспечение полноты и сокращение времени контроля знаний, проверка степени осмысленности ответа. Студенты, которые неправильно ответили на вопросы, устранив и осмыслив ранее обнаруженные ошибки, должны повторно пройти контроль. Программированная оценка знаний студентов позволяет экономить время преподавателей и эффективно его использовать при работе со студентами.

Комплексные задачи для самостоятельного решения могут использоваться при защите расчётных заданий, проведении олимпиад и как экзаменационные задачи.

Рассмотрим кратко основные положения, которыми следует руководствоваться при проведении контроля знаний студентов, в частности, программированного контроля усвоения изложенного преподавателями материала.

Одним из существенных элементов в учебном процессе, безусловно, является усвоение сообщаемых студенту знаний. Способов итогового контроля, позволяющих составить представление о том, что и как усвоил студент из прочитанного курса, имеется достаточно много.

Однако не менее важно своевременно и точно знать, как идет усвоение знаний в процессе самого обучения, какие трудности в понимании возникают перед обучаемыми.

Контроль усвоения знаний студентов является методически заключительным этапом учебного процесса, как при изучении отдельных вопросов, так и всего курса в целом. Контроль способствует выполнению задачи управ-

ления, так как обеспечивает наличие "обратной связи" между студентом и преподавателем.

Для студента наличие "обратной связи" позволяет анализировать и систематизировать свои знания, для преподавателя - активно управлять ходом обучения и усвоением изложенного материала.

Оценка знаний студента, как результат диагностической деятельности преподавателя, представляет собой отражение состояния знаний и навыков студента, выраженное символически - цифрой. Такая оценка существует лишь для множества сходных явлений, которым в разной степени присуще оцениваемое качество. Она либо фиксирует изменения в знаниях одного студента, либо позволяет сопоставить результаты ответов многих из них. Оценке подлежит некоторое сложное качество - подготовленность студентов, интегрально представляющее набор простых признаков, выявляемых из измеряемых преподавателем во время контроля, - качество, производное от этих признаков.

Контроль за процессом усвоения приобретенных знаний должен, по нашему мнению, отвечать следующим условиям:

1. Своевременность. Контроль должен быть своевременным, так как должен давать возможность преподавателю руководить учебным процессом, обеспечивая его управление.

2. Полнота и массовость. Полнота контроля должна быть двойкой: охватывать всех студентов в данной группе и как можно большую часть изученного материала.

3. Выделение основного. Целесообразно оценивать весь излагаемый материал дифференцированно, подразделяя его, например, на три части: на то, что студенту достаточно лишь представить себе, что необходимо просто знать, что он должен знать и уметь применять. Контролировать в этом случае целесообразно то, что относится к двум последним пунктам.

4. Информативность. Контроль призван дать преподавателю содержательную информацию о знаниях каждого студента и его умениях в пределах одной или нескольких тем курса (при аттестации) или всего курса в целом (при итоговом контроле - зачете, экзамене).

5. Объективность. Контроль за ходом усвоения знаний должен обеспечивать объективность результатов. Поэтому использование специально разработанных программ, аппарата теории вероятностей и математической статистики, а при необходимости ЭВМ, как средства обработки информации, весьма целесообразно.

6. Естественность условий. Во время контроля студент должен действовать так же, как в обычной обстановке, при этом должны отсутствовать внезапность (дата контрольной работы должна быть известна заранее). Только при выполнении этого условия можно правильно проверить способность студента применять полученные знания.

7. Активность. Контроль должен быть таким, чтобы студент понимал свои ошибки и стремился их устранить.

8. Оперативность. Необходимо следить за тем, чтобы контроль не нарушал ритм учебного процесса, чтобы проверка знаний по одной дисциплине не проводилась в ущерб другим. Поэтому процесс текущего контроля, включая подготовку к нему, не должен отнимать у студентов много времени, быть длительным по срокам.

9. Экономичность. Контроль должен быть экономичным с точки зрения затрат времени студента и преподавателя на него.

10. Воспитательность. Контроль должен учить студента работать с литературой и конспектом, прививать уважение к теоретической и экспериментальной работе.

Традиционный контроль по вопросам и билетам с необходимостью индивидуальной оценки качества работы каждого студента весьма трудоемок по времени.

Большой расход по времени на проверку текущего и итоговых знаний студентов по традиционному способу - с помощью вопросов и билетов - может быть существенно сокращен за счет унификации многих контрольных операций и широкого использования технических средств контроля.

Программированный контроль предусматривает разработку единой программы контроля и единых критериев оценки знаний студентов.

Программированный контроль позволяет преподавателю за короткое время проверить знания группы студентов, автоматизировать многие контрольные операции, как то: постановку вопросов, анализ ответов, регистрацию результатов контроля, проведение многократного контроля с целью самообучения студентов.

Что же представляет собой программированный контроль и каковы его основные принципы?

В сущности, если каждого студента оставить одного, дать ему хорошо продуманные задачи и вопросы, справочник и иной вспомогательный материал, то его ответы как раз и покажут, как идет процесс усвоения приобретаемых знаний.

Контрольные программы моделируют такие условия. Контрольная программа представляет собой индивидуальный бланк с вопросами, разработанными преподавателем. В конце каждого вопроса имеется таблица с ответами. Студент должен продумать вопрос, выбрать правильный ответ и внести его в карточку, приложив листок с обоснованием такого ответа. Преподаватель в процессе обдумывания студентом ответа в зависимости от характера читаемого курса (теоретический, описательный, прикладной и т.д.) может разрешить или не разрешить пользоваться справочным материалом, но общение между самими студентами во время работы должно быть, безусловно, исключено. Студенты, давшие неправильные ответы, через некоторое время должны по-

вторно пройти тот же контроль. Этим обеспечивается активность и воспитательная сторона контроля, заключающаяся в ознакомлении с его результатами, что помогает студентам понять ошибки; возможность выполнить работу повторно обеспечивает проверку того, как устранены обнаруженные ошибки. При этом оперативность программированного контроля сочетается с экономией времени преподавателя и студентов.

Учебная практика работы со студентами показывает, что исключительное значение для программированного контроля имеют темы вопросов, их содержание, формулировка условий. При составлении контрольных вопросов необходимо придерживаться следующих правил:

вопросы не должны быть слишком трудные, так и не слишком легкими, иначе контроль либо усложняется, либо вообще теряет смысл;

содержание вопроса должно быть подчинено главной цели – проверке знаний;

в вопросе должны быть один-два элемента, требующие самостоятельного шага, умения применить изучаемые методы в несколько измененных условиях;

вопрос должен иметь однозначный ответ;

к каждому вопросу дается ряд ответов, среди которых студент должен выбрать один, по его мнению, правильный. Число ответов должно быть достаточно большим, что уменьшает вероятность угадывания.

Применение программированного контроля позволяет не только оценивать усвоение знаний отдельными студентами, но и получать определенные критерии, характеризующие уровень знаний в целом в контролируемой группе, в нескольких группах и в лекционном потоке студентов.

Все виды программированного контроля можно разбить на две группы:

безмашинный программированный контроль (с помощью программированных карточек);

машинный программированный контроль (с помощью контролирующих машин).

Как при безмашинном программированном способе контроля, так и в случае применения машинного контроля главным является качество составленных программ, вопросов и ответов. Основное же различие между указанными группами проявляется в ходе проведения контроля, обработки результатов и доведения результатов контроля до студентов. Кроме того, при машинном программированном контроле можно проводить самообучение студентов, т.е. осуществить диалог "студент-машина".

Критика в адрес машинного контроля обычно вызывается недостаточно продуманными программами, применяемыми в этих контролирующих машинах.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Введение. Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с общественным производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач.

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы классической механики или законы Галилея – Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки

Решение первой и второй задач динамики. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника.

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Пример интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Несвободное и относительное движения точки. (Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи.)

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Аперiodическое движение.

Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Моменты инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей или теорема Гюйгенса. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра. (Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и главные центральные оси инерции и их свойства.)

Общие теоремы динамики.

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

(Понятие о теле и точке переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.)

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. (Понятие о векторной скорости. Закон площадей.)

Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.)

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси в общем случае движения (в частности, при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии

механической системы в дифференциальной и конечной формах. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера. Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы.

Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции.

(Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.).

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа). Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (кинетический потенциал).

Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

Глава 1

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.
2. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекциях на координатные оси.
3. Запишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на естественные оси.
4. Какая задача динамики называется прямой (первой)?
5. Когда выбираются естественные оси для проектирования векторного уравнения?
6. Как выбираются координатные оси для проецирования векторного уравнения?
7. Как определить проекции ускорения точки на координатные оси?
8. Как определить проекции ускорения точки на естественные оси?
9. Что такое масса тела?
10. В каком случае уравнения динамики точки вырождаются в уравнения статики?
11. Какая задача динамики называется обратной?
12. Какие особенности решения обратной задачи динамики?
13. Как определяются начальные условия?
14. Что входит в начальные условия?
15. Как определяются постоянные интегрирования?
16. Каким методом решается дифференциальное уравнение с постоянной правой частью типа $m\ddot{x} = \text{const} = C$?
17. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $m dV/dt = f(V)$?
18. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $m dV/dt = f(x)$?

19. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(V, x)$?

20. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(t)$?

21. На точку действует сила $P = 18 - 0,5V^2$. Чему равно $V_{\max}$?

22. На точку массой 2 кг при начальных условиях $x_0 = 0$ и $V_0 = 1$ м/с действует сила $P = -72$ кН. Чему равно $P_{\max}$?

23. На точку массой 5 кг при начальных условиях $x_0 = 4$ и $V_0 = 0$ действует сила $P = -20 \cos 2t$ Н. Чему равно $x_{\max}$?

24. На точку массой 4 кг при начальных условиях $x_0 = 0,8$ м и $V_0 = -0,4$ м/с действует сила $P = e^{-0,5t}$. Найдите закон движения точки.

25. На точку массой 4 кг при начальных условиях $x_0 = 0$ и $V_0 = 1$ м/с действует сила $P = e^{0,5x}$. Найдите зависимость скорости от координаты $V(x)$.

Примечание. В пп. 21-25 движение происходит вдоль оси x .

Тестовый контроль

1. При известном виде траектории движения.
2. Мера инертности тела.
3. $md^2\vec{r}/dt^2 = \Sigma \vec{P}_k$.
4. По заданным силам найти закон движения.
5. $m\ddot{x} = \Sigma P_{kx}$; $m\ddot{y} = \Sigma P_{ky}$; $m\ddot{z} = \Sigma P_{kz}$.
6. Значения координат и их первых производных по времени.
7. $\vec{a} = 0$ или проекции на оси равны нулю.
8. $mdV/dt = \Sigma P_{k\tau}$; $mV^2/\rho = \Sigma P_{kn}$; $0 = \Sigma P_{k\theta}$.
9. Разделением переменных и получением после интегрирования функции $t(V)$.
10. 6.
11. $V = e^{0,25x}$.
12. Разделением переменных и получением после интегрирования функции $V(t)$.
13. По заданному закону движения найти приложенные силы.
14. $x = -0,2 + 0,1t + e^{-0,5t}$.

15. По направлению движения.
16. Каким-либо численным методом.
17. В решении дифференциальных уравнений движения.
18. 4.
19. Сумму проекций сил на координатные оси разделить на массу.
20. 12.
21. По положению и скорости точки при $t = 0$.
22. Применением подстановки $dV/dt = VdV/dx$.
23. Представлением решения в виде $x = C_1 + C_2t + \frac{1}{2}t^2C/m$.
24. Сумму проекций сил на естественные оси разделить на массу.
25. По начальным условиям.

Предлагаемые варианты наборов вопросов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	Вопросы
1	1, 9, 16
2	2, 10, 17
3	3, 11, 18
4	4, 12, 19
5	5, 13, 20
6	6, 14, 21
7	7, 15, 22
8	8, 1, 23

1.2 Прямая задача динамики

Задача 1. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m = 1$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0,5t^3$ (S - в м, t - в с). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 1$ с.

Задача 2. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется в плоскости OXY . Уравнения движения: $x = \cos 2\pi t$; $y = 2\sin \pi t$, где x и y – в м, t – в с. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = 1/3$ с.

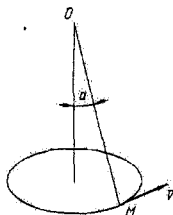


Рисунок 1.1

Задача 3. Точка массой $m = 0,1$ кг, подвешенная на нити длиной $OM = l = 0,2$ м в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ (рис. 1.1). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 4. Снаряд массой $m = 6,3$ кг вылетает из орудия со скоростью $V = 680$ м/с. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0,008$ с?

Задача 5. Автомобиль весом $Q = 3$ т движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 36$ км/ч, радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 6. Груз массой $m = 50$ кг поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 2$ с на высоту $h = 10$ м. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 7. Гирия массой $m = 200$ г вращается на нити в вертикальной плоскости. Длина нити $l = 30$ см. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 4$ м/с?

Задача 8. Материальная точка массой $m = 1$ кг совершает прямолинейное движение по закону $x = 2\sin \frac{\pi}{3}t$, x – в м, t – в с. Найти величину равнодействующих сил, действующих на точку в тот момент, когда $t = 2$ с.

Задача 9. Тело массой $m = 500$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 м за время $t_1 = 2$ с от начала движения, коэффициент трения $f = 0,2$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 10. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m = 1$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = t^3 + 1,5t^2$ (S – в м, t – в с). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 2$ с.

Задача 11. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется в плоскости OXY . Уравнения движения: $x = 2\cos 2\pi t$; $y = 3\sin \pi t$, где x и y – в м, t – в с. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = 1/6$ с.

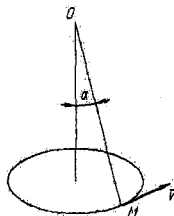


Рисунок 1.2

Задача 12. Точка массой $m = 0,2$ кг, подвешенная на нити длиной $OM = l = 30$ см в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 1.2). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 13. Снаряд массой $m = 8$ кг вылетает из орудия со скоростью $V = 650$ м/с. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0,009$ с?

Задача 14. Автомобиль весом $Q = 2$ т движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 54$ км/ч, радиус кривизны в середине моста $\rho = 60$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 15. Груз массой $m = 100$ кг поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 3$ с на высоту $h = 15$ м. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 16. Гирия массой $m = 100$ г вращается на нити в вертикальной плоскости. Длина нити $l = 40$ см. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 5$ м/с?

Задача 17. Материальная точка массой $m = 2$ кг совершает прямолинейное движение по закону $x = 3 \cos \frac{\pi}{3} t$, x — в м, t — в с. Найти величину равнодействующих сил, действующих на точку в тот момент, когда $x = 1,5$ м.

Задача 18. Тело массой $m = 200$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 м за время $t_1 = 4$ с от начала движения, коэффициент трения $f = 0,1$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 19. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m = 200$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0,4t^3$ (S — в м, t — в с). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 2$ с.

Задача 20. Материальная точка массой $m = 10$ кг движется в плоскости OXY . Уравнения движения: $x = 2 \cos \pi t$; $y = 2 \sin 2\pi t$, где x и y — в м, t — в с. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = 1$ с.



Рисунок 1.3

Задача 21. Точка массой $m = 0,1$ кг, подвешенная на нити длиной $OM = l = 40$ см в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1.3). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 22. Снаряд массой $m = 7$ кг вылетает из орудия со скоростью $V = 700$ м/с. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0,007$ с?

Задача 23. Автомобиль весом $Q = 4$ т движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 36$ км/ч, радиус кривизны в середине моста $\rho = 40$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 24. Груз массой $m = 200$ кг поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 4$ с на высоту $h = 20$ м. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 25. Гири массой $m = 500$ г вращается на нити в вертикальной плоскости, длина нити $l = 50$ см. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 4$ м/с?

Задача 26. Материальная точка массой $m = 5$ кг совершает прямолинейное движение по закону $x = 4 \sin \frac{\pi}{6} t$, x — в м, t — в с. Найти величину равнодействующих сил, действующих на точку в тот момент, когда $t = 2$ с.

Задача 27. Тело массой $m = 400$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 м за время $t_1 = 5$ с от начала движения, коэффициент трения $f = 0,05$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 28. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m = 1$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0,5t^3$ (S — в м, t — в с). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 1$ с.



Рисунок 1.4

Задача 29. Точка массой $m = 0,3$ кг, подвешенная на нити длиной $OM = l = 40$ см в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ (рис. 1.4). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 30. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется в плоскости OXY . Уравнения движения: $x = 3 \cos 2\pi t$; $y = 2 \sin \pi t$, где x и y — в м, t — в с. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = 1/6$ с.

1.3 Обратная задача динамики

Задача 1. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -20$ Н. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 350$ м/с; $\dot{y}_0 = 500$ м/с.

Задача 2. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 м, если начальная скорость $v_0 = 1$ м/с?

Задача 3. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 40$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,1$. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 2$ с?

Задача 4. Тело массой $m = 2$ кг, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой $F = 10$ Н. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ с, если коэффициент трения $f = 0,1$?

Задача 5. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10 + 5t$; $F_y = 0$ Н, t — в с. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,5$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ с?

Задача 6. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Составить уравнение движения точки, $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$.

Задача 7. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 36$ км/ч, если коэффициент трения $f = 0,3$?

Задача 8. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, в течение $t = 2$ с. Его начальная скорость $v_0 = 0$. Коэффициент трения $f = 0,2$. Какой путь прошло тело за это время?

Задача 9. Материальная точка массой $m = 3$ кг движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -30$ Н. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 400$ м/с; $\dot{y}_0 = 600$ м/с.

Задача 10. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 м, если начальная скорость $v_0 = 1$ м/с?

Задача 11. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 40^\circ$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,2$. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 1$ с?

Задача 12. Тело массой $m = 5$ кг, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой $F = 20$ Н. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 4$ с, если коэффициент трения $f = 0,2$?

Задача 13. Тело массой $m = 1$ кг движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10 + 10t$; F_x – в Н, t – в с. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,2$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ с?

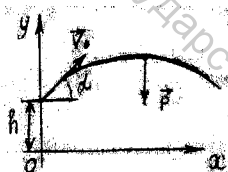


Рисунок 1.5

Задача 14. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1.5). Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$.

Задача 15. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 45$ м/с, если коэффициент трения $f = 0,4$?

Задача 16. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, в течение $t = 3$ с. Его начальная скорость $v_0 = 2$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,2$. Какой путь прошло тело за это время?

Задача 17. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -10$ Н. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 20$ м; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 300$ м/с; $\dot{y}_0 = 500$ м/с.

Задача 18. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 м, если начальная скорость $v_0 = 2$ м/с?

Задача 19. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,2$. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 1$ с?

Задача 20. Тело массой $m = 1$ кг, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой $F = 20$ Н. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ с, если коэффициент трения $f = 0,2$?

Задача 21. Тело массой $m = 1$ кг движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10t$; F_x — в Н, t — в с. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 2$ м, $\dot{x}_0 = 0,1$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 1$ с?

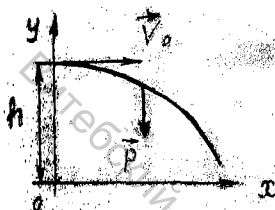


Рисунок 1.6

Задача 22. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1.6). Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $\dot{x}_0 = v_0$; $\dot{y}_0 = 0$.

Задача 23. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 27$ км/ч, если коэффициент трения $f = 0,2$?

Задача 24. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом, в течение $t_1 = 4$ с. Его начальная скорость $v_0 = 1$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,005$. Какой путь прошло тело за это время?

Задача 25. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -50$ Н. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 30$ м; $\dot{x}_0 = 700$ м/с; $\dot{y}_0 = 0$.

Задача 26. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 м, если начальная скорость $v_0 = 5$ м/с?

Задача 27. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,1$. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 2$ с?

Задача 28. Тело массой $m = 3$ кг, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой $F = 30$ Н. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ с, если коэффициент трения $f = 0,1$?

Задача 29. Тело массой $m = 3$ кг движется прямолинейно под действием силы $F_x = 3t$; F_x — в Н, t — в с. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 1$ м, $\dot{x}_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ с?

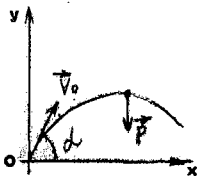


Рисунок 1.7

Задача 30. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1.7). Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_0 \sin \alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \cos \alpha$.

1.4 Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка

Задача 1. Легкое тело массой m падает без начальной скорости под действием силы тяжести, встречая противодействие силы трения воздуха. Предполагая, что сила трения пропорциональна скорости, установить, через сколько секунд после начала падения тело достигнет земли.

Ответ: $t = \frac{m}{k} \ln \frac{g}{g - (k/m)v}$.

Задача 2. Шар массой m падает без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O , которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха пропорционально скорости падения, т.е. $R = -kv$ (k — коэффициент пропорциональности). Найти закон изменения скорости шара в зависимости от времени.

Ответ: $v = \frac{g}{n} (1 - e^{-nt})$, где $n = k/m$.

Задача 3. Тело массой m , получив начальную скорость v_0 , движется прямолинейно по горизонтальной плоскости, испытывая сопротивление движению, модуль которого равен $R = k_1 v + k_2 v^2$. Найти закон движения тела в зависимости от скорости тела.

Ответ: $x = \frac{m}{k_2} \ln \frac{k_1 + k_2 v_0}{k_1 + k_2 v}$.

Задача 4. Тело весом P движется прямолинейно по горизонтальной плоскости, испытывая сопротивление движению, модуль которого равен $R = R_0 e^{-\alpha t}$. Найти закон изменения скорости движения тела в зависимости от времени, если в начальный момент тело получило начальную скорость v_0 .

Ответ: $v = v_0 - \frac{gR_0}{\alpha P} (1 - e^{-\alpha t})$.

Задача 5. Ракета выстрелена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 100$ м/с. Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, равное $-kv^2$ м/с², где v — мгновенная скорость раке-

ты, k – аэродинамический коэффициент. Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

$$\text{Ответ: } t = \frac{\arctg(31,62\sqrt{k})}{3,162\sqrt{k}}.$$

Задача 6. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключают, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

$$\text{Ответ: } v = 1,28 \text{ км/ч.}$$

Задача 7. Судно водоизмещением в 12000 т движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 т при скорости 1 м/с. Определить время движения судна, когда скорость его станет равной 5 м/с.

$$\text{Ответ: } t = 4,6 \text{ с.}$$

Задача 8. С некоторой высоты брошено вертикально вниз с начальной скоростью v_0 тело массой m . Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действует сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

$$\text{Ответ: } v = \frac{m}{k} \left[g - \left(g - \frac{k}{m} v_0 \right) e^{-\frac{k}{m} t} \right].$$

Задача 9. На тело массой $m = 2$ кг, находящееся на горизонтальной гладкой плоскости, в направлении движения действует сила, изменяющаяся по закону $F = (4t + 2)$ Н. Определить, через сколько секунд тело достигнет скорости 6 м/с, если в начальный момент $v_0 = 2$ м/с.

$$\text{Ответ: } t = 1 \text{ с.}$$

Задача 10. Тепловоз массой m в момент отключения тяги имел скорость v_0 . Определить, какое расстояние он пройдет до остановки, если суммарное сопротивление движению выражается формулой $R = kv + k_1 v^2$, где k и k_1 – постоянные, v – скорость тепловоза.

$$\text{Ответ: } s = \frac{m}{k_1} \ln \left(1 + \frac{k_1 v_0}{k} \right).$$

Задача 11. Тело массой 0,5 кг брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости $R = k/v$ (v – мгновенная скорость тела, k – аэродинамический коэффициент). Найти закон изменения скорости тела.

Ответ: $v = \frac{1}{\alpha} [(g + \alpha v_0) e^{-\alpha t} - g]$, где $\alpha = \frac{k}{m}$.

Задача 12. Материальная точка массой m , имеющая начальную скорость v_0 , движется прямолинейно. На точку действует сила, совпадающая с направлением движения и изменяющаяся по закону $F = k\sqrt{t}$. Определить скорость точки по истечении 4 с.

Ответ: $v = \frac{4k}{m} + v_0$.

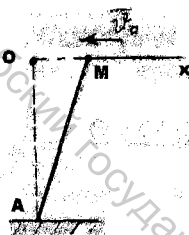


Рисунок 1.8

Задача 13. К тонкому упругому вертикальному стержню (рис. 1.8), закрепленному в нижнем конце A, прикреплен на верхнем конце шарик M массой m . В начальный момент шарик отклонили от вертикального положения на небольшое расстояние a и сообщили начальную скорость v_0 , направленную к положению равновесия. Найти закон изменения скорости шарика в зависимости от положения шарика.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}(a^2 - x^2)}$.

Задача 14. Тело весом P скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30° . Коэффициент трения тела по поверхности $k = 0,5$. Определить, какую скорость приобретет тело, пройдя путь $s = 3$ м, если в начальный момент тело имело скорость $v_0 = 2$ м/с?

Ответ: $v = 2,8$ м/с.

Задача 15. На точку массой $m = 2$ кг из состояния покоя действует вдоль прямой сила $F = A \sin kt$. Определить скорость точки в момент времени $t = 1,57$ с, если $A = 6$ Н, $k = 2$ с⁻¹.

Ответ: $v = 3$ м/с.

Задача 16. Тело массой $m = 98,1$ кг находится на горизонтальной шероховатой поверхности. Коэффициент трения скольжения $f = 0,5$. Какую силу надо приложить к телу, чтобы в течение $t = 10$ с оно приобрело скорость $v = 10$ м/с?

Ответ: $F = 10,49$ кг = 102,81 Н.

Задача 17. На материальную точку массой m в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = \frac{b}{x^3}$. Найти зависимость скорости точки от положения точки, если в начальный момент $x_0 = a$, а $v_0 = 0$.

Ответ: $v = \frac{\sqrt{\frac{b}{m}(x^2 - a^2)}}{\alpha x}$.

Задача 18. Материальная точка массой m при движении в жидкости испытывает сопротивление движению $R = \alpha v^2$. Найти зависимость скорости движения от положения точки, если в начальный момент точка находилась в покое.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g}{k}(1 - e^{-kx})}$, где $k = \alpha/m$.

Задача 19. При погружении в грунт тело массой $m = 5$ кг испытывает сопротивление движению $R = \alpha x$. Найти скорость погружения тела в зависимости от глубины погружения, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x} = v_0$.

Ответ: $v = \sqrt{2gx - \frac{\alpha}{m}x^2 + v_0^2}$.

Задача 20. После полученного толчка с начальной скоростью $v_0 = 19,2$ м/с тело поднимается по наклонной плоскости с углом наклона 30° . Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: $t = 4$ с.

Задача 21. Тело, получив начальную скорость $v_0 = 4$ м/с, скользит по наклонной плоскости с углом $\alpha = 45^\circ$. Найти, через сколько секунд скорость тела достигнет $v_1 = 7$ м/с, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$ ($g = 9,81$ м/с²).

Ответ: $t = 0,48$ с.

Задача 22. Тело весом P , падая без начальной скорости с некоторой высоты h , внедряется в грунт, испытывая сопротивление движению $R = \alpha x$. Найти зависимость скорости внедрения в грунт тела от глубины погружения.

Ответ: $v = \sqrt{2g(x+h) - \frac{\alpha}{m}x^2}$.

Задача 23. Сопротивление водной среды движению моторного судна задано эмпирической функцией $F(v) = \alpha v + \beta v^2$, где α и β – константы. Масса судна равна m . Найти время движения судна до остановки, если выключение мотора произошло в момент, когда скорость была равна v_0 .

Ответ: $t = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{\alpha} \right)$.

Задача 24. Определить в момент $t = 3$ с скорость точки массой m , совершающей прямолинейное движение под действием силы, зависящей от времени, в виде $F = m(2 + 5t + 4t^2)$, если начальный момент времени $v = v_0 = 20$ м/с.

Ответ: $v = 84,5 \text{ м/с}$.

Задача 25. На тело весом P , находящееся на горизонтальной плоскости вдоль прямой, параллельной плоскости, действует сила в положительном направлении оси, изменяющаяся по закону $F = Q + ax^2 + bx$. Найти закон изменения скорости движения точки (принимая тело за материальную точку) в зависимости от изменения координаты, если в начальный момент скорость точки равна v_0 ($Q = \text{const}$).

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2g}{P} \left(Qx + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right)} + v_0$.

1.5 Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка

Задача 1. На тело весом P , находящееся на гладкой горизонтальной поверхности, действует вдоль прямой сила, изменяющаяся по закону $F = b \cos kt$. Найти закон движения точки (принимая тело за материальную точку), считая, что в начальный момент времени координата $x = a$, а скорость $\dot{x} = 0$.

Ответ: $x = \frac{gb}{k^2 P} (1 - \cos kt) + a$.

Задача 2. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение a приближенно связаны уравнением $a = -g - kv$, где g и k – постоянные. Выразить пройденное телом расстояние в функции времени, если в момент $t = 0$ тело находилось в покое.

Ответ: $s = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt})$.

Задача 3. Тяжелое тело скользит по шероховатой наклонной плоскости, причем угол наклона равен α , а коэффициент трения μ . Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

Ответ: $s = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t^2$.

Задача 4. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v = 10 \text{ км/ч}$. На полном ходу его мотор был выключен, и через $t = 20 \text{ с}$ скорость катера уменьшилась до $v_1 = 6 \text{ км/ч}$. Считая, что сопротивление воды движению катера пропорционально его скорости, найти: а) скорость катера через 2 мин после остановки мотора; б) расстояние, пройденное катером в течение первой минуты после остановки мотора.

Ответ: $v_2 = 0,467 \text{ км/ч}$; $s = 85,2 \text{ м}$.

Задача 5. Тело медленно погружается в жидкость. Сопротивление движению пропорционально скорости тела: $R = -kv$. Найти закон движения тяжелой материальной точки (принимая тело за материальную точку), погружающейся в жидкость без начальной скорости.

Ответ: $s = \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m} t} - 1 \right) + \frac{mg}{k} t$.

Задача 6. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее силой $F = \frac{k^2 m}{r^3}$, где r — расстояние точки от центра. Если движение начинается из состояния покоя при $r = a$, найти время, по истечении которого точка достигнет центра.

Ответ: $t = \frac{a^2}{k}$.

Задача 7. На материальную точку массой m из состояния покоя в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = kx^3$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = -\frac{2m}{\sqrt{2km \cdot t}}$.

Задача 8. На прямолинейно движущуюся материальную точку массой m действует из состояния покоя сила $F = \beta e^{-\alpha t}$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = \frac{\beta}{\alpha^2 m} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\beta}{\alpha m} t$.

Задача 9. В результате полученного толчка с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с тело поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определить путь s , пройденный телом за промежуток времени $t = 3$ с ($g = 9,8$ м/с²).

Ответ: $s = 7,95$ м.

Задача 10. Используя условие предыдущей задачи, найти максимальный путь тела до его остановки.

Ответ: $s = 19,8$ м.

Задача 11. Свая массой m при забивке в грунт испытывает сопротивление движению, равное αv . Найти закон движения точки (принимая сваю за материальную точку), если в начальный момент скорость сваи равна v_0 , а координата $y = 0$ (ось y направлена вниз).

Ответ: $y = \frac{g}{k} - g - \frac{kv_0}{k^2} (1 - e^{-kt})$, где $k = \frac{\alpha}{m}$.

Задача 12. Свая весом P при забивке в грунт испытывает сопротивление движению $R = \alpha e^{\beta t}$. Найти закон движения точки (принимая сваю за материальную точку), если в начальный момент скорость сваи равна v_0 , а координата $y = h$ (ось y направлена вертикально вниз).

Ответ: $y = \frac{gt^2}{2} + \left(v_0 + \frac{k}{\beta}\right)t + \frac{k}{\beta^2}(1 - e^{\beta t}) + h$, где $k = \frac{g\alpha}{P}$.

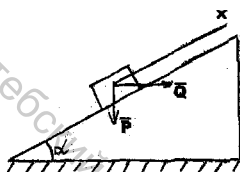


Рисунок 1.9

Задача 13. На тело весом P , находящееся на наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$, действует сила Q , направленная параллельно основанию наклонной плоскости (рис. 1.9). Найти закон движения точки (принимая тело за материальную точку), если тело движется вверх, а в начальный момент времени координата $x_0 = a$, скорость $\dot{x}_0 = v_0$.

Ответ: $x = \left(\frac{\sqrt{3}Q}{P} - 1\right)\frac{gt^2}{4} + v_0t + a$.

Задача 14. Принимая условие предыдущей задачи, найти закон движения точки, если коэффициент трения скольжения между телом и наклонной плоскостью равен f .

Ответ: $x = \left(\frac{\sqrt{3}Q}{P} - f\sqrt{3} - 1\right)\frac{gt^2}{4} + v_0t + a$.

Задача 15. Тело после полученного толчка из состояния покоя со скоростью $v_0 = 10$ м/с проходит по горизонтальной прямой до остановки путь $s = 20$ м. Определить коэффициент трения скольжения.

Ответ: $f = 0,25$.

Задача 16. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием приложенной к ней силы, изменяющейся по закону $F = \frac{\alpha}{t^2}$. Найти закон движения точки, если при $t = 1$ с $x = s$, $\dot{x} = v_0$.

Ответ: $x = -\frac{\alpha}{m} \ln t + (t-1)\left(v_0 - \frac{\alpha}{m}\right) + s$.

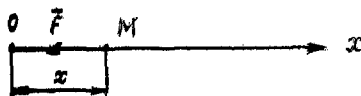


Рисунок 1.10

Задача 17. На материальную точку M массой $m=10$ кг вдоль горизонтальной прямой действует восстанавливающая сила, пропорциональная первой степени отклонения $F=c|x|$ (рис. 1.10). При отклонении точки на 1 см требуется сила в 10 Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент при $t=0$ $x_0=0,2$ м, $\dot{x}_0=20$ м/с.

Ответ: $x=0,2\cos 10t+2\sin 10t$.

Задача 18. На материальную точку массой $m=5$ кг в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F=10(t^2-t+4)$ Н. Найти положение точки в момент $t=2$ с, если в начальный момент $x_0=2$ м и $\dot{x}_0=0$.

Ответ: $x=18$ м.

Задача 19. На материальную точку массой m вдоль горизонтальной прямой действует сила, изменяющаяся по закону $F=F_0(1-\cos kt)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x=0$, $\dot{x}=v_0$.

Ответ: $x=\frac{F_0}{2m}t^2+v_0t+\frac{F_0}{k^2m}(\cos kt-1)$.

Задача 20. Поезд массой 1000 т идет по горизонтальному пути со скоростью $v_0=54$ км/ч. На расстоянии $s=1000$ м от станции машинист включает тормоз и поезд останавливается на станции. Определить силу R сопротивления движению.

Ответ: $R\approx 115000$ Н.

Задача 21. Тело опускается по негладкой поверхности, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, в течение какого промежутка t тело пройдет путь s , если в начальный момент времени его скорость равнялась v_0 и коэффициент трения скольжения равен f .

Ответ: $t=\frac{2s}{v_0+\sqrt{v_0^2+2gs(\sin\alpha-f\cos\alpha)}}$.

Задача 22. Материальная точка массой $m=25$ кг притягивается к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию точки от этого центра $F=cx$; при $x=1$ см величина силы $F=49,05$ Н. Найти закон движения точки при следующих начальных условиях: $x_0=0,1$ м, $\dot{x}_0=42$ м/с.

Ответ: $x=0,1\cos 14t+3\sin 14t$ м.

Задача 23. Автомобиль движется по горизонтальному пути со скоростью $v = 72 \text{ км/ч}$. Шофер включает тормоз и через некоторый промежуток времени автомобиль останавливается. Определить время торможения и тормозной путь, если коэффициент трения скольжения $f = 0,3$.

Ответ: $t = 6,8 \text{ с}$, $s = 68 \text{ м}$.

Задача 24. На тяжелую материальную точку из состояния покоя вдоль горизонтальной прямой в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = \alpha^2 mx$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = e^{\alpha t}$.

Задача 25. При падении материальная точка массой m испытывает сопротивление движению, величина которого равна $R = \alpha v$. Найти закон движения точки, если в начальный момент координата и скорость равны нулю.

Ответ: $y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})$.

1.6 Программированные задачи для самостоятельного решения

Тело массой m движется по горизонтальной плоскости прямолинейно. На него действует заданная сила F . В начальный момент координата тела равна x_0 , а начальная скорость v_0 . Требуется найти закон движения тела, т.е. $x = f(t)$. Кроме того, в задачах №№ 1-12 требуется определить скорость тела v_1 в заданный момент времени t_1 , а в задачах №№ 13-25 определить координату тела x_1 , когда его скорость равна v_1 (табл. 1.2).

Таблица 1.2 – Числовые данные к задачам для самостоятельного решения

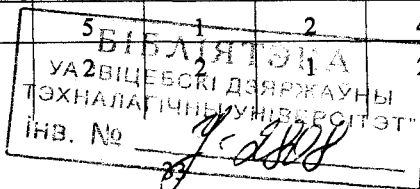
Задача	Вариант	k	$m, \text{ кг}$	$x_0, \text{ см}$	$v_0, \text{ см/с}$	$t, \text{ с}$	$\bar{F}, \text{ Н}$
1	1	3	3	1	2	42	$kx^{-1/2}$
	2	16	4	16	8	39	
	3	18	2	1	6	14	
	4	48	3	81	24	117	
	5	36	1	1	12	7	
2	1	3	4	16	8	4	$kx^{1/2}$
	2	6	2	1	2	2	
	3	12	1	1	4	1	
	4	4	48	81	9	36	
	5	3	16	16	4	16	

Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	$t, \text{с}$	$\bar{F}, \text{Н}$
3	1	5	4	1	1	8	$kx^{3/2}$
	2	5	1	16	64	3	
	3	10	1	4	16	2	
	4	5	12	9	9	8	
	5	5	32	4	2	16	
4	1	3	2	1	1	1	kx^2
	2	6	1	1	2	0,5	
	3	6	2	2	4	0,5	
	4	2	4	3	3	3	
	5	12	1	2	8	1	
5	1	8	4	2	4	1	kx^3
	2	1	2	2	2	0,5	
	3	4	2	1	1	0,5	
	4	8	1	2	8	0,5	
	5	6	3	2	4	3	
6	1	4	1	2	4	3	$-kx$
	2	3	3	2	2	5	
	3	16	1	3	4	1	
	4	6	2	5	3	2	
	5	12	3	4	6	3	
7	1	2	1	1	2	21	$-kx^{-3}$
	2	18	1	1	6	7	
	3	98	1	1	14	3	
	4	2	4	4	0,5	78	
	5	2	1	4	1	39	
8	1	1	2	4	2	84	$-kv^2x^{-1}$
	2	2	2	3	3	4	
	3	6	3	2	7	6	
	4	3	1	1	20	1	
	5	5	5	1	15	0,5	

Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	$t, \text{с}$	$\bar{F}, \text{Н}$	
9	1	1	2	4	2	2	kv^2x^{-1}	
	2	6	4	2	2	1		
	3	4	2	3	6	1		
	4	3	1	4	3	0,5		
	5	2	1	1	4	0,5		
10	1	4	2	1	2	6	$-kvx^{-2}$	
	2	5	5	1	1	12		
	3	6	2	1	3	4		
	4	8	2	2	2	12		
	5	6	1	2	3	8		
11	1	4	1	1	2	6	$-kx^{-3}$	
	2	18	2	3	1	12		
	3	12	3	2	1	3		
	4	1	1	1	1	12		
	5	9	1	1	3	4		
12	1	1	1	1	2	10	$-kx^{-3}$	
	2	4	2	1	3	9		
	3	4	1	2	2	8		
	4	8	1	2	1	1		
	5	18	1	3	2	6		
Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	a	$v_1, \text{см/с}$	$\bar{F}, \text{Н}$
13	1	2	1	2	1	4	7	$kv+a$
	2	6	2	6	3	18	15	
	3	3	3	2	1	9	9	
	4	4	2	5	2	8	10	
	5	4	4	10	1	20	13	

Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	a	$v_1, \text{см/с}$	$\bar{F}, \text{Н}$
14	1	2	2	3	40	6	20	$-kv + a$
	2	2	1	5	20	4	10	
	3	6	2	6	10	6	5	
	4	4	2	3	15	9	5	
	5	4	4	4	25	8	10	
15	1	2	6	7	2	1	4	$k(v+a)^{-1}$
	2	4	6	2	2	2	6	
	3	1	3	8	2	1	6	
	4	2	3	3	1	2	3	
	5	2	2	9	1	2	7	

Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	$v_1, \text{см/с}$	$\bar{F}, \text{Н}$
16	1	2	1	0	1	9	$kv^{1/2}$
	2	2	3	8	4	9	
	3	4	2	10	9	36	
	4	4	1	11	16	36	
	5	3	3	125	25	36	
17	1	2	5	20	25	36	$kv^{3/2}$
	2	1	2	18	16	64	
	3	2	3	5	9	49	
	4	3	2	3	4	16	
	5	2	1	2	1	4	
18	1	2	3	0	3	9	kv^2
	2	3	2	2	4	8	
	3	4	2	1	2	3	
	4	1	5	1	2	4	
	5	2	2	2	2	2	



Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	$v_1, \text{см/с}$	$\bar{F}, \text{Н}$	
19	1	1	3	2	3	6	kv^3	
	2	3	12	3	4	5		
	3	2	36	5	6	9		
	4	4	24	6	3	6		
	5	1	18	7	3	6		
20	1	2	4	2	10	5	$-kv^2$	
	2	3	9	4	9	3		
	3	4	8	6	2	1		
	4	6	18	8	3	1		
	5	8	16	10	5	1		
Задача	Вариант	k	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см/с}$	$v_1, \text{см/с}$	a	$\bar{F}, \text{Н}$
21	1	4	1	1	12	20	2	ke^{at}
	2	6	2	4	8	13	1	
	3	9	1	4	8	13	3	
	4	2	4	2	1	3	1	
	5	8	2	3	4	22	2	
22	1	1	3	2	2	14	3	$kt+a$
	2	2	2	1	10	46	6	
	3	2	4	5	2	14	2	
	4	2	2	4	5	41	6	
	5	2	6	16	3	15	6	
23	1	2	1	2	3	5	1	$k \sin at$
	2	4	2	3	1	2	2	
	3	9	1	4	3	6	3	
	4	6	3	5	3	4	4	
	5	4	4	4	2	4	0,5	

Задача	Вариант	k	$m, \text{ кг}$	$x_0, \text{ см}$	$v_0, \text{ см/с}$	$v_1, \text{ см/с}$	a	$\bar{F}, \text{ Н}$
24	1	3	3	1	4	2	0,5	$k \cos at$
	2	18	2	4	2	5	3	
	3	16	4	2	2	3	4	
	4	4	2	3	3	4	2	
	5	2	1	5	4	3	1	
25	1	4	1	9	4	20	4	$kx + a$
	2	18	2	13	36	9	18	
	3	9	1	16	72	135	36	
	4	3	3	18	30	19	10	
	5	8	2	9	44	56	8	

2.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Под действием какой силы возникают свободные колебания?
2. Под действием какой силы возникают вынужденные колебания?
3. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний без сопротивления.
4. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний с сопротивлением.
5. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$.
6. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ для случая $n < k$.
7. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ для случая $n = k$.
8. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ для случая $n > k$.
9. Чему равна постоянная C_1 для решения $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$?
10. Чему равна постоянная C_2 для решения из п. 9?
11. Чему равна постоянная C_2 для решения $x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$?
12. Чему равна частота свободных колебаний, описываемых уравнением $m\ddot{x} + cx = 0$?
13. Чему равен период свободных колебаний из п. 12?
14. Чему равна частота свободных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$?
15. Чему равна частота свободных колебаний без сопротивления, если известна статическая деформация δ_{cm} ?
16. Запишите общее решение уравнения $\ddot{x} + k^2x = h \sin pt$.
17. Чему равна амплитуда свободных колебаний без сопротивления?
18. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x} + k^2x = h \sin pt$?
19. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt$?
20. При какой частоте возбуждения имеет место резонанс в системе из п. 19?

21. При какой частоте возбуждения имеет место резонанс в системе из п.

22. Чему равно запаздывание по фазе вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в системе из п. 19?

23. Чему равно запаздывание по фазе вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в системе из п. 18, если $k < p$?

24. Запишите ответ на вопрос п. 23, если $k = p$.

25. Запишите ответ на вопрос п. 23, если $k > p$.

Тестовый контроль

1. $h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}$.

2. $\arctg \left(\frac{2np}{k^2 - p^2} \right)$.

3. $\pi / 2$.

4. $\dot{x}_0 / k$.

5. $h / (k^2 - p^2)$.

6. $\sqrt{k^2 - n^2}$.

7. Под действием восстанавливающей силы.

8. $x = e^{-m} (C_1 + C_2 t)$.

9. $2\pi / k$.

10. x_0 .

11. $\sqrt{k^2 - 2n^2}$.

12. $\sqrt{x_0^2 + (x_0 / k)^2}$.

13. Под действием возмущающей силы.

14. $\sqrt{g / \delta_{cm}}$.

15. $m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}$.

16. k .

17. $m\ddot{x} = -cx$.

18. π .

19. $(nx_0 + \dot{x}_0) / k_1$.

20. $x = e^{-m} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$.

$$21. x = C_1 e^{-\eta t} + C_2 e^{-\eta_2 t}.$$

$$22. x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + h \sin pt / (k^2 - p^2).$$

$$23. 0.$$

$$24. \sqrt{c/m}.$$

$$25. x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Предлагаются следующие варианты вопросов (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Варианты вопросов

Номер варианта	Вопросы
1	3, 14, 20
2	4, 15, 21
3	5, 16, 17
4	6, 18, 23
5	7, 19, 24
6	8, 20, 25
7	1, 16, 22
8	2, 17, 25
9	9, 12, 24
10	10, 16, 23
11	11, 17, 19
12	3, 18, 21
13	4, 19, 20
14	5, 20, 22
15	6, 10, 23
16	7, 11, 24
17	8, 12, 25
18	9, 13, 23
19	10, 14, 24

2.2 Программированные задачи

2.2.1.

1. Найти скорость материальной точки массой $m = 100$ г, движущейся под действием центральной силы $F = 8$ Н, если радиус кривизны в данный момент $\rho = 3$ см.

- 1) $v = 3$ см/с;
- 2) $v = 0,35$ см/с;
- 3) $v = 30$ см/с;
- 4) $v = 5$ см/с;
- 5) $v = 0,5$ см/с.

2. Какое движение описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-kt} (A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + \beta \sin \sqrt{k^2 - h^2} t) + C \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 100$ Н/см и точке, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость 13,5 см/с.

- 1) $A = 13,5$ см;
- 1) $A = 26,5$ см;
- 1) $A = 27$ см;
- 1) $A = 1,35$ см;
- 1) $A = 2,7$ см.

5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50$ Н·с/см.

- 1) $T = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi$ с;
- 2) $T = 12$ с;
- 3) $T = 24,75$ с;
- 4) $T = 10$ с;
- 5) $T = 8\sqrt{3} \pi$ с.

2.2.2

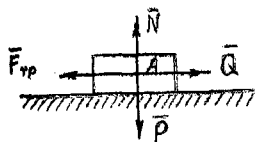


Рисунок 2.1

1. Тело A движется по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы $\bar{Q}$ (рис. 2.1). Чему равно ускорение тела A , если

- 1) $a = 3$ см/с;
- 2) $a = 0$;
- 3) $a = g$;
- 4) $a = \frac{Q}{P} g$;
- 5) $a = \frac{N + Q}{P} g$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону: $x = e^{-kt} \left(A \cos \sqrt{h^2 - k^2} t + B \sin \sqrt{h^2 - k^2} t \right), h > k ?$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания (случай резонанса); 5) аperiodическое движение.
3. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение: $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, h > k ?$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
4. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 30 \sin t$.	1) $A = 0,1 \text{ см}$; 2) $A = 0,2 \text{ см}$; 3) $A = 0,3 \text{ см}$; 4) $A = 0,4 \text{ см}$; 5) $A = 0,5 \text{ см}$.
5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 320 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.	1) $T = 8\pi \text{ с}$; 2) $T = 4\pi \text{ с}$; 3) $T = 2\pi \text{ с}$; 4) $T = 3,56 \text{ с}$; 5) $T = 20,41 \text{ с}$.
2.2.3. 1. Найти скорость материальной точки массой $m = 100 \text{ г}$, движущейся под действием центральной силы $F = 3 \text{ Н}$, если радиус кривизны в данный момент $\rho = 3 \text{ см}$.	1) $v = 3 \text{ см/с}$; 2) $v = 0,35 \text{ см/с}$; 3) $v = 30 \text{ см/с}$; 4) $v = 5 \text{ см/с}$; 5) $v = 0,5 \text{ см/с}$.
2. Какое движение описывает данное дифференциальное уравнение: $\ddot{x} - k^2x = 0 ?$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону: $x = e^{-kt} \left(A \cos \sqrt{h^2 - k^2} t + B \sin \sqrt{h^2 - k^2} t \right) + C \sin(pt + \beta) ?$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания (случай резонанса); 5) аperiodическое движение.

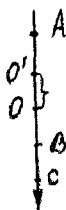
4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$ и точка, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость $13,5 \text{ см/с}$.

- 1) $A = 13,5 \text{ см}$;
- 2) $A = 26,5 \text{ см}$;
- 3) $A = 127 \text{ см}$;
- 4) $A = 1,35 \text{ см}$;
- 5) $A = 2,7 \text{ см}$.

5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$.

- 1) $T = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \pi \text{ с}$;
- 2) $T = 12 \text{ с}$;
- 3) $T = 24,75 \text{ с}$;
- 4) $T = 10 \text{ с}$;
- 5) $T = 8\sqrt{3} \text{ с}$.

2.2.4



1. Относительно какой точки рассматриваются свободные колебания материальной точки (рис. 2.2), если дифференциальное уравнение имеет вид: $\ddot{x} + \frac{cg}{P}x = 0$?

- 1) т. A;
- 2) т. B;
- 3) т. C;
- 4) т. O;
- 5) т. O'.

2. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2x = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} A \sin \sqrt{h^2 - k^2}t + \beta?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 320 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 8\pi \text{ с}$;
- 2) $T = 4\pi \text{ с}$;
- 3) $T = 12\pi \text{ с}$;
- 4) $T = 16\pi \text{ с}$;
- 5) $T = 20\pi \text{ с}$.

5. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а в начальный момент материальная точка была отклонена от положения статического равновесия на 5 см вниз и имела скорость 20 см/с .

- 1) $A = 40,3 \text{ см}$;
- 2) $A = 55 \text{ см}$;
- 3) $A = 33 \text{ см}$;
- 4) $A = 14,7 \text{ см}$;
- 5) $A = 25,4 \text{ см}$.

2.2.5

1. $m\vec{a} = F$. Что такое F ?

- 1) внутренняя сила;
- 2) внешняя сила, приложенная к материальной точке;
- 3) сила инерции;
- 4) равнодействующая сил, приложенных к мат. точке;
- 5) реакция связи.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону $x = a \sin(kt + \alpha)$?

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} = 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad h > k?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а в начальный момент материальная точка была отклонена от положения статического равновесия на 5 см и имела скорость 20 см/с.

- 1) $A = 40,3 \text{ см}$;
- 2) $A = 55 \text{ см}$;
- 3) $A = 33 \text{ см}$;
- 4) $A = 14,7 \text{ см}$;
- 5) $A = 25,4 \text{ см}$.

5. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/м}$?

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

2.2.6

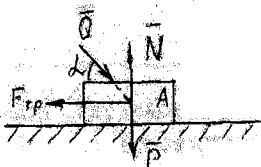


Рисунок 2.3

1. Тело A движется по шероховатой поверхности под действием силы $\vec{Q}$ (рис. 2.3). Чему равна равнодействующая сил, приложенных к телу A ?

- 1) $\vec{R} = \vec{Q}$;
- 2) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} + \vec{P}$;
- 3) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + P \cos \alpha$;
- 4) $\vec{R} = \vec{Q} + \vec{P}$;
- 5) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P}$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right) ?$$

- 1) свободные колебания ;
- 2) затухающие колебания ;
- 3) вынужденные колебания ;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления ;
- 5) аperiodическое движение .

1. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0 ?$$

- 1) свободные колебания ;
- 2) затухающие колебания ;
- 3) вынужденные колебания ;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления ;
- 5) аperiodическое движение .

4. Определить амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 30 \sin t$?

- 1) $A = 0,1 \text{ см}$;
- 2) $A = 0,1 \text{ см}$;
- 3) $A = 3,14 \text{ см}$;
- 4) $A = 4 \text{ см}$;
- 5) $A = 8 \text{ см}$.

5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 320 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 4\pi \text{ с}$;
- 2) $T = 8\pi \text{ с}$;
- 3) $T = 2\pi \text{ с}$;
- 4) $T = \pi \text{ с}$;
- 5) $T = \sqrt{2}\pi \text{ с}$.

2.2.7

1. Движение материальной точки массой m происходит по окружности радиусом $\rho = r$ согласно уравнению $s = 2t^2$. Определить величину равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, как функцию времени.

- 1) $F = \frac{4m}{r} \sqrt{16t^4 + 1}$;
- 2) $F = \frac{m}{r} \sqrt{16t^4 + 1}$;
- 3) $F = \frac{4m}{r} \sqrt{t^2 + 1}$;
- 4) $F = mr\sqrt{t+1}$;
- 5) $F = m\sqrt{t+r}$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону $x = (A + Bt)e^{-ht}$?

- 1) свободные колебания ;
- 2) затухающие колебания ;
- 3) вынужденные колебания ;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления ;
- 5) аperiodическое движение .

3. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2x = H \sin(pt + \beta) ?$$

- 1) свободные колебания ;
- 2) затухающие колебания ;
- 3) вынужденные колебания ;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления ;
- 5) аperiodическое движение .

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 100 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 10 \text{ с}$;
- 2) $T = 2\pi \text{ с}$;
- 3) $T = 2\sqrt{5}\pi \text{ с}$;
- 4) $T = 2\sqrt{3}\pi \text{ с}$;
- 5) $T = 5 \text{ с}$.

5. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 0,6 г, если жесткость пружины $C = 15 \text{ Н/см}$, а материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости.

- 1) $A = 40 \text{ см}$;
- 2) $A = 2 \text{ см}$;
- 3) $A = 39,2 \text{ см}$;
- 4) $A = 5 \text{ см}$;
- 5) $A = 4 \text{ см}$.

2.2.8

1. Записать дифференциальные уравнения движения материальной точки/естественной форме

- 1) $m\ddot{\vec{a}} = \vec{F}$;
- 2) $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$;
- 3) $m\ddot{x} = x$; $m\ddot{y} = y$; $m\ddot{z} = z$;
- 4) $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r$; $m \frac{v^2}{\rho} = F_n$; $0 = F_\beta$;
- 5) $m(\ddot{\phi} - \rho\dot{\phi}^2) = F_\rho$; $m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = F_\phi$; $m\ddot{z} = F_z$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad h < k?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$, и точке, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость $13,5 \text{ см/с}$.

- 1) $A = 13,5 \text{ см}$;
- 2) $A = 27 \text{ см}$;
- 3) $A = 26,5 \text{ см}$;
- 4) $A = 2,7 \text{ см}$;
- 5) $A = 1,35 \text{ см}$.

5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$.

- 1) $T = 10 \text{ с}$;
- 2) $T = 24,75 \text{ с}$;
- 3) $T = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ с}$;
- 4) $T = 10\sqrt{3}\pi \text{ с}$;
- 5) $T = 12 \text{ с}$.

2.2.9

1. Что изучает динамика?

- 1) способы преобразования сил;
- 2) единство внешних факторов-сил;
- 3) «геометрию движения»;
- 4) законы движения;
- 5) кинематические свойства движений со свойствами сил, обуславливающими эти движения.

2. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad h < k$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = a \sin(kt + \alpha)$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 80 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 4\pi \text{ с}$;
- 2) $T = 2\pi \text{ с}$;
- 3) $T = 4 \text{ с}$;
- 4) $T = 2 \text{ с}$;
- 5) $T = 2\sqrt{3}\pi \text{ с}$.

5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 5 \sin t$.

- 1) $A = 0,1 \text{ см}$;
- 2) $A = \frac{1}{60} \text{ см}$;
- 3) $A = 60 \text{ см}$;
- 4) $A = \frac{1}{30} \text{ см}$;
- 5) $A = 30 \text{ см}$.

2.2.10

1. Записать дифференциальные уравнения движения в векторной форме.

- 1) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$;
- 2) $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$;
- 3) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_\tau$; $m \frac{v^2}{\rho} = F_n$; $0 = F_\beta$;
- 4) $m\ddot{x} = x$; $m\ddot{y} = y$; $m\ddot{z} = z$;
- 5) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = F_\rho$; $m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = F_\phi$;
 $m\ddot{z} = F_z$.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$x = 2\ddot{x} + k^2x = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если движется по закону:

$$x = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right) ?$$

$(h < k)$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

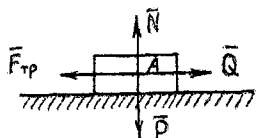
4. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 20 \text{ Н·с/см}$?

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

5. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 1 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$, и точка, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость 20 см/с .

- 1) $A = 2 \text{ см}$;
- 2) $A = 10 \text{ см}$;
- 3) $A = 5 \text{ см}$;
- 4) $A = 19,6 \text{ см}$;
- 5) $A = 9,81 \text{ см}$.

2.2.11.



1. Тело A движется по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы Q . Чему равно ускорение тела A .

- 1) $a = 3 \text{ см/с}$;
- 2) $a = 0$;
- 3) $a = g$;
- 4) $a = \frac{Q}{P} g$;
- 5) $a = \frac{N + Q}{P} g$.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$x + 2\ddot{x} + k^2x = 0? \quad (h = k)$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если движется по закону:

$$x = A \sin kt + B \cos kt + \frac{H}{2k^2} \sin kt \cos \beta - \frac{H}{2k} \cos(kt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 24 \sin 0,1t \text{ г}$?

- 1) $A = 10 \text{ см}$;
- 2) $A = 1 \text{ см}$;
- 3) $A = 2 \text{ см}$;
- 4) $A = 20 \text{ см}$;
- 5) $A = 5 \text{ см}$.

5. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$?

- 1) аperiodическое движение;
- 2) свободные колебания;
- 3) затухающие колебания;
- 4) вынужденные колебания;
- 5) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления.

2.2.12

1. Найти скорость материальной точки массой 200 г, движущейся под действием центральной силы $F = 10 \text{ Н}$, если радиус кривизны в данный момент $\rho = 2 \text{ м}$.

- 1) $v = \sqrt{2} \text{ м/с}$;
- 2) $v = \sqrt{3} \text{ м/с}$;
- 3) $v = \sqrt{5} \text{ м/с}$;
- 4) $v = \sqrt{100} \text{ м/с}$;
- 5) $v = \sqrt{7} \text{ м/с}$.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H \sin(pt + \alpha)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если движется по закону:

$$x = (A + Bt)e^{-ht}?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 200 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 20 \sin 2t \text{ г}$.

- 1) $A = \frac{1}{100} \text{ см}$;
- 2) $A = \frac{1}{150} \text{ см}$;
- 3) $A = \frac{1}{250} \text{ см}$;
- 4) $A = \frac{1}{350} \text{ см}$;
- 5) $A = \frac{1}{450} \text{ см}$.

5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 200 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 40 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 2\pi\sqrt{3} \text{ с}$;
- 2) $T = 2\pi\sqrt{5} \text{ с}$;
- 3) $T = 2\pi\sqrt{7} \text{ с}$;
- 4) $T = 2\pi\sqrt{10} \text{ с}$;
- 5) $T = 2\pi\sqrt{3}\frac{1}{3} \text{ с}$.

2.2.13.



1. Относительно какой точки рассматриваются свободные колебания (рис. 2.5), если дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{cg}{P} = 0?$$

- 1) т. А;
- 2) т. В;
- 3) т. С;
- 4) т. О;
- 5) т. О'.

Рисунок 2.5

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = (A + Bt)e^{-ht}?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiодическое движение.

3. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2x = H \sin pt?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiодическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$?

- 1) $T = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ с}$;
- 2) $T = 8\sqrt{3} \pi \text{ с}$;
- 3) $T = 8\sqrt{2} \pi \text{ с}$;
- 4) $T = 10 \pi \text{ с}$;
- 5) $T = 2\sqrt{3} \pi \text{ с}$.

5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 30 \sin t \text{ г}$.

- 1) $A = 0,1 \text{ см}$;
- 2) $A = 0,2 \text{ см}$;
- 3) $A = 3 \text{ см}$;
- 4) $A = 3,14 \text{ см}$;
- 5) $A = 5 \text{ см}$.

2.2.14

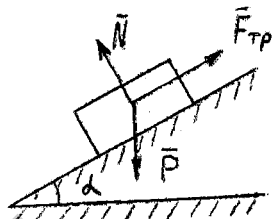


Рисунок 2.6

1. Тело движется по шероховатой наклонной плоскости (рис. 2.6). Чему равна равнодействующая R сил, приложенных к телу?

- 1) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P}$;
- 2) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{тр}$;
- 3) $\vec{R} = \vec{P}$;
- 4) $\vec{R} = \vec{F}_{тр}$;
- 5) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{тр}$.

2. Движение материальной точки массой m происходит по окружности радиуса r согласно уравнению $s = 2t^2$. Определить величину равнодействующей сил, приложенных к точке, как функцию времени.

- 1) $F = \frac{4m}{\sqrt{r}} \sqrt{1+t^2}$;
- 2) $F = \frac{m}{r} \sqrt{1+t^2}$;
- 3) $F = \frac{4m}{r} \sqrt{r+t^2}$;
- 4) $F = \frac{4m}{r} \sqrt{r^2 + 16t^4}$;
- 5) $F = \frac{4m}{r} t$.

3. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 250$ Н/см, а в начальный момент материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости.

- 1) $A = 392$ см;
- 2) $A = 250$ см;
- 3) $A = 192$ см;
- 4) $A = 34$ см;
- 5) $A = 25$ см.

4. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right).$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

5. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

2.2.15.

1. Материальная точка массой 100 г совершает движение согласно уравнениям $x = 3t^2$; $y = 7t^2 + 5$ (x, y – в метрах, t – в с). Определить величину равнодействующей, под действием которой происходит движение материальной точки.

- 1) $F = 200\sqrt{29}$ Н;
- 2) $F = 200\sqrt{27}$ Н;
- 3) $F = 20\sqrt{27}$ Н;
- 4) $F = 200\sqrt{58}$ Н;
- 5) $F = 205$ Н.

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right) + C \sin(pt + \beta)?$$

3. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2hx + k^2x = 0? \quad (h < k)$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки, масса которой 80 г и которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 4\pi \text{ с}$;
- 2) $T = 2\pi \text{ с}$;
- 3) $T = 4 \text{ с}$;
- 4) $T = 2 \text{ с}$;
- 5) $T = 2\sqrt{3}\pi \text{ с}$.

5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а возмущающая сила $F = 5 \sin 0,1t \text{ г}$.

- 1) $A = \frac{4}{25} \text{ см}$;
- 2) $A = \frac{5}{25} \text{ см}$;
- 3) $A = 2 \text{ см}$;
- 4) $A = 4 \text{ см}$;
- 5) $A = \frac{31}{31} \text{ см}$.

2.2.16.

1. Что изучает динамика?

- 1) способы преобразования сил;
- 2) «геометрию движения»;
- 3) законы движения;
- 4) кинематические свойства движений со свойствами сил, обуславливающими эти движения;
- 5) единство внешних факторов-сил.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2x = 0?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = (A + Bt)e^{-ht}?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период затухающих колебаний материальной точки, масса которой 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а коэффициент сопротивления $\alpha = 20$ Н·с/см?

- 1) $T = \frac{6\pi}{\sqrt{5}}$ с;
- 2) $T = \frac{5\sqrt{6}}{3}\pi$ с;
- 3) $T = 2\pi$ с;
- 4) $T = \sqrt{3}\pi$ с;
- 5) $T = 47,2\pi$ с.

5. Чему равен логарифмический декремент затухания, если материальная точка массой 100 г колеблется на пружине жесткостью $C = 25$ Н/см, а коэффициент сопротивления равен $\alpha = 50$ Н·с/см?

- 1) $\ln q^{-1} = \frac{\pi}{2}$;
- 2) $\ln q^{-1} = 2\pi$;
- 3) $\ln q^{-1} = \frac{3\pi}{2}$;
- 4) $\ln q^{-1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$;
- 5) $\ln q^{-1} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

2.2.17.

$$1. m\vec{a} = \vec{F}.$$

Что такое $\vec{F}$?

- 1) реакция связей;
- 2) равнодействующая сил, приложенных к материальной точке;
- 3) сила инерции;
- 4) внешняя сила, приложенная к материальной точке;
- 5) внутренняя сила.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$x'' + 2hx' + k^2x = 0 \quad (h < k)$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{k^2 - \omega^2} \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки, масса которой 100 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.

- 1) $T = 10$ с;
- 2) $T = 2$ с;
- 3) $T = 2\sqrt{3}\pi$ с;
- 4) $T = 2\sqrt{5}\pi$ с;
- 5) $T = 3\sqrt{5}\pi$ с.

5. Чему равен логарифмический декремент затухания, если материальная точка массой 100 г колеблется на пружине жесткостью $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления равен $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$?

$$1) \ln q^{-1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3};$$

$$2) \ln q^{-1} = \sqrt{3}\pi; 3) \ln q^{-1} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5};$$

$$4) \ln q^{-1} = \sqrt{5}\pi; 5) \ln q^{-1} = \sqrt{2}\pi.$$

2.2.18

1. Что изучает динамика?

- 1) способы преобразования сил;
- 2) «геометрию движения»;
- 3) законы движения;
- 4) кинематические свойства движений со свойствами сил, обуславливающими эти движения;
- 5) единство внешних факторов-сил.

2. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2x + 2h\dot{x} = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) апериодическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{k^2 - \omega^2} \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) апериодическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 1 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$, и точке, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость 20 см/с .

- 1) $A = 2 \text{ см}$;
- 2) $A = 5 \text{ см}$;
- 3) $A = 10 \text{ см}$;
- 4) $A = 19,6 \text{ см}$;
- 5) $A = 9,81 \text{ см}$.

5. Чему равен логарифмический декремент затухания, если материальная точка массой 100 г колеблется на пружине жесткостью $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления равен $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$?

$$1) \ln q^{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}};$$

$$2) \ln q^{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}; 3) \ln q^{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

$$4) \ln q^{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}; 5) \ln q^{-1} = \frac{\pi}{2}.$$

2.2.19

1. Записать дифференциальные уравнения движения в естественной форме.

$$1) m\ddot{\omega} = \vec{F}; 2) m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F};$$

$$3) m\ddot{x} = x; m\ddot{y} = y; m\ddot{z} = z;$$

$$4) m \frac{dv}{dt} = F_r; m \frac{v^2}{\rho} = F_w; 0 = F_p;$$

$$5) m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = F_\rho; m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = F_\phi; m\ddot{z} = F_z.$$

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение; $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0 \quad (h < k)$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
3. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 0,6 г, если жесткость пружины $C = 15 \text{ Н/см}$, а материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости ($g = 980 \text{ см/с}^2$).	1) $A = 40 \text{ см}$; 2) $A = 39,2 \text{ см}$; 3) $A = 2 \text{ см}$; 4) $A = 5 \text{ см}$; 5) $A = 4 \text{ см}$.
4. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону: $x = a \sin(kt + \alpha) ?$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания (случай резонанса); 5) аperiodическое движение.
5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н с/см}^2$	1) $T = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ с}$; 2) $T = 10 \text{ с}$; 3) $T = \frac{8\sqrt{5}}{5} \pi \text{ с}$; 4) $T = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \text{ с}$; 5) $T = 24,75 \text{ с}$.
2.2.20 1. Сформулировать основную задачу динамики	1) задаются силы, приложенные к материальной точке, нужно определить закон движения материальной точки в пространстве; 2) определить равнодействующую сил, вызывающих заданное движение материальной точки с известной массой; 3) задана скорость в начальный момент времени, определить равнодействующую сил; 4) заданы силы, приложенные к материальной точке, начальное положение точки, ее масса, нужно найти закон движения точки; 5) заданы силы, приложенные к материальной точке с данной массой, известно положение и скорость точки в определенный момент времени, определить закон движения материальной точки.
2. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0 \quad (h < k)$	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону: $x = (A + Bt)e^{-ht}$?	1) свободные колебания;
	2) затухающие колебания;
	3) вынужденные колебания;
	4) вынужденные колебания (случай резонанса);
	5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 320 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.	1) $T = 8\pi$ с;
	2) $T = 6\pi$ с;
	3) $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ с;
	4) $T = 3,56$ с;
	5) $T = 20,41$ с.

5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400$ Н/см, а возмущающая сила $F = 10\sin t$ г.	1) $A = 0,1$ см;
	2) $A = 1/30$ см;
	3) $A = 1/75$ см;
	4) $A = 1/168$ см;
	5) $A = 3,14$ см.

2.2.21 1. Материальная точка массой 100 г совершает движение согласно уравнениям $x = 2t^2$; $y = 5t^2 + 7$ (х, у – метры, t – с). Определить величину равнодействующей, под действием которой происходит движение материальной точки.	1) $F = 200\sqrt{29}$ Н;
	2) $F = 200\sqrt{27}$ Н;
	3) $F = 20\sqrt{27}$ Н;
	4) $F = 100\sqrt{58}$ Н;
	5) $F = 205$ Н.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение: $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0$? ($h < k$)	1) свободные колебания;
	2) затухающие колебания;
	3) вынужденные колебания;
	4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
	5) аperiodическое движение.

3. Какие колебания совершает материальная точка, если она движется по закону: $x = a\sin(kt + \alpha)$?	1) свободные колебания;
	2) затухающие колебания;
	3) вынужденные колебания;
	4) вынужденные колебания (случай резонанса);
	5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 80 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.	1) $T = 10$ с;
	2) $T = 5$ с;
	3) $T = 2\pi$ с;
	4) $T = 4\pi$ с; 5) $T = 2\sqrt{5}\pi$ с.

5. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50$ Н с/см?	1) аperiodическое движение;
	2) свободные колебания;
	3) затухающие колебания;
	4) вынужденные колебания;
	5) вынужденные колебания (случай резонанса).

2.2.22

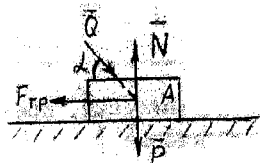


Рисунок 2.7

1. Тело A движется по шероховатой поверхности под действием силы Q (рис. 2.7). Чему равна равнодействующая сил $\vec{R}$, приложенных к телу A ?

1) $\vec{R} = \vec{F}_{тр} + \vec{Q} + \vec{N} + \vec{P}$;

2) $\vec{R} = \vec{Q}$;

3) $\vec{R} = \vec{Q} + \vec{P} + \vec{N}$;

4) $\vec{R} = \vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{P}$;

5) $\vec{R} = \vec{Q} + \vec{P}$.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0?$$

1) свободные колебания;

2) затухающие колебания;

3) вынужденные колебания;

4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;

5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = (A + \beta t)e^{-ht}?$$

1) свободные колебания;

2) затухающие колебания;

3) вынужденные колебания;

4) вынужденные колебания (случай резонанса);

5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 100$ Н/см, и точке, находящейся на пружине, была сообщена скорость 13,5 см/с.

1) $A = 13,5$ см;

2) $A = 26,5$ см;

3) $A = 27$ см;

4) $A = 2,7$ см;

5) $A = 1,35$ см.

5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 250$ Н/см, а возмущающая сила $F = 5 \sin t$ г.

1) $A = \frac{1}{30}$ см;

2) $A = 30$ см;

3) $A = 2$ см;

4) $A = \frac{1}{60}$ см;

5) $A = 60$ см.

2.2.23

1. Найти скорость материальной точки массой 100 г, движущейся под действием центральной силы $F = 3$ Н, если радиус кривизны $\rho = 3$ см

1) $v = 3$ м/с;

2) $v = 0,35$ м/с;

3) $v = 5$ м/с;

4) $v = 30$ м/с;

5) $v = 0,5$ м/с.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0?$$

1) свободные колебания;

2) затухающие колебания;

3) вынужденные колебания;

4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;

5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{\mu}{k^2 \omega^2} \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 1 г, если жесткость пружины $C = 100 \text{ Н/см}$, и точка, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость $v = 20 \text{ см/с}$.

- 1) $A = 2 \text{ см}$;
- 2) $A = 10 \text{ см}$;
- 3) $A = 5 \text{ см}$;
- 4) $A = 19,6 \text{ см}$;
- 5) $A = 9,81 \text{ см}$.

5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 80 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 4\pi \text{ с}$;
- 2) $T = 4 \text{ с}$;
- 3) $T = 2\pi \text{ с}$;
- 4) $T = 2 \text{ с}$ 5) $T = 3 \text{ с}$.

2.2.24.

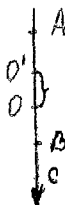


Рисунок 2.8

1. Относительно какой точки рассматриваются свободные колебания материальной точки (рис. 2.8), если дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{cg}{p}x = c?$$

- 1) т. A;
- 2) т. B;
- 3) т. C;
- 4) т. O;
- 5) т. O'.

2. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а в начальный момент материальная точка была отклонена от положения статического равновесия на 5 см и имела скорость 20 см/с.

- 1) $A = 40,3 \text{ см}$;
- 2) $A = 55 \text{ см}$;
- 3) $A = 33 \text{ см}$;
- 4) $A = 14,7 \text{ см}$;
- 5) $A = 25,4 \text{ см}$.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону

$$x = A \sin kt + B \cos kt + \frac{\mu}{2k^2} \sin kt \cos \beta - \frac{H}{2k} \cos(kt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 20 \text{ Н·с/см}$.

- 1) $T = \frac{6\pi}{\sqrt{10}} \text{ с};$
- 2) $T = \frac{10\pi}{\sqrt{6}} \text{ с};$ 3) $T = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \text{ с};$
- 4) $T = \frac{\sqrt{3}\pi}{5} \text{ с};$ 5) $T = \frac{3\pi}{\sqrt{5}} \text{ с}.$

2.2.25

1. $m\ddot{a} = \vec{F}$. Что такое сила $\vec{F}$?

- 1) внутренняя сила;
- 2) внешняя сила, приложенная к материальной точке;
- 3) сила инерции;
- 4) равнодействующая сил, приложенных к материальной точке;
- 5) реакция связи.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$x + 2\dot{x} + k^2x = 0?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2}t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2}t \right) ?$$

$(k^2 > h^2)$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки весом 100 г, если жесткость пружины $C = 20 \text{ Н/см}$, а материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости

- 1) $A = 40 \text{ см};$
- 2) $A = 5 \text{ см};$
- 3) $A = 10 \text{ см};$
- 4) $A = 38,2 \text{ см};$
- 5) $A = 19,6 \text{ см}.$

5. Определить период затухающих колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$

- 1) $T = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ с};$
- 2) $T = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \pi \text{ с};$ 3) $T = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \pi \text{ с};$
- 4) $T = 5 \text{ с};$ 5) $T = 10 \text{ с}.$

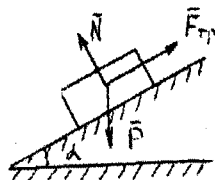
- 1) способы преобразования сил;
- 2) «геометрию движения»;
- 3) законы движения;
- 4) кинематические свойства движений со свойствами сил, обуславливающими эти движения;
- 5) единство внешних факторов-сил.

2.2.26

1. Что изучает динамика?

2. Материальная точка массой 20 г движется согласно уравнениям $x = 4 \cos t$, $y = 3 \cos t$ (x, y - в метрах, t - в с). Определить величину равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.
- 1) $F = 100 \cos t$ Н;
 - 2) $F = 20 \cos t$ Н;
 - 3) $F = 20 \sin t$ Н;
 - 4) $F = 20 \sqrt{16 \sin^2 t + 9}$ Н;
 - 5) $F = 50 \cos t$ Н.
3. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки весом 100 г, если жесткость пружины $C = 200$ Н/см, а материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости
- 1) $A = 5$ см;
 - 2) $A = 10$ см;
 - 3) $A = 38,2$ см;
 - 4) $A = 19,6$ см;
 - 5) $A = 40$ см.
4. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:
 $x = (A + \beta t)e^{-ht}$?
- 1) свободные колебания;
 - 2) затухающие колебания;
 - 3) вынужденные колебания;
 - 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
 - 5) аperiodическое движение.
5. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 400$ Н/см, а возмущающая сила $F = 10 \sin t$ г.
- 1) $A = 0,1$ см;
 - 2) $A = \frac{1}{30}$ см;
 - 3) $A = 30$ см;
 - 4) $A = 10$ см;
 - 5) $A = 3,14$ см.

2.2.27



1. Тело A движется по шероховатой наклонной плоскости (рис. 2.9). Чему равна равнодействующая сил, приложенных к телу A ?

- 1) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$;
- 2) $\vec{R} = \vec{P}$;
- 3) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$;
- 4) $\vec{R} = \vec{F}_{тр}$;
- 5) $\vec{R} = \vec{F}_{тр} + \vec{P} + \vec{N}$.

2. Какие колебания описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad h > k?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону

$$x = (A + \beta t)e^{-ht}$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) аperiodическое движение.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 100 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.

- 1) $T = 10$ с;
- 2) $T = 25$ с;
- 3) $T = 2\sqrt{3}\pi$ с;
- 4) $T = 2\sqrt{5}\pi$ с;
- 5) $T = \frac{2}{\sqrt{5}}\pi$ с.

8. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25 \text{ Н/см}$, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50 \text{ Н·с/см}$?
- 1) свободные колебания;
 - 2) затухающие колебания;
 - 3) вынужденные колебания;
 - 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
 - 5) аperiodическое движение.

8.2.28

1. Что изучает динамика?
- 1) способы преобразования сил;
 - 2) «геометрию движения»;
 - 3) законы движения;
 - 4) кинематические свойства движений со свойствами сил, обуславливающими эти движения;
 - 5) единство внешних факторов-сил.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$x = e^{-ht} (A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - h^2} t) ?$$

($k' > h^2$)

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания (случай резонанса);
- 5) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления.

3. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины 25 Н/см, а возмущающая сила $F = 5 \sin 0,01t$.

- 1) $A = \frac{1}{175} \text{ см}$;
- 2) $A = \frac{1}{168} \text{ см}$;
- 3) $A = 2 \text{ см}$;
- 4) $A = \frac{3}{4} \text{ см}$;
- 5) $A = \frac{5}{24} \text{ см}$.

4. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 100 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20 \text{ Н/см}$.

- 1) $T = 10 \text{ с}$;
- 2) $T = 25 \text{ с}$;
- 3) $T = 2\sqrt{5}\pi \text{ с}$;
- 4) $T = 2\sqrt{3}\pi \text{ с}$;
- 5) $T = 3\sqrt{2}\pi \text{ с}$.

5. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:

$$x + 2hx + k^2x = 0, \quad h < k?$$

- 1) свободные колебания
- 2) затухающие колебания
- 3) вынужденные колебания
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления
- 5) аperiodическое движение

8.2.29

1. Записать дифференциальные уравнения движения в координатной форме

- 1) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$;
- 2) $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$;
- 3) $m\ddot{x} = x$; $m\ddot{y} = y$; $m\ddot{z} = z$;
- 4) $m \frac{dv}{dt} = F_t$; $m \frac{v^2}{\rho} = F_n$; $0 = F_z$;
- 5) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = F_\rho$; $m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = F_\phi$; $m\ddot{z} = F_z$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
$\ddot{x} = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right) + C \sin(pt + \beta)$?	
3. Какие колебания материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение:	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные (случай резонанса); 5) аperiodическое движение.
$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, h > k$?	
4. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 0,6 г, если жесткость пружины $C = 15$ Н/см, а материальная точка была подвешена к недеформированной пружине и отпущена без начальной скорости	1) $A = 40$ см; 2) $A = 39,2$ см; 3) $A = 2$ см; 4) $A = 5$ см; 5) $A = 4$ см.
5. Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а коэффициент сопротивления $\alpha = 50$ Н·с/см?	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
2.2.30.	
1. Материальная точка массой 20 г движется согласно уравнениям $x = 4 \cos t$, $y = 3 \cos t$ (x, y - в метрах, t - в с). Определить величину равнодействующей $\vec{R}$ сил, приложенных к материальной точке.	1) $\vec{R} = 100 \cos t$ Н; 2) $\vec{R} = 20 \sqrt{16 \sin^2 t + 9}$ Н; 3) $\vec{R} = 20 \sin t$ Н; 4) $\vec{R} = 50 \cos t$ Н; 5) $\vec{R} = 20 \cos t$ Н.
2. Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки весом 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а в начальный момент материальная точка была подвешена к недеформируемой пружине и отпущена без начальной скорости	1) $A = 0,35$ см; 2) $A = 4$ см; 3) $A = 0,25$ см; 4) $A = 2$ см; 5) $A = 0,15$ см.
3. Какое движение материальной точки описывает данное дифференциальное уравнение	1) свободные колебания; 2) затухающие колебания; 3) вынужденные колебания; 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления; 5) аperiodическое движение.
$x^2 + k^2x = 0$?	

4. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону

$$x = e^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 320 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.

- 1) $T = 20,41$ с;
- 2) $T = 8\pi$ с;
- 3) $T = 8,56$ с;
- 4) $T = 4\pi$ с;
- 5) $T = 6\pi$ с.

2.2.31

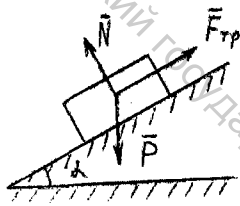


Рисунок 2.10

1. Тело движется по шероховатой наклонной плоскости (рис. 2.10). Чему равна равнодействующая $\vec{R}$ сил, приложенных к телу?

- 1) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P}$;
- 2) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{tr}$;
- 3) $\vec{R} = \vec{P}$;
- 4) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{tr}$;
- 5) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{tr}$.

2. Какое движение совершает материальная точка, если она движется по закону:

$$\ddot{x} = e^{-ht} \left(A \cos \sqrt{k^2 - h^2}t + B \sqrt{k^2 - h^2}t \right) + C \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

3. Какое движение описывает данное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H \sin(pt + \beta)?$$

- 1) свободные колебания;
- 2) затухающие колебания;
- 3) вынужденные колебания;
- 4) вынужденные колебания с учетом сил сопротивления;
- 5) аperiodическое движение.

4. Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 100 г, если жесткость пружины $C = 25$ Н/см, а возмущающая сила $F = 24 \sin 0,01t$ г.

- 1) $A = 2$ см;
- 2) $A = 1$ см;
- 3) $A = 3$ см;
- 4) $A = 4$ см;
- 5) $A = 5$ см.

5. Определить период свободных колебаний материальной точки массой 80 г, которая колеблется на пружине жесткостью $C = 20$ Н/см.

- 1) $T = 4\pi$ с;
- 2) $T = 2\pi$ с;
- 3) $T = 4$ с;
- 4) $T = 2$ с;
- 5) $T = 1$ с.

2.3 Задачи на определение параметров колебательного движения

Задача 1. Груз весом $Q=100 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость пружины $C=10 \text{ Н/см}$, а длина ее в недеформированном состоянии $l=30 \text{ см}$. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_0=45 \text{ см}$, грузу сообщена начальная скорость $v_0=20 \text{ см/с}$, направленная вниз.

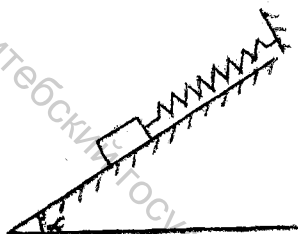


Рисунок 2.11

Задача 2. Тело весом $Q=1 \text{ Н}$ находится на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$. К телу прикрепена пружина (рис. 2.11), жесткость которой $C=0,1 \text{ Н/см}$. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно прикреплено к концу растянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $v_0=10 \text{ см/с}$, направленная вниз по наклонной плоскости.



Рисунок 2.12

Задача 3. Пластина весом $Q=1,96 \text{ Н}$, подвешенная к пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, движется между полосами постоянного магнита (рис. 2.12). Вследствие вихревых токов движение пластинки тормозится силой $F=10^{-6} \mu \Phi^2 v \text{ Н}$, где $\mu=2$, $\Phi=2000 \text{ ед. СИ}$ – магнитный поток и v – скорость пластинки в м/с . Пластинке сообщена начальная скорость $v_0=0,08 \text{ м/с}$, направленная вверх, а пружине, имеющей коэффициент жесткости $C=51,2 \text{ Н/м}$ – начальное удлинение $\lambda_0=0,02 \text{ м}$. Определить уравнение движения пластинки.



Рисунок 2.13

Задача 4. Груз весом $Q=120 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.13). В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0=10 \text{ см}$ от положения статического равновесия и грузу сообщают начальную скорость $v_0=2 \text{ м/с}$, направленную по вертикали вниз. Коэффициент жесткости пружины $C=12 \text{ Н/см}$. Найти уравнение последующего движения груза.

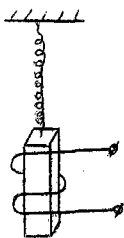


Рисунок 2.14

Задача 5. На пружине, один конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.14), подвешен магнитный стержень весом $Q = 0,98 \text{ Н}$, проходящий через соленоид. По соленоиду течет переменный ток, действующий на стержень с силой $F = H \sin pt$, причем $p = 10 \text{ с}^{-1}$; $H = 8 \text{ Н}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 90 \text{ Н/м}$. Ток идет с момента времени $t_1 = 0$, вытягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Определить вынужденные колебания магнита.

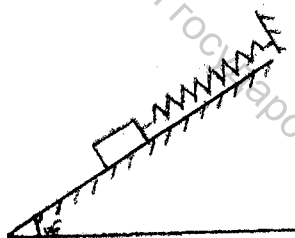


Рисунок 2.15

Задача 6. Груз весом P прикреплен к нижнему концу пружины, расположенной на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45^\circ$, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.15). Статическое удлинение пружины $\lambda_{ст} = 10 \text{ см}$. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 2 \text{ см}$ от положения статического равновесия и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 0$, параллельная линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз. Определить закон движения груза.

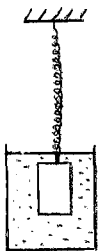


Рисунок 2.16

Задача 7. На пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, подвешена тонкая пластинка весом $Q = 0,98 \text{ Н}$, помещенная в сосуд с жидкостью (рис. 2.16). Сила сопротивления движению пластинки в жидкости $F = 2Sf v$ Н, где v — скорость пластинки в м/с, $S = 0,01 \text{ м}^2$ — площадь пластинки и $f = 80 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 10 \text{ Н/м}$. В начальный момент пружина находилась в положении статического равновесия, а пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 4 \text{ м/с}$, направленная по вертикали вниз. Найти закон движения пластинки.

Задача 8. Груз весом $Q = 200 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость пружины $C = 10 \text{ Н/см}$, а длина ее в недеформированном состоянии $l = 40 \text{ см}$. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_0 = 65 \text{ см}$ и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 10 \text{ см/с}$, направленная вниз.



Рисунок 2.17

Задача 9. Пластинка весом $Q=1,47 \text{ Н}$, подвешенная к пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, движется между полюсами постоянного магнита (рис. 2.17). Вследствие вихревых токов движение пластинки тормозится силой $F=10^{-6} \mu \Phi^2 v \text{ Н}$, где $\mu=0,12$, $\Phi=5000 \text{ ед. СИ}$ – магнитный поток и v – скорость пластинки в м/с . Пластинке сообщена начальная скорость $v_0=0,3 \text{ м/с}$, направленная вверх, а пружине, имеющей коэффициент жесткости $C=15 \text{ Н/м}$ – начальное удлинение $\lambda_0=0,1 \text{ м}$. Определить уравнение движения пластинки.

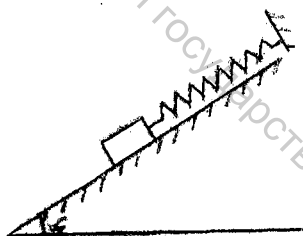


Рисунок 2.18

Задача 10. Тело весом $Q=10 \text{ Н}$ находится на гладкой плоскости с углом наклона $\alpha=45^\circ$. К телу прикреплен пружина (рис. 2.18), жесткость которой $C=1 \text{ Н/см}$. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $v_0=0$, направленная вниз по наклонной плоскости.



Рисунок 2.19

Задача 11. Груз весом $Q=100 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.19). В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0=5 \text{ см}$ от положения статического равновесия и грузу сообщают начальную скорость $v_0=0,2 \text{ м/с}$, направленную по вертикали вниз. Коэффициент жесткости пружины $C=5 \text{ Н/см}$. Найти уравнение последующего движения груза.

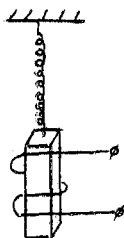


Рисунок 2.20

Задача 12. На пружине, один конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.20), подвешен магнитный стержень весом $Q=1,96 \text{ Н}$, проходящий через соленоид. По соленоиду течет переменный ток, действующий на стержень с силой $F=H \sin pt$, причем $p=15 \text{ с}^{-1}$; $H=8 \text{ Н}$. Коэффициент жесткости пружины $C=125 \text{ Н/м}$. Ток идет с момента времени $t_1=0$, втягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Определить вынужденные колебания магнита.

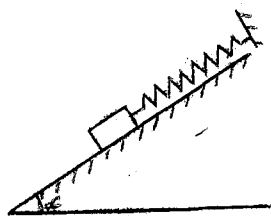


Рисунок 2.21

Задача 13. Груз весом P прикреплен к нижнему концу пружины, расположенной на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.21). Статическое удлинение пружины $\lambda_{ст} = 10$ см. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 5$ см от положения статического равновесия и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 21$ см/с, параллельная линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз. Определить закон движения груза.

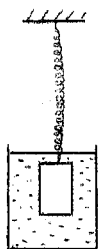


Рисунок 2.22

Задача 14. На пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, подвешена тонкая пластинка весом $Q = 1,47$ Н, помещенная в сосуд с жидкостью (рис. 2.22). Сила сопротивления движению пластинки в жидкости $F = 2Sf v$ Н, где v – скорость пластинки в м/с, $S = 0,05$ м² – площадь пластинки и $f = 150$ Н·с/м. Коэффициент жесткости пружины $C = 135$ Н/м. В начальный момент пружина находилась в положении статического равновесия, а пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 3$ м/с, направленная по вертикали вниз. Найти закон движения пластинки.

Задача 15. Груз весом $Q = 40$ Н подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость пружины $C = 4$ Н/см, а длина ее в недеформированном состоянии $l_1 = 20$ см. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_0 = 35$ см и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 20$ см/с, направленная вниз.

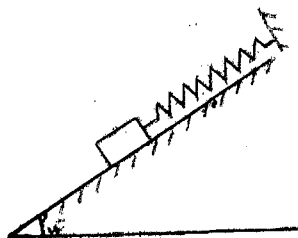


Рисунок 2.23

Задача 16. Тело весом $Q = 100$ Н находится на гладкой плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$. К телу прикреплен пружина (рис. 2.23), жесткость которой $C = 5$ Н/см. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $v_0 = 0$, направленная вниз по наклонной плоскости.



Рисунок 2.24



Рисунок 2.25

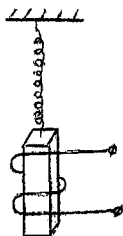


Рисунок 2.26

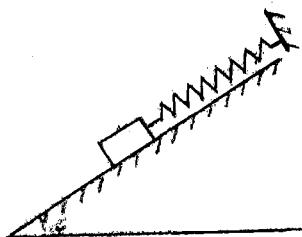


Рисунок 2.27

Задача 17. Пластинка весом $Q = 0,96 \text{ Н}$, подвешенная к пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, движется между полюсами постоянного магнита (рис. 2.24). Вследствие вихревых токов движение пластинки тормозится силой $F = 10^{-6} \mu \Phi^2 v \text{ Н}$, где $\mu = 0,12$, $\Phi = 5000 \text{ ед. СИ}$ — магнитный поток и v — скорость пластинки в м/с . Пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 0,3 \text{ м/с}$, направленная вверх, а пружине, имеющей коэффициент жесткости $C = 15 \text{ Н/м}$, — начальное удлинение $\lambda_0 = 0,1 \text{ м}$. Найти уравнение движения пластинки.

Задача 18. Груз весом $Q = 200 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.25). В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 10 \text{ см}$ от положения статического равновесия. Грузу сообщают начальную скорость $v_0 = 0,1 \text{ м/с}$, направленную по вертикали вниз. Жесткость пружины $C = 10 \text{ Н/см}$. Найти уравнение последующего движения груза.

Задача 19. На пружине, один конец которой закреплен неподвижно, подвешен магнитный стержень весом $Q = 4,9 \text{ Н}$, проходящий через соленоид (рис. 2.26). По соленоиду течет переменный ток, действующий на стержень с силой $F = H \sin pt$, причем $p = 14 \text{ с}^{-1}$; $H = 32 \text{ Н}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 162 \text{ Н/м}$. Ток идет с момента времени $t_1 = 0$, втягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Определить вынужденные колебания магнита.

Задача 20. Груз весом P прикреплен к нижнему концу пружины, расположенной на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$, верхний конец пружины закреплен неподвижно (рис. 2.27). Статическое удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}} = 10 \text{ см}$. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 2 \text{ см}$ от положения статического равновесия и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 49 \text{ см/с}$, параллельная линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз. Определить закон движения груза.

Задача 21. Груз весом $Q = 400 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость пружины $C = 20 \text{ Н/см}$, а длина ее в недеформированном состоянии $l_1 = 50 \text{ см}$. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_0 = 75 \text{ см}$ и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 30 \text{ см/с}$, направленная вниз.

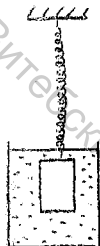


Рисунок 2.28

Задача 22. На пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, подвешена тонкая пластинка весом $Q = 2,45 \text{ Н}$, помещенная в сосуд с жидкостью (рис. 2.28). Сила сопротивления движению пластинки в жидкости $F = 2Sf\nu$ Н , где ν – скорость пластинки в м/с , $S = 0,04 \text{ м}^2$ – площадь пластинки и $f = 200 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 256 \text{ Н/м}$. В начальный момент пружина находилась в положении статического равновесия, а пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 4 \text{ м/с}$, направленная по вертикали вниз. Найти закон движения пластинки.

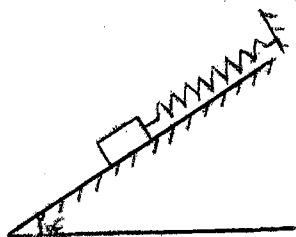


Рисунок 2.29

Задача 23. Тело весом $Q = 200 \text{ Н}$ находится на гладкой плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. К телу прикреплен пружина (рис. 2.29), жесткость которой $C = 10 \text{ Н/см}$. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $v_0 = 20 \text{ см/с}$, направленная вниз по наклонной плоскости.



Рисунок 2.30

Задача 24. Груз весом $Q = 50 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.30). В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 1,5 \text{ см}$ от положения статического равновесия и грузу сообщают начальную скорость $v_0 = 0,28 \text{ м/с}$, направленную по вертикали вниз. Коэффициент жесткости пружины $C = 10 \text{ Н/см}$. Найти уравнение последующего движения груза.



Рисунок 2.31

Задача 25. Пластинка весом $Q = 4,9 \text{ Н}$, подвешенная к пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, движется между полюсами постоянного магнита (рис. 2.31). Вследствие вихревых токов движение пластинки тормозится силой $F = 10^{-6} \mu \Phi^2 v \text{ Н}$, где $\mu = 0,125$, $\Phi = 12000 \text{ ед. СИ}$ – магнитный поток и v – скорость пластинки в м/с . Пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 0,2 \text{ м/с}$, направленная вверх, а пружине, имеющей коэффициент жесткости $C = 72 \text{ Н/см}$ – начальное удлинение $\lambda_0 = 0,1 \text{ м}$. Определить уравнение движения пластинки.

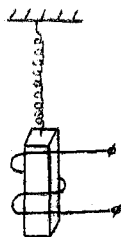


Рисунок 2.32

Задача 26. На пружине, один конец которой закреплен неподвижно, подвешен магнитный стержень весом $Q = 1,47 \text{ Н}$, проходящий через соленоид (рис. 2.32). По соленоиду течет переменный ток, действующий на стержень с силой $F = H \sin pt$, причем $p = 30 \text{ с}^{-1}$; $H = 15 \text{ Н}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 60 \text{ Н/м}$. Ток идет с момента времени $t = 0$, вытягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Определить вынужденные колебания магнита.

Задача 27. Груз весом $Q = 400 \text{ Н}$ подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость пружины $C = 20 \text{ Н/см}$, а длина ее в недеформированном состоянии $l_1 = 50 \text{ см}$. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_0 = 75 \text{ см}$ и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 30 \text{ см/с}$, направленная вниз.

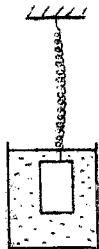


Рисунок 2.33

Задача 28. На пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, подвешена тонкая пластина весом $Q = 3,92 \text{ Н}$, помещенная в сосуд с жидкостью (рис. 2.33). Сила сопротивления движению пластинки в жидкости $F = 2Sf v \text{ Н}$, где v – скорость пластинки в м/с , $S = 0,05 \text{ м}^2$ – площадь пластинки и $f = 160 \text{ Н·с/м}$. Коэффициент жесткости пружины $C = 250 \text{ Н/м}$. В начальный момент пружина находилась в положении статического равновесия, а пластинке сообщена начальная скорость $v_0 = 4 \text{ м/с}$, направленная по вертикали вниз. Найти закон движения пластинки.

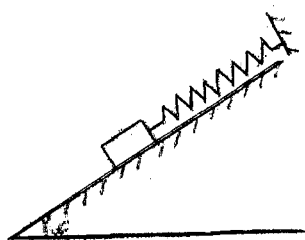


Рисунок 2.34

Задача 29. Груз весом P прикреплен к нижнему концу пружины, расположенной на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45^\circ$, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.34). Статическое удлинение пружины $\lambda_{ст} = 14$ см. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0 = 4$ см от положения статического равновесия и грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 14$ см/с, параллельная линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз. Определить закон движения груза.

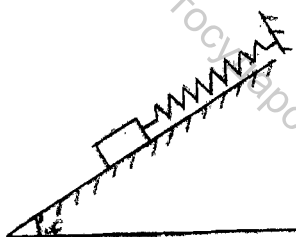


Рисунок 2.35

Задача 30. Тело весом $Q = 5$ Н находится на гладкой плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. К телу прикреплена пружина (рис. 2.35), жесткость которой $C = 1$ Н/см. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $v_0 = 10$ см/с, направленная вниз по наклонной плоскости.

Глава 3

ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Что называют центром масс механической системы?
2. По каким формулам определяются координаты центра масс?
3. Как читается теорема о движении центра масс?
4. Как записывается теорема о движении центра масс в векторной форме?
5. Как записывается теорема о движении центра масс в проекциях на оси координат?
6. В каком случае скорость центра масс остается постоянной?
7. В каком случае проекция скорости центра масс на ось остается постоянной?
8. В каком случае координата центра масс остается постоянной?
9. Можно ли в формулы динамики подставлять относительные скорости, ускорения и перемещения?
10. Можно ли в формулы динамики подставлять абсолютные скорости, ускорения и перемещения?
11. В каких задачах динамики можно применять теорему о движении центра масс?
12. В каких задачах динамики целесообразно применять закон о сохранении скорости движения центра масс?
13. В каких задачах динамики целесообразно применять закон о сохранении положения центра масс?

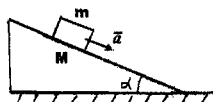


Рисунок 3.1

14. Вычислите силу трения, удерживающую призму от горизонтального перемещения (рис. 3.1)

15. Вычислите давление призмы на горизонтальную поверхность (рис. 3.1).

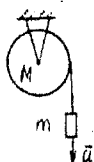
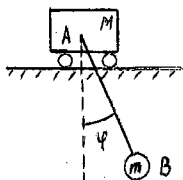


Рисунок 3.2

16. Вычислите вертикальную реакцию оси блока (рис. 3.2)



$$AB = l$$

$$\varphi = \sin \omega t$$

Рисунок 3.3

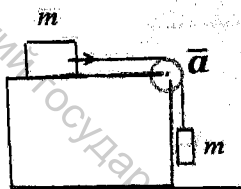


Рисунок 3.4

17. Вычислите давление тележки на горизонтальную поверхность (рис. 3.3) при максимальном угле φ .

18. Вычислите давление тележки на горизонтальную поверхность (рис. 3.3) при $\varphi = 0$.

19. Вычислите горизонтальную составляющую реакции оси блока (рис. 3.4), если коэффициент трения между телами m и M равен f , а ускорение $\bar{a}$ предполагается найденным.

20. Вычислите вертикальную составляющую реакции шарнира блока (рис. 3.4).

21. Вычислите нормальное давление призмы M на горизонтальную поверхность (рис. 3.4).

22. Вычислите силу трения, удерживающую призму M от горизонтального перемещения (рис. 3.4), если трение между телами m и M отсутствует.

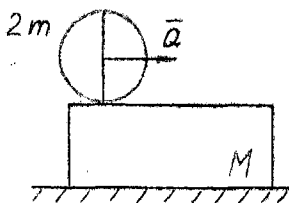


Рисунок 3.5

23. Вычислите силу трения от горизонтального перемещения призмы M (рис. 3.5).

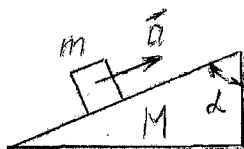


Рисунок 3.6

24. Вычислите силу трения, удерживающую от горизонтального перемещения призму M (рис. 3.6).

3.6). 25. Вычислите давление призмы M на горизонтальную поверхность (рис.

Тестовый контроль

1. $M\vec{a}_c = \Sigma \vec{P}_k^e$.

2. $\Sigma P_{kx}^e = 0$.

3. Если $V_c \neq 0$.

4. Если $\Sigma P_k^e = 0$.

5. Геометрическая точка.

6. Нельзя.

7. Если $V_c = 0$.

8. При определении динамических реакций.

9. $x_c = \Sigma m_k x_k / M$; $y_c = \Sigma m_k y_k / M$; $z_c = \Sigma m_k z_k / M$; $M = \Sigma m_k$.

10. $m\ddot{x} = \Sigma P_{kx}^e$; $m\ddot{y} = \Sigma P_{ky}^e$; $m\ddot{z} = \Sigma P_{kz}^e$.

11. $V_{ax} = 0$.

12. Центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

13. Можно.

14. $(M + m)g - ml\omega^2 \sin \alpha$.

15. $(M + m)g - ma \sin \alpha$.

16. $m(g - a)$.

17. $2ma$.

18. $ma \cos \alpha$.

19. $(M + m)g + ma \cos \alpha$.

20. $ma \sin \alpha$.

21. $(M + m)g + ml\omega^2$.

22. ma .

23. $ma + mgf$.

24. $(M + m)g - ma$.

25. $(M + 2m)g - ma$.

Предлагаются следующие варианты наборов вопросов (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	Вопросы
1	1, 10, 15
2	2, 11, 16
3	3, 12, 17
4	4, 13, 18
5	5, 9, 19
6	6, 2, 20
7	7, 4, 21
8	8, 11, 22

3.2 Программированные задачи

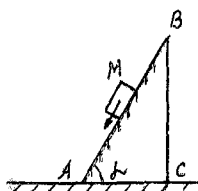


Рисунок 3.7

Задача 1. Призма ABC весом $Q=100\text{ Н}$ лежит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.7), причем грань AB призмы образует с этой плоскостью угол $\alpha = 60^\circ$. На грани AB призмы находится груз M весом $P=150\text{ Н}$, который под действием внутренних сил системы начинает двигаться по AB согласно уравнению $BM = S = 0,2(t^3 + t)$ м. Определить абсолютную скорость груза через $t_1 = 2\text{ с}$ после начала движения.

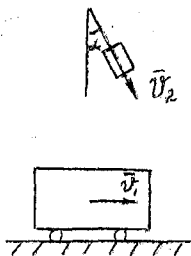


Рисунок 3.8

Задача 2. В вагонетку весом $P=13\text{ кН}$, движущуюся по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 2\text{ м/с}$, попадает груз весом $P=1\text{ кН}$ со скоростью $v_2 = 20\text{ м/с}$, образующей с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3.8). Пренебрегая трением, найти скорость вагонетки после попадания в нее этого куса.

Задача 3. На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, весом $P = 500 \text{ Н}$, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении, на какое расстояние должен переместиться второй человек весом $P = 700 \text{ Н}$ для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м . Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Задача 4. Буксирный пароход весом $Q = 6 \cdot 10^6 \text{ Н}$ приобрел скорость $v = 1,5 \text{ м/с}$, после чего натянулся буксирный канат, и баржа весом $P = 4 \cdot 10^6 \text{ Н}$ тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравниваются.

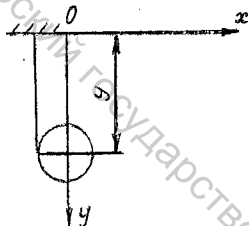


Рисунок 3.9

Задача 5. Однородный круглый цилиндр весом $P = 150 \text{ Н}$ обмотан канатом, верхний конец которого закреплен неподвижно (рис. 3.9). Под действием собственного веса центр тяжести этого цилиндра перемещается по вертикали вниз по закону $y_c = \left(\frac{qt^2}{4} + 2R \right) \text{ см}$,

$R = \text{const}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Определить натяжение каната.

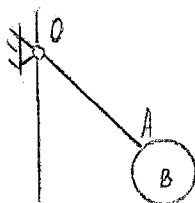


Рисунок 3.10

Задача 6. Определить главный вектор количества движения маятника (рис. 3.10), состоящего из однородного стержня OA весом $P = 10 \text{ Н}$ длиной $5r$ и однородного диска B весом $Q = 20 \text{ Н}$, радиуса r , если угловая скорость в данный момент равна $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, $r = 10 \text{ см}$.

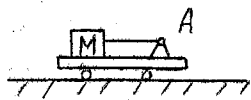


Рисунок 3.11

Задача 7. Груз M весом $P = 20 \text{ кН}$, лежащий на краю железнодорожной платформы (рис. 3.11), передвигается лебедкой, расположенной на другом конце платформы. Радиус барабана лебедки $r = 0,1 \text{ м}$ его угловое ускорение $\varepsilon = 5 \text{ с}^{-2}$, начальная угловая скорость равна нулю. Вес платформы вместе с лебедкой $Q = 250 \text{ кН}$. Определить величину перемещения платформы через $t = 3 \text{ с}$ после начала передвижения груза.

Задача 8. Лодка с пассажирами общим весом $P_0 = 6000 \text{ Н}$ движется относительно берега со скоростью $v_0 = 0,05 \text{ м/с}$. В некоторый момент один из пассажиров весом $P_1 = 650 \text{ Н}$ прыгает в воду со скоростью $v = 1,5 \text{ м/с}$ в направлении, противоположном направлению движения лодки. Какова станет скорость лодки, если пренебречь сопротивлением воды?

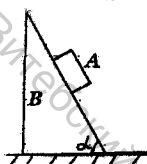


Рисунок 3.12

Задача 9. Груз A весом $P_A = 100 \text{ Н}$ лежит на наклонной плоскости клина B весом $P_B = 400 \text{ Н}$, расположенной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (рис. 3.12). В начальный момент система находилась в покое, затем груз A начал скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью $v = 5 \text{ м/с}$. Определить скорость движения клина B . Силой трения скольжения клина о горизонтальную плоскость пренебречь.

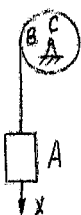


Рисунок 3.13

Задача 10. Груз A весом $P_1 = 98 \text{ Н}$ подвешен к концу каната, намотанного на шкив весом $P_2 = 196 \text{ Н}$ (рис. 3.13). При этом груз A под действием собственного веса перемещается по вертикали вниз по закону $x = gt^2/3 \text{ м}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Определить вертикальную реакцию в точке O .

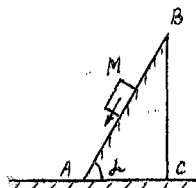


Рисунок 3.14

Задача 11. Призма ABC весом $Q = 200 \text{ Н}$ лежит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.14), причем грань AB призмы образует с этой плоскостью угол $\alpha = 45^\circ$. На грани AB призмы находится груз M весом $P = 300 \text{ Н}$, который под действием внутренних сил системы начинает двигаться по AB согласно уравнению $BM = S = 0,1(t^3 + t) \text{ м}$. Определить абсолютную скорость груза через $t_1 = 1 \text{ с}$ после начала движения.

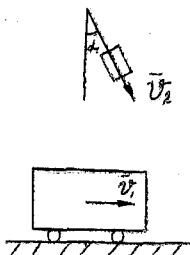


Рисунок 3.15

Задача 13. На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, весом $P_1 = 600 \text{ Н}$, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении, на какое расстояние должен переместиться второй человек весом $P_2 = 700 \text{ Н}$ для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м . Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

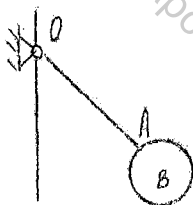


Рисунок 3.16

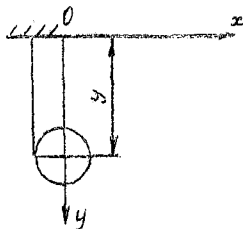


Рисунок 3.17

Задача 12. В вагонетку весом $P_1 = 20 \text{ кН}$, движущуюся по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 1 \text{ м/с}$, попадает груз весом $P_2 = 2 \text{ кН}$ со скоростью $v_2 = 30 \text{ м/с}$, образующей с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 3.15). Пренебрегая трением, найти скорость вагонетки после попадания в нее этого куска.

Задача 14. Определить главный вектор количества движения маятника (рис. 3.16), состоящего из однородного стержня OA весом $P = 20 \text{ Н}$ длиной $5r$ и однородного диска B весом $Q = 40 \text{ Н}$, радиуса r , если угловая скорость в данный момент равна $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$, $r = 5 \text{ см}$.

Задача 15. Однородный круглый цилиндр весом $P = 200 \text{ Н}$ обмотан канатом, верхний конец которого закреплен неподвижно (рис. 3.17). Под действием собственного веса центр тяжести этого цилиндра перемещается по вертикали вниз по закону $y_c = \left(\frac{qt^2}{10} + 2R \right) \text{ см}$, $R = \text{const}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Определить натяжение каната.

Задача 16. Буксирный пароход весом $Q = 8 \cdot 10^6 \text{ Н}$ приобрел скорость $v = 2 \text{ м/с}$, после чего натянулся канат, и баржа весом $P = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}$ тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравниваются.

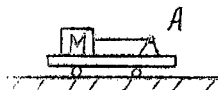


Рисунок 3.18

Задача 17. Груз M весом $P=10 \text{ кН}$, лежащий на краю железнодорожной платформы, передвигается лебедкой A , расположенной на другом конце платформы (рис. 3.18). Радиус барабана лебедки $r=0,2 \text{ м}$ его угловое ускорение $\varepsilon=4 \text{ с}^{-2}$, начальная угловая скорость равна нулю. Вес платформы вместе с лебедкой $Q=250 \text{ кН}$. Определить величину перемещения платформы через $t=2 \text{ с}$ после начала передвижения груза.

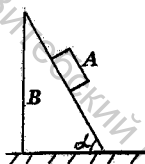


Рисунок 3.19

Задача 18. Груз A весом $P_A=50 \text{ Н}$ лежит на наклонной плоскости клина B весом $P_B=200 \text{ Н}$, расположенной под углом $\alpha=45^\circ$ к горизонту (рис. 3.19). В начальный момент система находилась в покое, затем груз A начал скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью $v=4 \text{ м/с}$. Определить скорость движения клина B . Силой трения скольжения клина о горизонтальную плоскость пренебречь.



Рисунок 3.20

Задача 19. Груз A весом $P_1=49 \text{ Н}$ подвешен к концу каната, намотанного на шкив весом $P_2=196 \text{ Н}$ (рис. 3.20). При этом груз A под действием собственного веса перемещается по вертикали вниз по закону $x=gt^3/4 \text{ м}$, $g=9,81 \text{ м/с}^2$. Определить вертикальную реакцию в точке O .

Задача 20. Лодка с пассажирами общим весом $P_0=800 \text{ Н}$ движется относительно берега со скоростью $v_0=0,04 \text{ м/с}$. В некоторый момент один из пассажиров весом $P_1=700 \text{ Н}$ прыгает в воду со скоростью $v=2 \text{ м/с}$ в направлении, противоположном направлению движения лодки. Какова станет скорость лодки, если пренебречь сопротивлением воды?

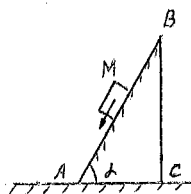


Рисунок 3.21

Задача 21. Призма ABC весом $Q=100 \text{ Н}$ лежит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.21), причем грань AB призмы образует с этой плоскостью угол $\alpha=30^\circ$. На грани AB призмы находится груз M весом $P=200 \text{ Н}$, который под действием внутренних сил системы начинает двигаться по AB согласно уравнению $S=0,2t^3 \text{ м}$. Определить абсолютную скорость груза через $t_1=3 \text{ с}$ после начала движения.

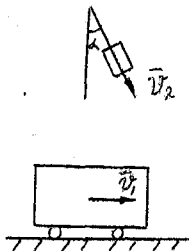


Рисунок 3.22

Задача 22. В вагонетку весом $P_1 = 30 \text{ кН}$, движущуюся по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 30 \text{ м/с}$, попадает груз весом $P_2 = 3 \text{ кН}$ со скоростью $v_2 = 20 \text{ м/с}$, образующей с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ (рис. 3.22). Пренебрегая трением, найти скорость вагонетки после попадания в нее этого куска.

Задача 23. На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, весом $P_1 = 600 \text{ Н}$, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек весом $P_2 = 800 \text{ Н}$ для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м . Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

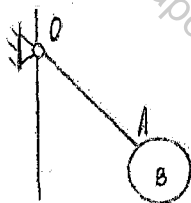


Рисунок 3.23

Задача 24. Определить главный вектор количества движения маятника (рис. 3.23), состоящего из однородного стержня OA весом $P_1 = 10 \text{ Н}$ длиной $5r$ и однородного диска B весом $P_2 = 50 \text{ Н}$, радиуса r , если угловая скорость в данный момент равна $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$, $r = 8 \text{ см}$.

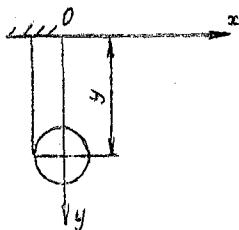


Рисунок 3.24

Задача 25. Однородный круглый цилиндр весом $P = 300 \text{ Н}$ обмотан канатом, верхний конец которого закреплен неподвижно (рис. 3.24). Под действием собственного веса центр тяжести этого цилиндра перемещается по вертикали вниз по закону $y_c = (9qt^2 + 2R) \text{ см}$, $R = \text{const}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Определить натяжение каната.

Задача 26. Буксирный пароход весом $Q = 5 \cdot 10^6 \text{ Н}$ приобрел скорость $v = 1,6 \text{ м/с}$, после чего натянулся буксирный канат, и баржа весом $P = 3 \cdot 10^6 \text{ Н}$ тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравновешиваются.

Задача 27. Лодка с пассажирами общим весом $P_0 = 7000 \text{ Н}$ движется относительно берега со скоростью $v_0 = 0,65 \text{ м/с}$. В некоторый момент один из

пассажира весом $P_1 = 600 \text{ Н}$ прыгает в воду со скоростью $v = 1,5 \text{ м/с}$ в направлении, противоположном направлению движения лодки. Какова станет скорость лодки, если пренебречь сопротивлением воды?

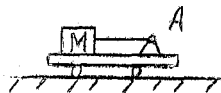


Рисунок 3.25

Задача 28. Груз M весом $P = 30 \text{ кН}$, лежащий на краю железнодорожной платформы, передвигается лебедкой A , расположенной на другом конце платформы (рис. 3.25). Радиус барабана лебедки $r = 0,1 \text{ м}$ его угловое ускорение $\varepsilon = 3 \text{ с}^{-2}$, начальная угловая скорость равна нулю. Вес платформы вместе с лебедкой $Q = 300 \text{ кН}$. Определить величину перемещения платформы через $t = 4 \text{ с}$ после начала передвижения груза.

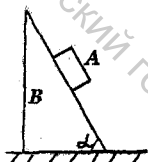


Рисунок 3.26

Задача 29. Груз A весом $P_A = 200 \text{ Н}$ лежит на наклонной плоскости клина B весом $P_B = 400 \text{ Н}$, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 3.26). В начальный момент система находилась в покое, затем груз A начал скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью $v = 6 \text{ м/с}$. Определить скорость движения клина B . Силой трения скольжения клина о горизонтальную плоскость пренебречь.



Рисунок 3.27

Задача 30. Груз A весом $P_1 = 49 \text{ Н}$ подвешен к концу каната, намотанного на шкив весом $P_2 = 196 \text{ Н}$ (рис. 3.27). При этом груз A под действием собственного веса перемещается по вертикали вниз по закону $x = gt^2/4 \text{ м}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Определить вертикальную реакцию в точке O .

Глава 4

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

4.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Какой величиной (векторной или скалярной) является количество движения материальной точки?
2. Какой величиной (векторной или скалярной) является проекция количества движения материальной точки на ось?
3. Как определить количество движения механической системы?
4. Как определить проекцию количества движения механической системы на ось?
5. Как читается теорема об изменении количества движения материальной точки?
6. Как читается теорема об изменении количества движения механической системы?
7. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения материальной точки в векторной форме.
8. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось OX .
9. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения механической системы в векторном виде.
10. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения механической системы в проекции на ось OX .
11. Что называется элементарным импульсом силы?
12. Что называется импульсом системы сил?
13. Как вычислить импульс постоянной силы за промежуток времени t ?
14. В каком случае количество движения системы не изменяется?
15. В каком случае проекция количества движения системы постоянна?
16. По какой формуле вычисляется количество движения твердого тела с использованием понятия центра масс системы?
17. Чему равно количество движения твердого тела, вращающегося вокруг центральной оси (проходящей через центр масс)?
18. В каком случае импульс системы сил равен нулю?
19. В каком случае проекция импульса системы сил на ось равна нулю?
20. Запишите формулу Эйлера для вычисления силы давления струи на неподвижную преграду.

21. В каких задачах динамики целесообразно применить теорему об изменении количества движения?

22. Вычислите скорость спускающегося по наклонной гладкой плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту груза через 20 с после начала движения.

23. Определите проекцию импульса силы тяжести массы 2 кг на ось, с которой сила тяжести составляет угол 60° , за время 20 с.

24. На какую ось проекция импульса силы тяжести равна нулю?

25. На какую ось проекция импульса нормальной реакции спускающегося по наклонной плоскости груза равна нулю?

Тестовый контроль

1. Вдоль наклонной плоскости.

2. Векторная.

3. По формуле $\sum m_k \vec{v}_k$.

4. Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

5. $\vec{q} - \vec{q}_0 = \sum \vec{S}(P_k)$.

6. $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}(\vec{P}_k^*)$.

7. Векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени.

8. По формуле $\vec{S} = \vec{P}t$.

9. $\sum S_x(\vec{P}_k^*) = 0$.

10. Нуль.

11. $\vec{R} = 0$ или $\vec{R} \perp OX$ ($\vec{R}$ — главный вектор системы сил).

12. Действующие силы постоянны или зависят только от времени. В число данных и искомых величин входят: действующие силы, время движения, начальная и конечная скорости точки.

13. 196,2.

14. Скалярная.

15. По формуле $\sum q_{kx}$.

16. Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

17. $q_x - q_{0x} = \sum S_x(\vec{P}_k)$.

$$18. Q_x - Q_{ox} = \Sigma S_x(\vec{P}_k^*).$$

19. Геометрическая сумма импульсов системы сил.

$$20. \Sigma \vec{S}(\vec{P}_k^*) = 0.$$

21. По формуле $m\vec{v}_c$.

22. $\vec{R} = 0$ ($\vec{R}$ – главный вектор системы сил).

$$23. \vec{R} = \rho \pi d^2 U^2 / 4.$$

24. 98,1.

25. Горизонтальная.

5.1 Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. По какой формуле вычисляется осевой момент инерции сплошного однородного диска массы m и радиуса R ?
2. По какой формуле вычисляется осевой момент инерции тонкого кольца массы m и радиуса R ?
3. По какой формуле определяется момент инерции относительно центральной оси однородного стержня длины l и массы m ?
4. По какой формуле определяется осевой момент инерции относительно центральной оси, проходящей через конец однородного стержня массы m и длины l ?
5. Запишите формулу Штейнера-Гюйгенса для вычисления осевого момента инерции относительно оси, параллельной центральной.
6. По какой формуле вычисляется момент количества движения материальной точки?
7. По какой формуле вычисляется кинетический момент механической системы?
8. Как записывается теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра в векторной форме?
9. Как записывается теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси, проходящей через неподвижный центр?
10. Как вычисляется кинетический момент твердого тела относительно оси вращения?
11. В каком случае кинетический момент системы относительно неподвижного центра постоянен по величине и направлению?
12. В каком случае проекция кинетического момента системы на ось, проходящую через неподвижную точку, постоянна?
13. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.
14. Напишите уравнение равнопеременного вращения твердого тела.
15. Запишите дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

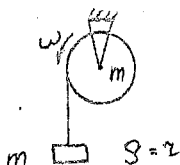


Рисунок 5.1

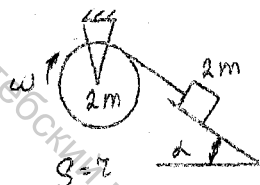


Рисунок 5.2

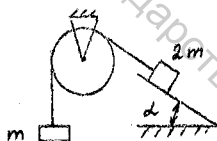


Рисунок 5.3

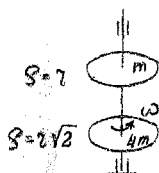


Рисунок 5.4

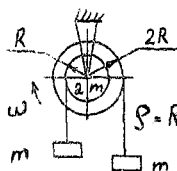


Рисунок 5.5

16. Определите кинетический момент системы (рис. 5.1) относительно неподвижной оси.

17. Определите кинетический момент системы (рис. 5.2) относительно неподвижной оси.

18. Определите кинетический момент системы (рис. 5.3) относительно неподвижной оси.

19. Определите кинетический момент системы (рис. 5.4) относительно неподвижной оси.

20. Определите кинетический момент системы (рис. 5.5) относительно неподвижной оси.

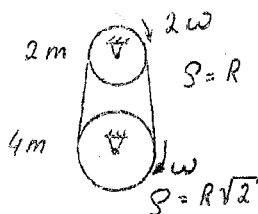


Рисунок 5.6

21. Определите кинетический момент меньшего диска системы (рис. 5.6).

22. Определите кинетический момент большего диска (рис. 5.6).

23. Определите кинетический момент системы (рис. 5.6).

24. Определите угловое ускорение вращения диска (рис. 5.1).

25. Определите угловое ускорение вращения диска (рис. 5.2).

Тестовый контроль

1. $g \sin \alpha / 2r$.
2. По формуле $mR^2 / 2$.
3. По формуле $ml^2 / 12$.
4. $J = J_c + mcl^2 / 2$.
5. По формуле $\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$.
6. $dL_z / dt = \sum m_k (\vec{P}_k^e)$.
7. $g / 2r$.
8. $\sum m_k (P_k^e) = const$.
9. $m\ddot{x}_c = \sum P_{kx}; m\ddot{y}_c = \sum P_{ky}; J_c \ddot{\varphi} = \sum m_k (\vec{P}_k^e)$.
10. $12mR^2 \omega$.
11. $4mR^2 \omega$.
12. $2mr^2 \omega$.
13. $4mr^2 \omega$.
14. По формуле mR^2 .
15. По формуле $ml^2 / 3$.
16. По формуле $\vec{r} \times m\vec{v}$.
17. $3mr^2 \omega$.
18. $9mr^2 \omega$.
19. $7mR^2 \omega$.
20. $8mR^2 \omega$.

$$21. d\vec{L}_0 / dt = \Sigma \vec{m}_0 (\vec{P}_k^e).$$

$$22. L_z = J_z \omega.$$

$$23. \Sigma m_i (\vec{P}_k^e) = 0.$$

$$24. \Sigma \vec{m}_0 (\vec{P}_k^e) = 0.$$

$$25. J_z \ddot{\phi} = \Sigma_i (\vec{P}_k^e).$$

Предлагаются следующие варианты наборов вопросов (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	Вопросы
1	1, 6, 16
2	2, 7, 17
3	3, 8, 18
4	4, 9, 19
5	5, 10, 20
6	6, 11, 21
7	7, 12, 22
8	8, 13, 23
9	9, 14, 24
10	10, 15, 25

5.2 Программированные задачи

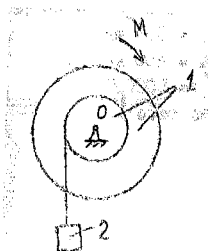


Рисунок 5.7

Задача 1. Массы тел: $m_1 = 250$ кг, $m_2 = 400$ кг (рис. 5.7). Радиус инерции тела 1 $\rho = 30$ см. Радиус малого диска $r = 20$ см. Движущий момент $M = 2500$ Нм. Используя теорему об изменении кинетического момента, найти угловое ускорение тела 1.

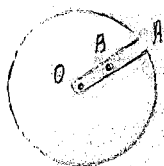


Рисунок 5.8

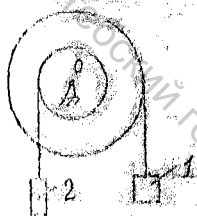


Рисунок 5.9

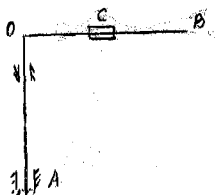


Рисунок 5.10

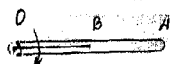


Рисунок 5.11

Задача 2. Однородный круглый диск радиуса $R = 50$ см и массы $M = 200$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 5$ с⁻¹ вокруг неподвижной вертикальной оси O , перпендикулярной к его плоскости (рис. 5.8). В диске имеется прямолинейный канал OA , внутри которого находится шарик B массой $m = 10$ кг. Сначала шарик находится в середине канала и привязан нитью к точке O . В некоторый момент нить пережигают, и шарик начинает двигаться вдоль канала. Найти угловую скорость диска в момент, когда шарик достигает точки A .

Задача 3. Два шкива радиусами $r_1 = 30$ см и $r_2 = 15$ см жестко соединены между собой, образуют ступенчатый шкив, ось вращения которого горизонтальна (рис. 5.9). На шкивы намотаны нити, к концам которых подвешены грузы с массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 10$ кг, момент инерции шкива относительно оси вращения $J = 0,1$ кг·м². Определить угловое ускорение шкива.

Задача 4. Стержень, имеющий форму прямого угла AOB , может вращаться вокруг своей вертикальной стороны AO . На горизонтальную сторону его свободно насажен груз C , рассматриваемый как материальная точка массой $m = 100$ кг. В начальный момент груз находится на расстоянии $a = 10$ см от точки O , и система имеет угловую скорость $\omega = 4$ с⁻¹ вокруг оси OA . Найти угловую скорость, когда груз переместится на расстояние $OC = 30$ см, если стержень имеет момент инерции относительно оси OA $J = 2$ кг·м².

Задача 5. Горизонтальная трубка весом P и длиной $l = 50$ см вместе с шариком B , находящимся в ней на расстоянии $a = 20$ см от конца O и привязанным нитью к этому концу, сначала вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью, затем нить перерезают (рис. 5.11). Определить угловую скорость вращения трубки в тот момент, когда шарик вылетает из нее, если вес его равен $P = 5$ Н. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен $J = 0,4$ кг·м².

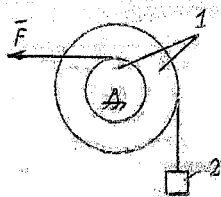


Рисунок 5.12

Задача 6. Дано: радиус малого шкива $r_1 = 15$ см; радиус большого шкива $R = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 15$ см; масса тела 1 $m_1 = 200$ кг, масса тела $m_2 = 300$ кг, движущая сила $F = 600$ Н (рис. 5.12). Найти угловое ускорение тела 1.



Рисунок 5.13

Задача 7. Однородная круглая горизонтальная платформа (рис. 5.13) радиуса $R = 3$ м и весом $P_1 = 1500$ Н вращается вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через ее центр, с угловой скоростью $\omega_0 = 3$ с⁻¹. В некоторый момент по рельсовому пути, представляющему собой окружность радиуса $r = 1$ м, начинает двигаться тележка M весом $P_2 = 1000$ Н со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы в сторону, противоположную вращению. Найти угловую скорость платформы, считая тележку материальной точкой.

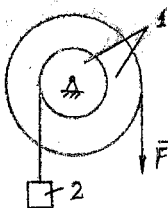


Рисунок 5.14

Задача 8. Дано: радиус большого шкива $R_1 = 30$ см; радиус малого шкива $r_1 = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 20$ см; масса тела 1 $m_1 = 200$ кг, масса тела $m_2 = 300$ кг, движущая сила $F = 4000$ Н (рис. 5.14). Найти угловое ускорение тела 1.

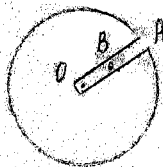


Рисунок 5.15

Задача 9. Однородный круглый диск радиуса $R = 40$ см и массы $M = 300$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 5$ с⁻¹ вокруг неподвижной вертикальной оси O , перпендикулярной к его плоскости (рис. 5.15). В диске имеется прямолинейный канал OA , внутри которого находится шарик B массой $m = 50$ кг. Сначала шарик находится в середине канала и привязан нитью к точке O . В некоторый момент нить пережигают, и шарик начинает двигаться вдоль канала. Найти угловую скорость диска в момент, когда шарик достигает точки A .

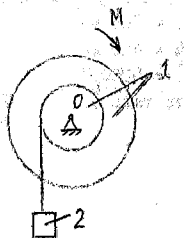


Рисунок 5.16

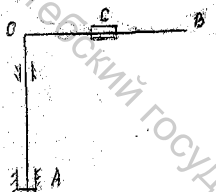


Рисунок 5.17

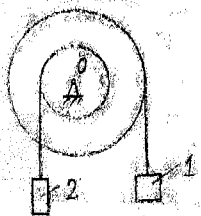


Рисунок 5.18



Рисунок 5.19

Задача 10. Массы тел: $m_1 = 200$ кг, $m_2 = 300$ кг (рис. 5.16). Радиус инерции тела 1 $\rho = 20$ см. Радиус малого диска $r = 15$ см. Движущий момент $M = 1000$ Нм. Используя теорему об изменении кинетического момента, найти угловое ускорение тела 1.

Задача 11. Стержень, имеющий форму прямого угла AOB , может вращаться вокруг своей вертикальной стороны AO (рис. 5.17). На горизонтальную сторону его свободно насажен груз C , рассматриваемый как материальная точка массой $m = 150$ кг. В начальный момент груз находится на расстоянии $a = 20$ см от точки O , и система имеет угловую скорость $\omega_0 = 4$ с⁻¹ вокруг оси OA . Найти угловую скорость, когда груз переместится на расстояние $OC = 50$ см, если стержень имеет момент инерции относительно оси OA $J = 5$ кг·м².

Задача 12. Два шкива радиусами $r_1 = 20$ см и $r_2 = 30$ см, жестко соединенные между собой, образуют ступенчатый шкив, ось вращения которого горизонтальна (рис. 5.18). На шкивы намотаны нити, к концам которых подвешены грузы массами $m_1 = 15$ кг и $m_2 = 10$ кг, момент инерции шкива относительно оси вращения $J = 0,2$ кг·м². Определить угловое ускорение шкива.

Задача 13. Горизонтальная трубка весом P и длиной $l = 40$ см вместе с шариком B , находящимся в ней на расстоянии $a = 30$ см от конца O и привязанным нитью к этому концу, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 6$ с⁻¹, затем нить перерезают (рис. 5.19). Найти угловую скорость вращения трубки в момент, когда шарик вылетает из нее, если вес его равен $P = 10$ Н. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен $J = 0,5$ кг·м².

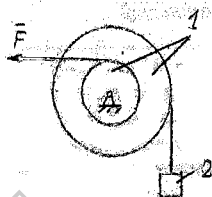


Рисунок 5.20

Задача 14. Дано: радиус малого шкива $r_1 = 15$ см; радиус большого шкива $R_2 = 30$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 25$ см; масса тела 1 $m_1 = 300$ кг, масса тела 2 $m_2 = 400$ кг, движущая сила $F = 6000$ Н (рис. 5.20). Найти угловое ускорение тела 1.

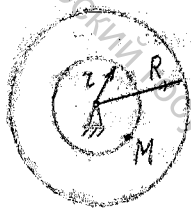


Рисунок 5.21

Задача 15. Однородная круглая горизонтальная платформа радиуса $R = 4$ м и весом $P_1 = 2000$ Н вращается вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 5.21), проходящей через ее центр, с угловой скоростью $\omega_0 = 5$ с⁻¹. В некоторый момент по рельсовому пути, представляющему собой окружность радиуса r , начинает двигаться тележка M весом $P_2 = 500$ Н со скоростью $v = 4$ м/с относительно платформы в сторону, противоположную вращению. Найти угловую скорость платформы, считая тележку материальной точкой.

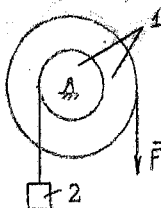


Рисунок 5.22

Задача 16. Дано: радиус большого шкива $R_1 = 40$ см; радиус малого шкива $r_1 = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 30$ см; масса тела 1 $m_1 = 300$ кг, масса тела 2 $m_2 = 400$ кг, движущая сила $F = 5000$ Н (рис. 5.22). Найти угловое ускорение тела 1.

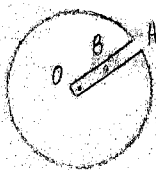


Рисунок 5.23

Задача 17. Однородный круглый диск радиуса $R = 60$ см и массы $M = 200$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 4$ с⁻¹ вокруг неподвижной вертикальной оси O , перпендикулярной к его плоскости (рис. 5.23). В диске имеется прямолинейный канал OA , внутри которого находится шарик B массой $m = 50$ кг. Сначала шарик находится в середине канала и привязан нитью к точке O . В некоторый момент нить пережигают, и шарик начинает двигаться вдоль канала. Найти угловую скорость диска в момент, когда шарик достигает точки A .

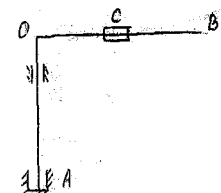


Рисунок 5.24

Задача 18. Стержень, имеющий форму прямого угла AOB , может вращаться вокруг своей вертикальной стороны AO (рис. 5.24). На горизонтальную сторону его свободно насажен груз C , рассматриваемый как материальная точка массой $m = 100$ кг. В начальный момент груз находится на расстоянии $a = 20$ см от точки O , и система имеет угловую скорость $\omega_0 = 5$ с⁻¹ вокруг оси OA . Найти угловую скорость, когда груз переместится на расстояние $OC = 30$ см, если стержень имеет момент инерции относительно оси OA $J = 4$ кг·м².

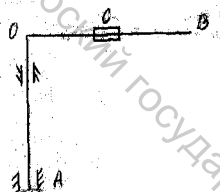


Рисунок 5.25

Задача 19. Массы тел: $m_1 = 300$ кг, $m_2 = 400$ кг (рис. 5.25). Радиус инерции тела 1 $\rho = 30$ см. Радиус малого диска $r = 15$ см. Движущий момент $M = 1500$ Нм. Используя теорему об изменении кинетического момента, найти угловое ускорение тела 1.

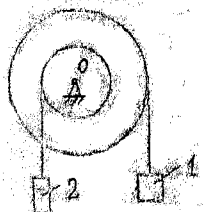


Рисунок 5.26

Задача 20. Два шкива радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см, жестко соединенные между собой, образуют ступенчатый шкив, ось вращения которого горизонтальна (рис. 5.26). На шкивы намотаны нити, к концам которых подвешены грузы массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 10$ кг, момент инерции шкива относительно оси вращения $J = 0,3$ кг·м². Определить угловое ускорение шкива.

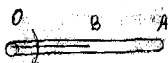


Рисунок 5.27

Задача 21. Горизонтальная трубка весом P и длиной $l = 60$ см вместе с шариком B , находящимся в ней на расстоянии $a = 20$ см от конца O и привязанным нитью к этому концу, сначала вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 4$ с⁻¹, затем нить перерезают (рис. 5.27). Определить угловую скорость вращения трубки в тот момент, когда шарик вылетает из нее, если вес его равен $P = 8$ Н. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен $J = 0,3$ кг·м².

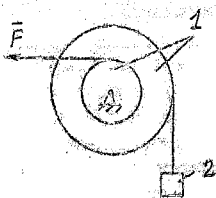


Рисунок 5.28

Задача 22. Дано: радиус малого шкива $r_1 = 10$ см; радиус большого шкива $R_1 = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 10$ см; масса тела 1 $m_1 = 200$ кг, масса тела 2 $m_2 = 300$ кг, движущая сила $F = 8000$ Н (рис. 5.28). Найти угловое ускорение тела 1.



Рисунок 5.29

Задача 23. Однородная круглая горизонтальная платформа радиуса $R = 5$ м и весом $P = 2000$ Н вращается вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 5.29), проходящей через ее центр, с угловой скоростью $\omega_0 = 4$ с⁻¹. В некоторый момент по рельсовому пути, представляющему собой окружность радиуса $r = 3$ м, начинает двигаться тележка M весом $P_2 = 1000$ Н со скоростью $v = 3$ м/с относительно платформы в сторону, противоположную вращению. Найти угловую скорость платформы, считая тележку материальной точкой.

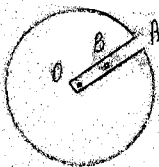


Рисунок 5.30

Задача 24. Однородный круглый диск радиуса $R = 50$ см и массы $M = 400$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 3$ с⁻¹ вокруг неподвижной вертикальной оси O , перпендикулярной к его плоскости (рис. 5.30). В диске имеется прямолинейный канал OA , внутри которого находится шарик B массой $m = 100$ кг. Сначала шарик находится в середине канала и привязан нитью к точке O . В некоторый момент нить пережигают, и шарик начинает двигаться вдоль канала. Найти угловую скорость диска в момент, когда шарик достигает точки A .

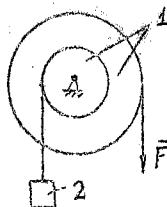


Рисунок 5.31

Задача 25. Дано: радиус большого шкива $R_1 = 40$ см; радиус малого шкива $r = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 30$ см; масса тела 1 $m_1 = 300$ кг, масса тела 2 $m_2 = 500$ кг, движущая сила $F = 6000$ Н (рис. 5.31). Найти угловое ускорение тела 1.

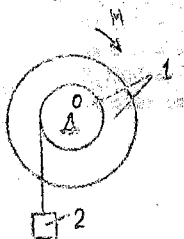


Рисунок 5.32

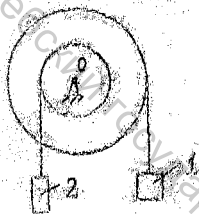


Рисунок 5.33

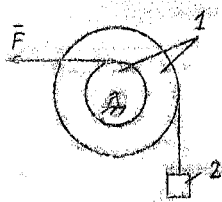


Рисунок 5.34

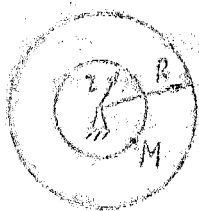


Рисунок 5.35

Задача 26. Массы тел: $m_1 = 300$ кг, $m_2 = 500$ кг. Радиус инерции тела 1 $\rho = 40$ см. Радиус малого диска $r = 30$ см (рис. 5.32). Движущий момент $M = 1500$ Н·м. Используя теорему об изменении кинетического момента, найти угловое ускорение тела 1.

Задача 27. Два шкива радиусами $r_2 = 10$ см и $r_1 = 15$ см, жестко соединенные между собой, образуют ступенчатый шкив, ось вращения которого горизонтальна (рис. 5.33). На шкивы намотаны нити, к концам которых подвешены грузы массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг, момент инерции шкива относительно оси вращения $J = 0,05$ кг·м². Определить угловое ускорение шкива.

Задача 28. Дано: радиус малого шкива $r_1 = 10$ см; радиус большого шкива $R_1 = 20$ см; радиус инерции тела 1 $\rho = 15$ см; масса тела 1 $m_1 = 100$ кг, масса тела 2 $m_2 = 200$ кг, движущая сила $F = 5000$ Н (рис. 5.34). Найти угловое ускорение тела 1.

Задача 29. Однородная круглая горизонтальная платформа радиуса $R = 5$ м и весом $P_1 = 2000$ Н вращается вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 5.35), проходящей через ее центр, с угловой скоростью $\omega_0 = 4$ с⁻¹. В некоторый момент по рельсовому пути, представляющему собой окружность радиуса $r = 3$ м, начинает двигаться тележка M весом $P_2 = 1000$ Н со скоростью $v = 3$ м/с относительно платформы в сторону, противоположную вращению. Найти угловую скорость платформы, считая тележку материальной точкой.

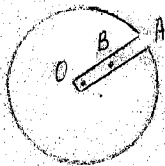


Рисунок 5.36

Задача 30. Однородный круглый диск радиуса $R = 50$ см и массы $M = 400$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 3$ с⁻¹ вокруг неподвижной вертикальной оси O , перпендикулярной к его плоскости (рис. 5.36). В диске имеется прямолинейный канал OA , внутри которого находится шарик B массой $m = 100$ кг. Сначала шарик находится в середине канала и привязан нитью к точке O . В некоторый момент нить пережигают, и шарик начинает двигаться вдоль канала. Найти угловую скорость диска в момент, когда шарик достигает точки A .

5.3 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

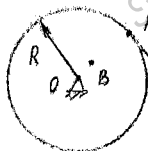


Рисунок 5.37

Задача 1. Точка A , лежащая на шкиве радиуса $R = 25$ см, движется со скоростью 50 см/с (рис. 5.37). Определить угловую скорость ω шкива и скорость точки B ($AB = 20$ см).

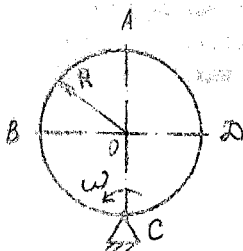


Рисунок 5.38

Задача 2. Диск радиуса R вращается вокруг оси, проходящей через точку C (рис. 5.38). Скорость точки A равна v . Определить угловую скорость диска и скорости точек B , D и O .

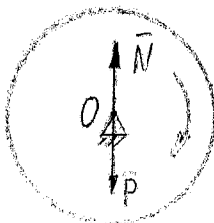


Рисунок 5.39

Задача 3. С каким угловым ускорением будет вращаться маховик весом 200 кг, если к нему приложен вращающий момент $M_{\varphi} = 100$ Нм (рис. 5.39). Радиус инерции маховика $i = 0,5$ м.

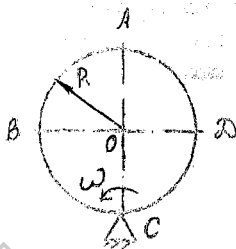


Рисунок 5.40

Задача 4. Однородный диск массой $m = 50$ кг с радиусом $R = 1$ м вращается под действием момента $M_{вр} = 150$ Н (рис. 5.40). Определить тангенциальное ускорение точки A , B и O .

Задача 5. Какой вращающий момент $M_{вр}$ необходимо приложить к однородному тонкому стержню длиной l и весом P , чтобы привести его во вращение с угловым ускорением ε вокруг центральной оси, перпендикулярной стержню?

Задача 6. Маховик с осевым моментом инерции $J = 150$ кг·м² разгоняется из состояния покоя при действии постоянного вращающего момента $M_{вр} = 75$ Н·м. Пренебрегая сопротивлением, установить время, необходимое для достижения маховиком заданной частоты вращения $n = 1500$ об/мин.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номером рисунка является цифра от 0 до 9. Номера условий (тоже от 0 до 9) проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1 , l_1 , r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2 , l_2 , r_2 — тела 2 и т. д. Аналогично, v_B , a_B означают скорость и ускорение точки B; v_C , a_C — точки C; ω_1 , ε_1 — угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2 , ε_2 — тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

При решении задач все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

Глава 6

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

6.1 Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Эта задача относится ко второй основной задаче динамики точки и заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся матери-

альной точке, массе этой точки, и начальным условиям ее движения, начальному положению и начальной скорости, требуется определить закон движения этой точки. Задачи рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Изобразить материальную точку в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке.
3. Выбрать систему координат. Начало координат системы следует помещать в начальном положении точки и оси координат направлять так, чтобы координаты точки в текущий момент и проекции скорости ее на эти оси были положительными.
4. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки. При этом следует помнить, что в полученных дифференциальных уравнениях проекции всех сил необходимо выразить через те переменные, от которых эти силы зависят.
5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения движения точки. Способ интегрирования уравнений зависит от их вида.
6. Составить начальные условия движения по тексту задачи.
7. Используя начальные условия движения, определить произвольные постоянные интегрирования.
8. Найденные произвольные постоянные подставить в результат интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.
9. Воспользовавшись полученным уравнением движения материальной точки, определить искомые величины.

Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (пара) на участке AB , а затем на участке BC . При решении задачи следует учесть изложенный выше план решения задач.

6.1.1 Пример 1

Дано: $m = 5 \text{ кг}$, $v_0 = 20 \text{ м/с}$, $R = \mu v^2 \text{ Н}$, $\mu = 0,4 \text{ кг/м}$, $t_1 = 1,5 \text{ с}$, $k = 12 \text{ Н}$, $f' = 0$, $\alpha = 30^\circ$, $F_x = k \sin 2\omega t$, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, $t = 1 \text{ с}$.

Определить: $x = f(t)$, где $x = BD$, x_1 , v .

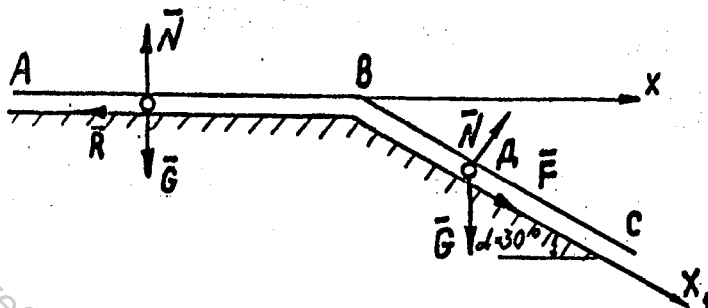


Рисунок 6.1

Рассмотрим движение шара на участке AB . Принимаем шар за материальную точку, покажем действующие на него силы: силу тяжести $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу сопротивления $\vec{R}$ (рис. 6.1). Выбираем систему координат AX в соответствии с планом решения задачи. Составим дифференциальное уравнение движения шара на участке AB с учетом пункта 4 рекомендованного плана решения задачи.

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx} = -R = -\mu\dot{x}^2,$$

$$5\ddot{x} = -0,4\dot{x}^2, \quad \ddot{x} = -0,08\dot{x}^2.$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -0,08\dot{x}^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -0,08 \int dt; \quad \int \dot{x}^{-2} dx = -0,08 \int dt.$$

$$\frac{\dot{x}^{-1}}{-1} = -0,08t + C_1; \quad -\frac{1}{\dot{x}} = -0,08t + C_1.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи: при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$. При $t = 0$ полученное выше равенство можно записать в виде $-\frac{1}{v_0} = C_1$. Отсюда $C_1 = -\frac{1}{20} = -0,05$.

Тогда $-\frac{1}{\dot{x}} = -0,08t - 0,05$; следовательно, скорость шара на участке AB определится из выражения $\dot{x} = \frac{1}{0,08t + 0,05}$.

Зная время движения t_1 на участке AB , определим, какую скорость $\dot{x} = v_B$ будет иметь шар в точке B ,

$$v_B = \frac{1}{0,08 \cdot 1 + 0,05} = 5,9 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение шара на участке BC . На шар в соответствии с условиями задачи действуют силы: сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{F}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Выбираем систему координат Bx_1 .

Составим дифференциальное уравнение движения шара на участке BC : $m\ddot{x}_1 = \Sigma F_{kx} = G \sin \alpha + F_x = mg \sin 30^\circ + k \sin 2\omega t$. Разделив обе части равенства на

$$m, \text{ можно записать } \ddot{x}_1 = 9,8 \sin 30^\circ + \frac{12}{5} \sin 2 \cdot 2 \cdot t = 4,9 + 2,4 \sin 4t, \text{ или}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 4,9 + 2,4 \sin 4t. \quad \text{Разделяя переменные и интегрируя}$$

$$\int dx_1 = \int 4,9 dt + \int 2,4 \sin 4t dt, \text{ получим } \dot{x}_1 = 4,9t + \frac{2,4}{4} (-\cos 4t) + C_2.$$

Это равенство можно представить в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = 4,9t + 0,6 \cos 4t + C_2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, $\int dx_1 = \int 4,9t dt - \int 0,6 \cos 4t dt + \int C_2 dt$, получим $x_1 = 4,9 \frac{t^2}{2} - \frac{0,6}{4} \sin 4t + C_2 t + C_3$. Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия на участке BC : при $t=0$ $x_0=0$, $x_0 = v_B$. Тогда при $t=0$ $v_B = 5,9 = 0 - 0,6 + C_2$, откуда $C_2 = 6,5$.

Аналогично при $t=0$ и $x_1 = x_0 = 0$ имеем $0 = C_3$, или $C_3 = 0$. Подставив C_2 и C_3 в уравнения для определения скорости и закона движения на участке BC , получим

$$\dot{x}_1 = 4,9t - 0,6 \cos 4t + 6,5, \quad x_1 = 2,45t^2 - 0,15 \sin 4t + 6,5t.$$

Тогда искомые скорость v и расстояние x_1 от точки B шара при $t=1$ с

$$v = \dot{x}_1 = 4,9 - 0,6 \cos 4 + 6,5 = 4,9 - 0,6(-0,658) + 6,5 = 11,79 \text{ м/с,}$$

$$x_1 = 2,45 - 0,15 \sin 4 + 6,5 = 2,45 - 0,15(-0,759) + 6,5 = 10,09 \text{ м.}$$

Следовательно, окончательно закон движения шара на участке BC $x_1 = 2,45t^2 - 0,15 \sin 4t + 6,5t$, скорость $v = 4,79$ м/с, расстояние от точки B $x_1 = 10,09$ м.

6.1.2 Пример 2

Груз D массой m , получив в точке A начальную скорость v_0 , движется в изогнутой трубе ABC , расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. 6.2, табл. 6.1).

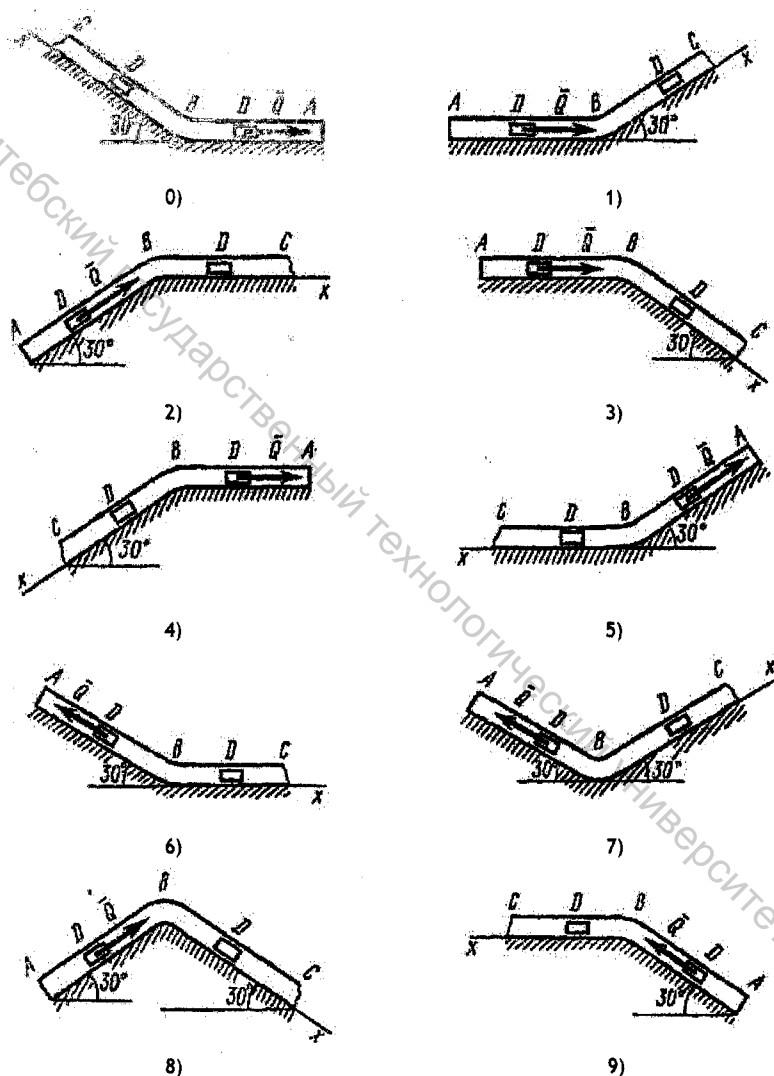


Рисунок 6.2

Таблица 6.1

Номер условия	m , кг	v_0 , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_0 , с	F_x , Н
0	2	20	6	$0,4v$	—	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	—	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5v$	—	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	—	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	—	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	—	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	—	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	—	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	—	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	—	$-6\sin(4t)$

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0,2$) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B , найти закон движения груза на участке BC , т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB , учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B . Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC . После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B , и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x , учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

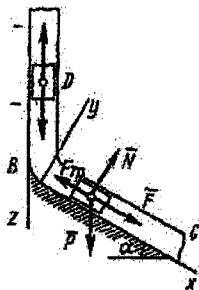


Рисунок 6.3

Пример решения. На вертикальном участке AB трубы (рис. 6.3) на груз D массой m действуют: сила тяжести и сила сопротивления $\bar{R}$; расстояние от точки A , где $v = v_0$, до точки B равно l . На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0,4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2,5$ м, $F_x = 16 \sin(4t)$. Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке BC .

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$ и $\bar{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } mv_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (6.1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$mv \frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v \frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (6.2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}, n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (6.3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тогда уравнение (6.2) можно представить в виде

$$2v \cdot \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \quad (6.4)$$

Разделяя в уравнении (6.4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \quad (6.5)$$

По начальным условиям при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$ и из равенства (6.5) находим $\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$ или $\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}. \quad (6.6)$$

Полагая в равенстве (6.6) $z = l = 2,5$ м и заменяя k и n их значениями (6.3), определим скорость v_B груза в точке B ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2,7$):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40,7 \text{ и } v_B = 6,4 \text{ м/с}. \quad (6.7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC ; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении), и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx :

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{тр}x} + F_x$$

или

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F_x, \quad (6.8)$$

где $F_{\text{тр}} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By . Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg \cos \alpha$, откуда $N = mg \cos \alpha$. Следовательно, $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha$; кроме того, $F_x = 16 \sin(4t)$ и уравнение (6.8) примет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t). \quad (6.9)$$

Разделив обе части равенства на m , вычислим $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (6.9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3,2 + 8 \sin(4t). \quad (6.10)$$

Умножая обе части уравнения (6.10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 3,2t - 2\cos(4t) + C_2. \quad (6.11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B , считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (6.7). Подставляя эти величины в (6.11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (6.11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2\cos(4t) + 8,4. \quad (6.12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1,6t^2 - 0,5\sin(4t) + 8,4t + C_3. \quad (6.13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5\sin(4t), \quad (6.14)$$

где x — в метрах, t — в секундах.

6.2 Относительное движение и колебания материальной точки

Задачу на относительное движение и колебания материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Разложить «абсолютное» движение материальной точки (груза) на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с подвижной средой (лифтом), совершающей переносное движение.

2. Изобразить материальную точку (груз) в текущий момент времени.

3. Изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке.

4. Определить ускорение материальной точки в переносном движении $\vec{a}_e$, ускорение Кориолиса $\vec{a}_k$, найти силу инерции в переносном движении $\vec{\Phi}_e$, кориолисову силу инерции $\vec{\Phi}_k$. (Здесь определять $\vec{a}_k$ и $\vec{\Phi}_k$ не требуется, так как переносное движение подвижной системы отсчета, связанной с лифтом, является поступательным). Добавить эти силы (здесь силу $\vec{\Phi}_e$) инерции к силам $\vec{F}_k$, приложенным к материальной точке.

5. Составить дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат.

6. Проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения движения.

7. Составить начальные условия движения и определить постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения.

8. Найденные произвольные постоянные подставить в результат интегрирования уравнений и получить закон движения точки (груза).

Учитывая, что груз совершает вынужденные колебания, при определении закона его движения целесообразно также учитывать следующее.

При выборе системы отсчета, начало отсчета следует взять в положении статического равновесия материальной точки (груза). Материальную точку следует всегда изображать в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, и предположить, что точка движется в сторону возрастания координаты.

При составлении дифференциального уравнения следует воспользоваться условием статического равновесия материальной точки. Это приводит к уничтожению постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения движения.

Проводя решение задачи в общем виде, следует определить численные значения коэффициентов дифференциального уравнения, так как вид частного решения уравнения зависит от соотношения между круговыми частотами вынужденных и свободных колебаний, т.е. между p и k .

Так, интегрируя дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при отсутствии силы сопротивления $\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$ надо:

1. При отсутствии резонанса, т.е. при $p \neq k$ записать частное решение x_2 в виде $x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta)$ (очевидно, что $B = 0$).

2. При наличии резонанса, т.е. при $p = k$, искать частное решение x_2 в виде $x_2 = At \sin(pt + \delta) + Bt \cos(pt + \delta)$.

Интегрируя дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$, независимо от соотношения между p и k , надо искать частное решение x_2 в виде $x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta)$ или в виде $x_1 = a \sin(pt + \delta - \varepsilon)$, где

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \varepsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Уравнение движения материальной точки в рассмотренных выше случаях будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего дифференциально-

го уравнения; x_2 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решение x_1 при наличии силы сопротивления зависит от соотношений: $n < k$ – случай малого сопротивления; $n > k$ – случай большого сопротивления; $n = k$ – предельный случай.

Искомое дифференциальное уравнение, получаемое студентом при ее решении, зависит от данных условия задачи, выбираемых в соответствии с основными методическими указаниями.

6.2.1 Пример 1

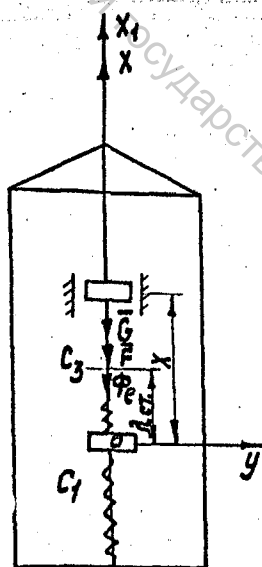


Рисунок 6.4

Дано: $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + a_2 \sin \omega t + a_3 \cos \omega t$ м,
 $m = 1$ кг; $C_1 = 240$ Н/м; $C_3 = 160$ Н/м; $a_1 = a_2 = 0$;
 $a_3 = 0,2$ м; $\omega = 16$ с⁻¹; $\lambda = 0$; $v_0 = 0$.

Определить: закон движения груза по отношению к лифту, $x = x(t)$.

Направим ось x_1 по вертикали вверх вдоль оси симметрии лифта. Ось x направим по вертикали вверх, вдоль оси x_1 (рис. 6.4). Система xOy связана с лифтом, а начало координат O выберем, как это рекомендовано в условии задачи, в положении статического равновесия груза при неподвижном лифте, т.е. в том положении, где вес груза и реакция пружин уравновешиваются.

Груз совершает сложное движение, состоящее из относительного движения по отношению к системе координат xOy , связанной с лифтом, и переносного движения вместе с лифтом по закону

$$x_1 = a_3 \cos \omega t = 0,2 \cos 16t.$$

Основной закон динамики для относительного движения груза (по отношению к лифту) определяется уравнением

$$m\ddot{a}_r = \Sigma F_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k,$$

где ΣF_k – геометрическая сумма сил, действующих на груз, $\vec{\Phi}_e$ – переносная сила инерции, $\vec{\Phi}_k$ – кориолисова сила инерции.

К грузу приложены силы: сила тяжести $\vec{G}$ и реакция пружины $\vec{F}$. Так как реакция пружины $\vec{F}$ пропорциональна ее удлинению, то $F = c(x - \lambda_{cm})$, где c – коэффициент жесткости эквивалентной пружины, а $(x - \lambda_{cm})$ – удлинение эквивалентной пружины, соответствующее положению груза M .

Присоединим к силам, действующим на груз, переносную $\vec{\Phi}_e$ и кориолисову $\vec{\Phi}_k$ силы инерции. Так как переносное движение является поступательным, то кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_k = 0$. Переносная сила инерции груза $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, а по модулю $\Phi_e = ma_e$.

Зная уравнение переносного движения подвижной системы координат, связанной с лифтом $x_e = x_1 = 0,2 \cos 16t$, найдем ее переносную скорость $\dot{x}_e = -0,2 \cdot 16 \sin 16t = -3,2 \sin 16t$ и переносное ускорение $a_e = \ddot{x}_e = -51,2 \cos 16t$.

Считаем, что ускорение $\vec{a}_e$ направлено в сторону оси x_1 , тогда сила инерции $\vec{\Phi}_e$ направлена по вертикали вниз. Зная основной закон динамики относительного движения груза, запишем дифференциальное уравнение его относительного движения вдоль оси x в виде

$$m\ddot{x} = G_x + F_x + \Phi_{ex} = -G - F + \Phi_{ex} = -G - F + (-m\ddot{x}_e) = G - F - m\ddot{x}_e, \text{ или}$$

$$m\ddot{x} = -mg - c(x - \lambda_{cm}) + 51,2 \cos 16t, \quad m\ddot{x} = -mg - cx + \lambda_{cm} + 51,2 \cos 16t.$$

В положении равновесия, в точке O , модуль силы упругости, восстанавливающей силы F , равен весу груза G . Поэтому

$$c\lambda_{cm} = F_{cm} = G = mg, \quad mg = c\lambda_{cm},$$

где c – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. Так как две пружины соединены последовательно, то

$$c = \frac{c_1 \cdot c_3}{c_1 + c_3} = \frac{240 \cdot 160}{400} = 96 \text{ Н/м}.$$

Студенту при решении задачи следует подробнее объяснить, как определяется коэффициент упругости C эквивалентной пружины. С учетом отмеченного можно записать $m\ddot{x} = -cx + 51,2 \cos 16t$, $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{51,2}{m} \cos 16t$, и, так как $m = 1$

кг, то

$$\ddot{x} + 96x = 51,2 \cos 16t \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний груза при отсутствии сопротивления. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение

линейного однородного дифференциального уравнения $\ddot{x} + 96x = 0$, а x_2 – частное решение полного уравнения (6.15).

Для решения уравнения $\ddot{x} + 96x = 0$ составим характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $r^2 + 96 = 0$. Поскольку корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{-96} = \pm 9,8i$ этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми, то общее решение этого уравнения имеет вид и $x_1 = C_1 \cos 9,8t + C_2 \sin 9,8t$.

Частное решение рассматриваемого уравнения (6.15) ищется в виде $x_2 = A \cos 16t$, где A – постоянная величина, которую нужно подобрать так, чтобы равенство (6.15) обратилось в тождество. Найдем $\dot{x}_2 = -16A \sin 16t$ и $\ddot{x}_2 = -256A \cos 16t$.

Подставляя x_2 и $\ddot{x}_2$ в уравнение (6.15), получим

$$-256A \cos 16t + 96A \cos 16t = 51,2 \cos 16t.$$

$$\text{Откуда } A = \frac{51,2}{-256 + 96} = -\frac{51,2}{160} = -0,32.$$

Таким образом, искомое частное решение будет $x_2 = -0,32 \cos 16t$. Так как $x = x_1 + x_2$, то общее решение уравнения (6.15) имеет окончательно вид $x = C_1 \cos 9,8t + C_2 \sin 9,8t - 0,32 \cos 16t$.

Для определения C_1 и C_2 найдем

$$\dot{x} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{x} = -9,8C_1 \sin 9,8t + 9,8C_2 \cos 9,8t + 0,32 \cdot 16 \sin 16t.$$

Используя заданные начальные условия: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x}_0 = v_0 = 0$, определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 . При $t = 0$

$$x_0 = \lambda_{cm} = \frac{mg}{c} = \frac{1,98}{96} = 0,1, \quad x = x_0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 - 0,32 \cdot 1. \quad \text{Тогда } 0,1 = C_1 - 0,32, \quad \text{откуда } C_1 = 0,42.$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = -9,8 \cdot C_1 \cdot 0 + 9,8 \cdot C_2 \cdot 1 + 0,32 \cdot 16 \cdot 0, \quad \text{откуда } C_2 = \dot{x}_0 = v_0 = 0.$$

Подставив C_1 и C_2 , получим $x = 0,42 \cos 9,8t - 0,32 \cos 16t$ м.

6.2.2. Пример 2

Груз 1 массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. 6.5, табл. 6.2). Лифт движется вертикально по закону $z = 0,5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$ (ось z направлена по вертикали вверх; z выражено в метрах, t – в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v – скорость груза по отношению к лифту.

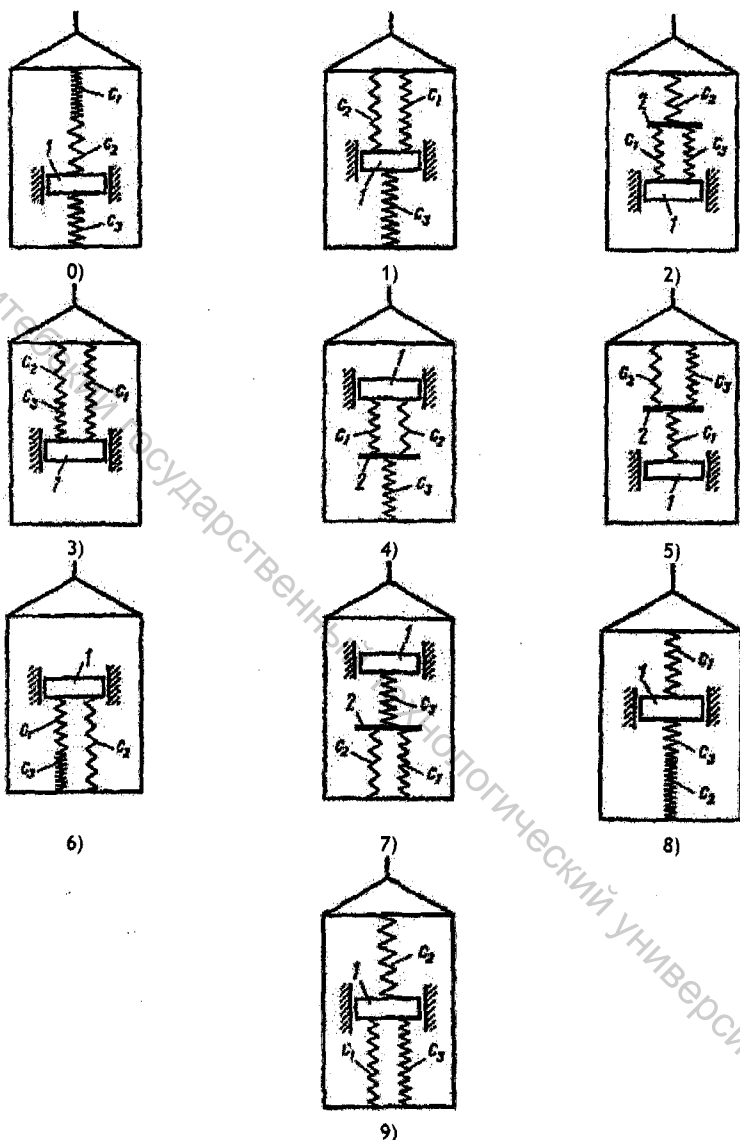


Рисунок 6.5

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т. е. $x = f(t)$; начало координат поместить в точку, где находится прикрепленный к грузу конец пружины, когда пружина не деформирована. При этом во избежание ошибок в знаках направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в по-

положении, при котором $x > 0$, т.е. пружина растянута. При подсчетах можно принять $g = 10 \text{ м/с}^2$. Массой пружин и соединительной планки 2 пренебречь.

Таблица 6.2

Номер условия	m , кг	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	c_3 , Н/м	a , м/с ²	α_1 , м	α_2 , м	φ , 1/с	μ , Н·с/м	λ_0 , м	v_0 , м/с
0	1	300	150	—	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	—	240	120	$-1,5g$	0	0	—	8	0,1	0
2	0,5	—	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	—	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	—	$-g$	0	0	—	6	0,15	0
5	2	—	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	—	120	g	0	0	—	4	0	2
7	0,5	120	—	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	—	0	0	0,2	20	0	0,15	0
9	1	200	—	300	$1,5g$	0	0	—	20	0	3

В таблице 6.2 обозначено: c_1 , c_2 , c_3 — коэффициенты жесткости пружин, λ_0 — удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t = 0$, v_0 — начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1 , c_2 , c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу, или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой 2 конца обеих оставшихся пружин.

Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления R отсутствует.

Указания. Задача охватывает одновременно относительное движение и колебания материальной точки.

Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. Затем прикреплённые к грузу пружины (по условиям задачи их будет две) заменить эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $c_{\text{экв}} = c$, произведя соответствующий расчет.

1. Если пружины соединены друг с другом последовательно (как пружины с жесткостями c_1 и c_2 , вариант 0), то при равновесии под действием некоторой силы $\bar{Q}$, приложенной к свободному концу пружины, усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны Q . Удлинения пружин $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, удлинение эквивалентной пружины $\lambda = Q/c$ и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Отсюда

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

2. Если груз прикреплен к двум параллельным пружинам (как к пружинам с жесткостями c_1 и c_2 , вариант 1) или находится между двумя пружинами, то при равновесии под действием некоторой силы $\bar{Q}$ каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ . Тогда для двух пружин $c_1 \lambda + c_2 \lambda = Q$, а для эквивалентной пружины $c \lambda = Q$, отсюда $c = c_1 + c_2$.

После того как уравнение будет составлено (это будет линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка), его следует проинтегрировать, учтя начальные условия.

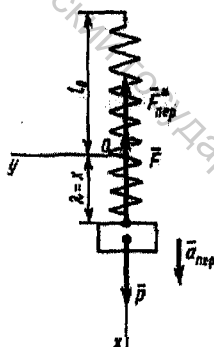


Рисунок 6.6

Пример решения. В приборе для измерения вертикальных колебаний (рис. 6.6) груз массой m прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c . Другой конец пружины прикреплен к корпусу прибора, который движется по закону $z = A \sin(\omega t)$ (неподвижная ось z направлена по вертикали вниз). Начальное удлинение пружины равно λ_0 , а начальная скорость груза по отношению к корпусу прибора v_0 (направлена вертикально вниз).

Дано: $m = 0,4$ кг, $c = 40$ Н/м, $\lambda_0 = 0,05$ м, $v_0 = 0,5$ м/с, $A = 0,03$ м, $\omega = 20$ 1/с. Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза по отношению к корпусу прибора.

Решение. 1. Свяжем с корпусом прибора подвижную систему отсчета, начало O которой поместим в конце недеформированной пружины (ее длина обозначена l_0), а ось x направим в сторону удлинения пружины (см. рис. 6.6). Рассмотрим груз в положении, при котором пружина растянута. На груз действует сила тяжести $\bar{P}$ и сила упругости $\bar{F}$. Для составления уравнения относительно движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $\bar{F}_{пер}^u = -m\bar{a}_{пер}$, кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение (движение корпуса прибора) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид:

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{F}_{пер}^u.$$

Проектируя обе его части на ось x , получим

$$m\ddot{x} = P_x + F_x + F_{перx}^u. \quad (6.16)$$

Здесь $P_x = P$, $F_x = -c\lambda = -cx$, где $\lambda = x$ – удлинение пружины, $F_{\text{перх}}^u = -ma_{\text{перх}}$. Учитывая, что оси x и z направлены одинаково, получим $a_{\text{перх}} = a_{\text{перх}} = \ddot{z} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$ и $F_{\text{перх}}^u = mA\omega^2 \sin(\omega t)$.

Подставляя все найденные выражения проекций сил в уравнение (6.16), получим

$$m\ddot{x} = P - cx + mA\omega^2 \sin(\omega t). \quad (6.17)$$

Дифференциальное уравнение (6.17) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + k^2 x + b_1 + b_2 \sin(\omega t), \quad (6.18)$$

где обозначено

$$k^2 = c/m = 100 \text{ с}^{-2}, \quad b_1 = g = 10 \text{ м/с}^2, \quad b_2 = A\omega^2 = 12 \text{ м/с}^2. \quad (6.19)$$

2. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (6.18). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 + x_2, \quad (6.20)$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т. е.

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \quad (6.21)$$

а x_2 – частное решение уравнения (6.18). Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем x_2 в виде

$$x_2 = B + D \sin(\omega t). \quad (6.22)$$

Для определения постоянных B и D находим $\ddot{x}_2 = -D\omega^2 \sin(\omega t)$, подставляем значения x_2 в уравнение (6.18) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при $\sin(\omega t)$. В результате, принимая во внимание обозначения (6.19), получим

$$B = \frac{b_1}{k^2} = 0,1 \text{ м}, \quad D = \frac{b_2}{k^2 - \omega^2} = -0,04 \text{ м}.$$

Тогда из равенств (6.20) – (6.22), учитывая, что $k = 10 \text{ с}^{-1}$, а $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (6.18):

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0,04 \sin(20t) + 0,1. \quad (6.23)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем еще $v_x = \dot{x}$;

$$v_x = 10C_1 \cos(10t) - 10C_2 \sin(10t) - 0,8 \cos(20t). \quad (6.24)$$

По условиям задачи при $t = 0$ $v_x = x_0 = 0,5$ м/с, $x_0 = \lambda_0 = 0,05$ м. Подставив эти начальные данные в уравнения (6.23) и (6.24), найдем из них, что $C_1 = 0,13$, $C_2 = -0,05$. В результате уравнение (6.23) примет окончательно вид;

$$x = 0,13 \sin(10t) - 0,05 \cos(10t) - 0,04 \sin(20t) + 0,1. \quad (6.25)$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, т. е. закон совершаемых им колебаний.

6.3 Применение теоремы об изменении кинетической энергии точки

Решение задачи с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности.

1. Изобразить материальную точку M (шар) в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке.
3. Составить уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки в виде $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma A_k$.
4. Вычислить сумму работ всех сил, приложенных к материальной точке на ее перемещении.
5. Вычислить кинетическую энергию материальной точки в ее начальном и конечном положениях.
6. Используя результаты вычислений двух предыдущих пунктов, применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить искомую величину.

Теорему об изменении кинетической энергии точки целесообразно применять в тех случаях, когда из четырех величин: сила, совершающая работу, путь точки приложения силы, начальная и конечная скорости точки известны три и нужно определить четвертую.

Для определения силы давления шара на стержень следует:

1. Изобразить шар в том положении, в котором эту силу надо определить; показать на рисунке силы, приложенные к нему.
2. Составить уравнение движения в проекции на главную нормаль к траектории, направленную к центру соответствующей окружности.

3. Определить реакцию стержня, а следовательно, и силу, с которой будет давить шар на стержень в точке D .

6.3.1.Пример

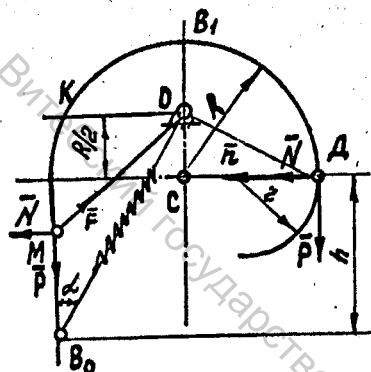


Рисунок 6.7

Дано:

$$l_0 = 0,7R, \quad k = 6, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \gamma = 0, \\ R = 0,5 \text{ м}, \quad r = 0,6R = 0,3 \text{ м}, \quad P, \quad c = k \frac{P}{R}, \\ V_0 = 0 \text{ (рис. 6.7).}$$

Определить: скорость V_D шара в точке D и его давление N в этой точке на стержень.

Для определения скорости в точке D применим теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV_D^2}{2} - \frac{mV_{B_0}^2}{2} = \Sigma A_k, \quad (6.26)$$

где V_D – скорость шара в конечный момент времени в точке D , V_{B_0} – скорость шара в начальный момент времени в точке B_0 . По условию $V_{B_0} = V_0 = 0$.

ΣA_k – сумма работ всех сил, действующих на шар, при его перемещении из точки B_0 в точку D : сила тяжести $\vec{P}$, сила упругости пружины $\vec{F}$ и нормальной реакции стержня $\vec{N}$. Поэтому

$$\Sigma A_k = A_p + A_F + A_N, \quad (6.27)$$

Работа силы тяжести $\vec{P}$ определяется по формуле

$$A_p = \pm Ph,$$

где P – модуль силы тяжести, h – вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

$$\text{Определим } h \text{ из } \triangle OKB_0 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{OK}{KB_0} = \frac{R}{KB_0}, \quad KB_0 = \frac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}R.$$

$$h = KB_0 - \frac{R}{2} = \sqrt{3}R - 0,5R = 1,23R = 0,61 \text{ м.}$$

$$\text{Поэтому } A_p = -Ph = -P \cdot 0,61 = -0,61P.$$

Работа силы упругости A_F определяется по формуле

$$A_F = \frac{C}{2}(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2),$$

где Δl_1 и Δl_2 — начальное и конечное удлинения пружины. Работа будет положительной, когда $|\Delta l_1| > |\Delta l_2|$, т.е. когда конец пружины удаляется от равновесного положения. Определим Δl_1 и Δl_2 . Для этого из $\triangle KB_0O$ определим B_0O ;

$$\sin \alpha = \frac{KO}{B_0O} = \frac{R}{B_0O}, \text{ откуда } B_0O = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R.$$

Начальное удлинение пружины

$$\Delta l_1 = B_0O - l_0 = 2R - 0,7R = 1,3R = 1,3 \cdot 0,5 = 0,65 \text{ м.}$$

По условию задачи шар, достигнув точки B_1 , освобождается от пружины и дальше движется под действием только силы тяжести. Поэтому конечное удлинение пружины

$$\Delta l_2 = l_0 - OB_1 = 0,7R - 0,5R = 0,2R.$$

С учетом Δl_1 и Δl_2 работа силы упругости A_F определится из равенства

$$A_F = 6 \cdot \frac{P}{2 \cdot 0,5} [(0,65)^2 - (0,2)^2] = 6P(0,4225 - 0,04) = 2,295P.$$

Работа нормальной реакции $A_N = 0$, так как реакция $\vec{N}$ направлена по нормали к траектории точки, т.е. перпендикулярно перемещению шара по стержню.

Подставив найденные значения в (6.27), получим

$$\Sigma A_k = -0,61P + 2,295P = 1,685P = 1,685mg.$$

Подставив V_D , V_B и ΣA_k в (6.26), получим

$$\frac{mV_D^2}{2} = 1,685mg; V_D = \sqrt{2 \cdot 1,685g},$$

$$\text{или } V_D = \sqrt{2 \cdot 1,685 \cdot 9,81} = \sqrt{33} = 5,74 \text{ м/с.}$$

Для определения нормальной реакции шара в точке D составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на нормаль n к траектории, направленную к центру окружности радиуса r , т.е. уравнение $\frac{mV_D^2}{\rho} = \Sigma F_n = N$, где радиус кривизны $\rho = r$.

$$\text{Откуда } N = \frac{mV_D^2}{\rho} = \frac{\rho V_D^2}{rg} = \frac{33}{0,3 \cdot 9,8} P = 11,2 P \text{ Н.}$$

Учитывая, что давление $\bar{N}'$ шара на стержень равно по модулю реакции $\bar{N}$ стержня, искомое

$$|\bar{N}'| = |\bar{N}| = 11,2 P \text{ Н.}$$

6.4 Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Теоремой об изменении кинетической энергии удобнее всего пользоваться в тех случаях, когда движущаяся система является неизменяемой, т.е. расстояния между точками системы остаются неизменными (частным случаем такой системы является абсолютно твердое тело). В этом случае теорема позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы, а при идеальных, не изменяющихся со временем связях — и наперед неизвестные реакции внешних связей.

Эту теорему целесообразно применять также в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: действующие силы системы, совершающие работу, начальные и конечные скорости точек или тел системы (линейные и угловые) и их перемещения. Неизвестна какая-нибудь одна величина и ее нужно определить. При этом действующие силы должны быть постоянными или зависеть только от перемещений (расстояний).

Кроме того, эту теорему следует применять для определения ускорения движущихся тел. Для этого составляют, когда положение системы определяется одним параметром, уравнение теоремы на произвольном участке пути с последующим дифференцированием по времени обеих частей полученного равенства.

Решение задачи с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется проводить в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени и показать на рисунке все внешние и внутренние силы, действующие на систему (при неизменяемой системе — только внешние силы).
2. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы.
3. Вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях.
4. Вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы — только сумму работ внешних сил).
5. Воспользовавшись результатами вычислений пунктов 3 и 4 составить уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

6. Из полученного уравнения находим искомые неизвестные величины.

6.4.1. Пример 1

Дано: $m_1 = 0$, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = m_5 = 0$, $m_6 = 2$ кг, $c = 240$ Н/м, $M_0 = 0,3$ Нм, $F = 40(3 + 8s)$ Н, $R_3 = 0,3$ м, $r_3 = 0,1$ м, $\rho_3 = 0,2$ м, $f = 0,1$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0,2$ м (рис. 6.8).

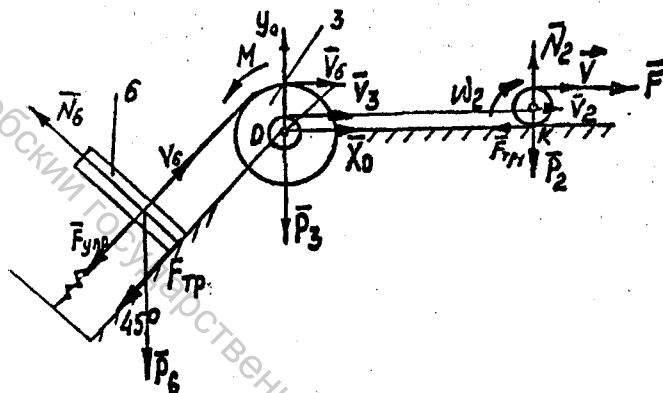


Рисунок 6.8

Определить: угловое ускорение ε_3 ступенчатого шкива 3.

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i.$$

Сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e. \quad (6.28)$$

Здесь изменение кинетической энергии системы при ее перемещении равна сумме работ всех внешних сил системы на этом перемещении.

Кинетическая энергия системы в начальный момент времени $T_0 = 0$, так как система в начальный момент находилась в покое ($v_0 = 0$).

Кинетическая энергия системы в конечный момент времени

$$T_1 = T_2 + T_3 + T_6, \quad (6.29)$$

где T_2 , T_3 , T_6 соответственно кинетические энергии катка 2, ступенчатого шкива 3 и груза 6. Так как движение катка 2 является плоскопараллельным, то его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_2 = T_{2\text{вр}} + T_{2\text{пост}},$$

$$\text{где } T_{2\text{пост}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2; T_{2\text{вр}} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2.$$

Момент инерции J_2 катка 2 относительно оси, перпендикулярной плоскости катка и проходящей через его центр, определяется из равенства

$$J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}, \text{ так как тело 2 является сплошным однородным цилиндром.}$$

Так как каток катится без скольжения, то скорость точки касания его с неподвижной плоскостью равна нулю, т.е. эта точка является мгновенным центром вращения катка. Отсюда следует, что $v_2^2 = \omega_2^2 r_2^2$, поэтому угловая скорость вращения катка 2 $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2}$ и направлена в сторону скорости; каток вращается по ходу часовой стрелки.

Таким образом,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{v_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4} m_2 v_2^2 = \frac{3}{4} m_2 v_2^2.$$

Выразим скорость v_2 центра катка через скорость v точки приложения силы F . Учитывая, что $\omega_2 = \frac{v}{2r_2} = \frac{v_2}{r_2}$, откуда $v_2 = \frac{v}{2}$. Тогда

$$T_2 = \frac{3}{4} m_2 \frac{v^2}{4} = \frac{3}{16} m_2 v^2.$$

Ступенчатый шкив 3 совершает вращательное движение. Кинетическую энергию вращающегося ступенчатого шкива находим по формуле

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

где момент инерции шкива 3 относительно оси, перпендикулярной оси вращения и проходящей через его центр $J_3 = m_3 \rho_3^2$, а $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$ – радиус инерции относительно оси вращения. Угловая скорость шкива 3 $\omega_3 = \frac{v_3}{r_3} = \frac{v_2}{r_3}$, так как $v_2 = v_3$ (см. рис. 6.8), и направлена в сторону скорости v_3 . Шкив 3 вращается по ходу часовой стрелки. Тогда

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \frac{v_3^2}{r_3^2} = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{4r_3^2} = \frac{1}{8} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{r_3^2}.$$

Груз 6 совершает поступательное движение со скоростью v_6 . Скорость его перемещения определяется из соотношения

$$\frac{v_6}{v_3} = \frac{R_3}{r_3}, \text{ откуда } v_6 = v_3 \frac{R_3}{r_3} = \frac{v}{2} \frac{R_3}{r_3}.$$

Следовательно, кинетическая энергия груза 6

$$T_6 = \frac{1}{2} m_6 v_6^2 = \frac{1}{2} m_6 \frac{v^2 R_3^2}{4 r_3^2} = \frac{1}{8} m_6 v^2 \frac{R_3^2}{r_3^2}.$$

Подставив найденные значения T_2 , T_3 и T_6 в (6.29), получим

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{3}{16} m_2 v^2 + \frac{1}{8} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{r_3^2} + \frac{1}{8} m_6 v^2 \frac{R_3^2}{r_3^2} = \\ &= \frac{v^2}{16} \left(3m_2 + 2m_3 \frac{\rho_3^2}{r_3^2} + 2m_6 \frac{R_3^2}{r_3^2} \right) = \frac{v^2}{16} \left(3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{0,01} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{0,09}{0,01} \right) = 6v^2, \end{aligned}$$

Окончательно имеем $T_1 = 6v^2$.

Перейдем к вычислению суммы работ всех внешних сил, приложенных к данной системе (рис. 6.8) при ее перемещении на расстояние s_1 .

$$\Sigma A_k^e = A_F + A_{R_2} + A_{N_2} + A_{R_3} + A_{X_0} + A_{Y_0} + A_M + A_{R_6} + A_{N_6} + A_{F_{np}} + A_{F_{yp}} + A_{F_{np}}. \quad (6.30)$$

Работа силы $\vec{F}$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, очевидно, будет $A_F = \int_0^s F ds = \int_0^s 40(3 + 8s) ds = 120s + 160s^2$.

Работы каждой из сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_6$ равны нулю, так как они перпендикулярны перемещению катка 3 и груза 6, т.е. $A_{R_2} = A_{N_2} = A_{N_6} = 0$. Так как силы $\vec{P}_3$, $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ приложены в неподвижной точке O , то работы каждой из этих сил равны нулю, т.е. $A_{R_3} = A_{X_0} = A_{Y_0} = 0$.

Работа постоянного момента M сил сопротивления равна произведению момента сил сопротивления на угол φ_3 поворота ступенчатого шкива, взятому со знаком минус, так как направление момента сил сопротивления противоположно направлению угловой скорости ступенчатого шкива; следовательно, $A_M = -Mv$.

Учитывая, что зависимость между перемещениями точек или углами поворота тел будет такой же, как между соответствующими линейными и угловыми скоростями, можно записать

$$s_2 = s_3 = \frac{s}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{s_3}{r_3} = \frac{s}{2r_3}.$$

Тогда работа

$$A_M = -M \frac{s}{2r_3}.$$

Работа силы тяжести P_6 будет $A_{P_6} = -P_6 h_6$,

где h_6 – вертикальное перемещение центра тяжести груза 6. Работа отрицательна, так как начальное положение центра тяжести груза ниже конечного.

Из рис. 6.8 $h_6 = s_6 \sin 45^\circ$, а s_6 на основании изложенной выше зависимости определяется из выражения

$$\frac{s_6}{s_3} = \frac{R_3}{r_3}, \quad s_6 = s_3 \frac{R_3}{r_3}.$$

Поэтому работа

$$A_{P_6} = -P_6 s_6 \sin 45^\circ = -m_6 g \frac{s}{2} \frac{R_3}{r_3} \sin 45^\circ.$$

Работа силы трения скольжения, учитывая направление перемещения груза 6, определится из выражения $A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} s_6$, где $F_{\text{тр}} = f_6 N_6$ – сила трения скольжения груза 6 о плоскость, s_6 – найденное выше перемещение центра тяжести груза 6. Учитывая, что реакция $N_6 = P_6 \cos 45^\circ$, можно записать

$$A_{F_{\text{тр}}} = -f N_6 s_6 = -f P_6 \cos 45^\circ s_6 = -f m_6 g \cos 45^\circ \frac{s}{2} \frac{R_3}{r_3}.$$

Работа силы $\vec{F}_{\text{мр1}}$ $A_{F_{\text{мр1}}} = 0$, так как точка K , где приложена сила $\vec{F}_{\text{мр1}}$ – мгновенный центр скоростей и скорость точки K равна нулю.

Определение работы силы упругости подробно рассмотрено при решении задачи в разделе 6.3.1. Следовательно,

$$A_{F_{\text{уп}}} = \frac{c}{2} (\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2) = \frac{c}{2} (0 - s_6^2) = -\frac{c}{2} \frac{s^2}{4} \frac{R_3^2}{r_3^2},$$

где начальное удлинение пружины $\Delta l_1 = 0$, а конечное $-\Delta l_2 = s_6$.

Подставим найденные значения в (6.30), получим

$$\begin{aligned}\Sigma A_k^e &= 120 \cdot s + 160 \cdot s^2 - M \frac{s}{2r_3} - m_6 g \frac{s}{2r_3} \sin 45^\circ - f m_6 g \cos 45^\circ \frac{s}{2r_3} - \frac{c}{2} \frac{s^2}{4} \frac{R_3^2}{r_3^2} = \\ &= s(120 + 160 \cdot s - 2 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,3}{0,1} \cdot \sin 45^\circ - \frac{0,3}{2 \cdot 0,1} - 0,1 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot \cos 45^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,3}{0,1} - \\ &\quad - \frac{240}{2} \cdot \frac{s}{4} \cdot \frac{0,09}{0,01}) = s(87,6 + 133 \cdot s).\end{aligned}$$

Подставим значения T_0 , T_1 и ΣA_k^e в (6.28), окончательно получим

$$6v^2 = s(87,6 + 133s). \quad (6.31)$$

Возьмем производную от обеих частей равенства (6.31), получим

$$6 \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} = v(87,6 + 266s).$$

Сократив на v , имеем

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{87,6 + 266 \cdot 0,2}{12} = \frac{140,8}{12} = 11,7 \text{ м/с}^2.$$

Выше отмечено, что $\omega_2 = \frac{v}{2r_2} = \frac{v_2}{r_2}$. Возьмем производную от частей данного равенства, получим

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{dv}{dt} \left(\frac{1}{2r_2} \right) = \frac{dv_2}{dt} \left(\frac{1}{r_2} \right),$$

где $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, $\frac{dv}{dt} = a$ — вращательное ускорение точки обода катка 2,

$\frac{dv_2}{dt} = a_2$ — ускорение центра катка 2. С учетом отмеченного угловое ускорение

колеса 2 $\varepsilon_2 = \frac{a}{2r_2} = \frac{a_2}{r_2}$, откуда $a_2 = \frac{a}{2}$. Следовательно, искомое угловое ускорение шкива 3 определится из равенства

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_2}{r_3} = \frac{a}{2r_3}, \quad \varepsilon_3 = \frac{11,7}{2 \cdot 0,1} = 58,5 \text{ с}^{-2}.$$

При определении ускорения a точки, движущейся прямолинейно, или углового ускорения ε вращающегося тела (здесь ε_3 ступенчатого шкива 3) следует выразить кинетическую энергию через скорость v этой точки, или угловую скорость ω тела, а в выражении работы все перемещения выразить через перемещения x той же точки или угол поворота ϕ того же тела. После этого

воспользоваться теоремой в дифференциальной форме. Чтобы найти искомое значение a (или ε) при $s = s_1$, надо в полученном результате выразить x (или φ) через s , а затем положить $s = s_1$.

С учетом рекомендации методики при решении задачи следовало бы все кинематические характеристики и выражения работ сил для рассматриваемой системы выразить через параметры ступенчатого шкива 3, воспользоваться рекомендациями методики и получить искомое ускорение ε_3 ступенчатого шкива.

Учитывая, что полученное здесь равенство (6.31) применимо для определения кинематических характеристик катка 2, а не ступенчатого шкива 3, преобразуем равенство (6.31) применительно к ступенчатому шкиву 3. Учитывая,

что $v_3 = v_2 = \frac{v}{2}$, $s_3 = s_2 = \frac{s}{2}$, т.е. $v = 2\omega_3 r_3$, $s = 2r_3 \varphi_3$, равенство (6.31) можно записать в виде $24\omega_3^2 r_3^2 = 2r_3 \varphi_3 (87,6 + 133r_3 \varphi_3)$, или

$$12\omega_3^2 r_3 = 87,2\varphi_3 + 133r_3 \varphi_3^2. \quad (6.32)$$

Возьмем производную от обеих частей равенства (6.32), получим

$$12r_3 \cdot 2\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 87,2 \frac{d\varphi_3}{dt} + 133r_3 \cdot 2 \cdot \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3$, $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$, сократив обе части равенства на ω_3 , получим $24r_3 \varepsilon_3 = 87,2 + 266r_3 \varphi_3$. Здесь $r_3 \varphi_3 = s_3 = s_1$, тогда равенство принимает вид $24r_3 \varepsilon_3 = 87,2 + 266s_1$.

Искомое ε_3 определится из выражения

$$\varepsilon_3 = \frac{87,2 + 266s_1}{24r_3} = \frac{87,2 + 266 \cdot 0,2}{24 \cdot 0,1} = 58,5 \text{ 1/c}^2.$$

Если же использовать рекомендации методики применительно к уравнению (6.31), то получим уравнение аналогичное (6.32) для катка 2. Это позволит определить ε_2 , но не ε_3 . Для определения искомого ε_3 потребуется найти $a_3 = a_2$, т.е. практически повторить изложенное здесь решение задачи по определению a_2 .

Поэтому для определения искомой величины ε_2 следует, как основной вариант решения, воспользоваться рекомендациями методики. Можно также решить задачу так, как здесь изложено, или из уравнения (6.31) получить уравнение (6.32) и определить искомую величину.

6.4.2.Пример 2

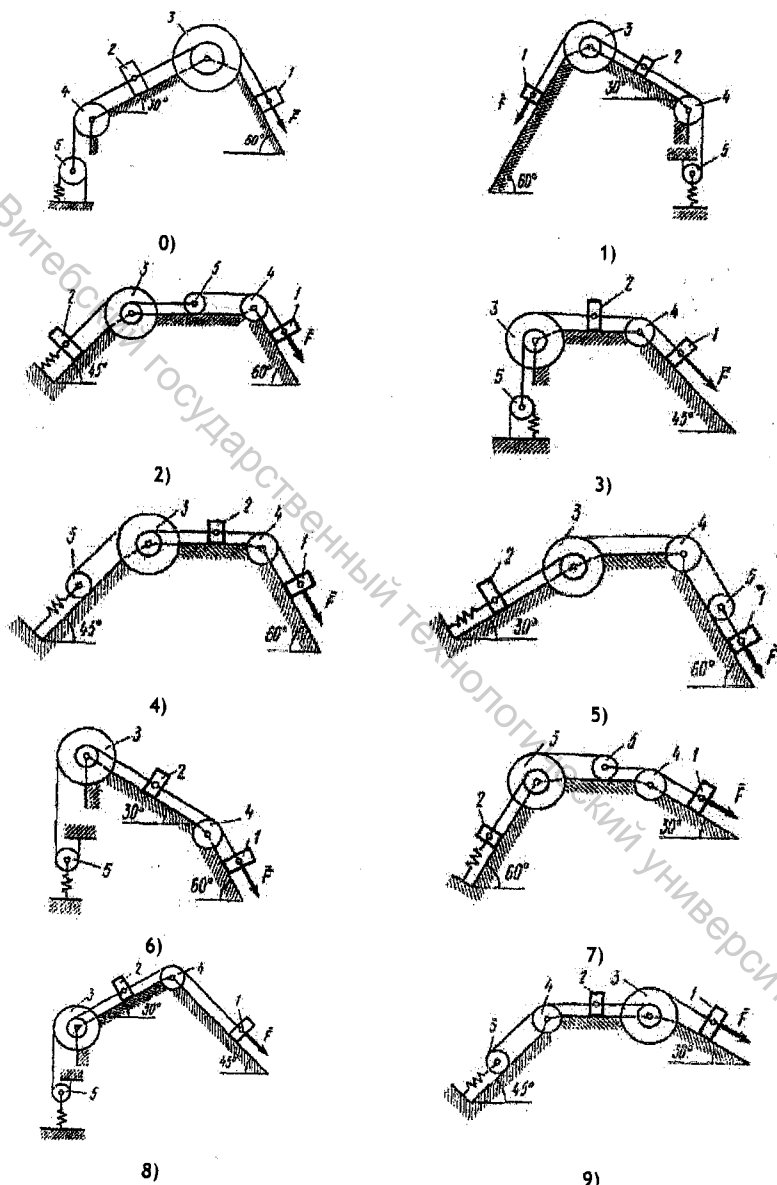


Рисунок 6.9

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3 = 0,3$ м, $r_3 = 0,1$ м и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0,2$ м, блока 4 радиуса $R_4 = 0,2$ м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. 6.9, табл. 6.3); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c .

Таблица 6.3

Номер условия	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	c , Н/м	M , Н/м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	v_{C5}

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение 5 станет равным $s_1 = 0,2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы 6.3, где обозначено: v_1 , v_2 , v_{C5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его

угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1 , учитывая, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример решения задачи. Механическая система (рис. 6.10) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 , блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c ; ее начальная деформация равна нулю.

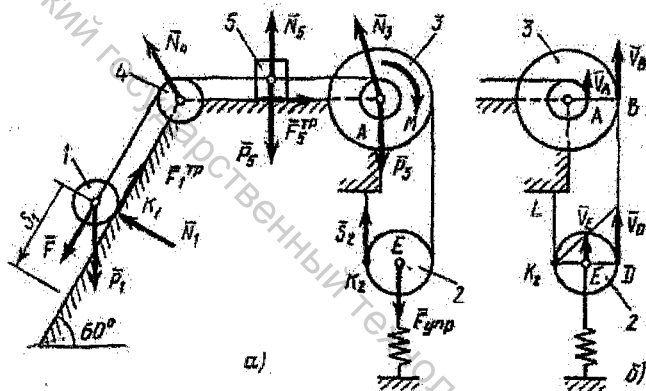


Рисунок 6.10

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0,3$ м, $r_3 = 0,1$ м, $\rho_3 = 0,2$ м, $f = 0,1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0,6$ Н·м, $F = 20(3 + 2s)$ Н, $s_1 = 0,2$ м. Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весовых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{F}_{yp}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_3$, $\bar{N}_4$, $\bar{N}_5$, натяжение нити $\bar{S}_2$, силы трения $\bar{F}_1^{tp}$, $\bar{F}_5^{tp}$ и момент M .

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \quad (6.33)$$

2. Определяем T_0 и T . Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \quad (6.34)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 — поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2; \\ T_3 &= \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2, \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3 . Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3$; где A — любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 — мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1 . Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \quad (6.36)$$

Кроме того, входящие в (6.35) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0,5 m_1 r_1^2; \quad I_3 = m_3 \rho_3^2. \quad (6.37)$$

Подставив все величины (6.36) и (6.37) в равенства (6.35), а затем, используя равенство (6.34), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (6.38)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1 . Введя обозначения: s_5 — перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 — угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 — начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$

$$A(\bar{F}_5^{mp}) = -F_5^{mp} s_5 = -f P_5 s_1;$$

$$A(M) = -M \varphi_3;$$

$$A(\bar{F}_{np}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2 , где приложены силы $\bar{N}_1$, $\bar{F}_1^{np}$ и $\bar{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\bar{P}_3$, $\bar{N}_3$ и $\bar{P}_4$ – неподвижны; а реакция $\bar{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1 ; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = v_A / r_3 = v_{C1} / r_3$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / r_3$.

Далее, из рис. 6.10 видно, что $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку пути $K_2 L$), то $v_E = 0,5 v_D = 0,5 \omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0,5 \varphi_3 R_3 = 0,5 s_1 R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы численных работ получим

$$\Sigma A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_3 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c R_3^2}{8 r_3^2} s_1^2. \quad (6.39)$$

Подставляя выражения (6.38) и (6.39) в уравнение (6.33) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_3 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c R_3^2}{8 r_3^2} s_1^2. \quad (6.40)$$

Из равенства (6.40), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3 . Ответ: $\omega_3 = 8,1 \text{ с}^{-1}$.

7.1 Применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения системы

Посредством теоремы о движении центра масс задачу рекомендуется решать в следующей последовательности.

1. Выделить и изобразить систему в произвольный момент времени.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Записать теорему о движении центра масс в проекциях на декартовы оси координат.
4. Вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить их в дифференциальные уравнения движения центра масс системы в выбранной системе координат.
5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.
6. Составить начальные уравнения движения для определения произвольных постоянных интегрирования.
7. Определить произвольные постоянные интегрирования по начальным условиям задачи.
8. Подставить найденные произвольные постоянные в результат интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс системы и найти неизвестные величины задачи.

В некоторых прямых задачах бывают заданы все внешние силы кроме одной, массы всех материальных точек системы и законы их движения. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, для вычисления левых частей уравнений

$$M\ddot{x}_c = \Sigma F_{ix}^e, \quad M\ddot{y}_c = \Sigma F_{iy}^e, \quad M\ddot{z}_c = \Sigma F_{iz}^e$$

надо воспользоваться вспомогательными формулами

$$M\ddot{x}_c = \Sigma m_k \ddot{x}_k, \quad M\ddot{y}_c = \Sigma m_k \ddot{y}_k, \quad M\ddot{z}_c = \Sigma m_k \ddot{z}_k,$$

где m_k — масса k -ой точки, а x_k, y_k, z_k — уравнения ее движения, ввести эти результаты в дифференциальные уравнения и определить неизвестную силу.

В некоторых обратных задачах бывают заданы все внешние силы, массы всех точек системы и законы движения всех точек, кроме одной, и требуется определить движение этой точки. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, также следует воспользоваться вспомогательными формулами, полученные результаты ввести в левые части дифференциальных уравнений и затем найти искомый закон движения точки.

7.1.1. Пример 1

Дано: $m_1 = 18 \text{ кг}$, $u = 2 \text{ м/с}$, $m_2 = 6 \text{ кг}$, $s = AD = 0,5(2 - 3t^2) \text{ м}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1 \text{ с}$.

Определить перемещение плиты за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1 \text{ с}$.

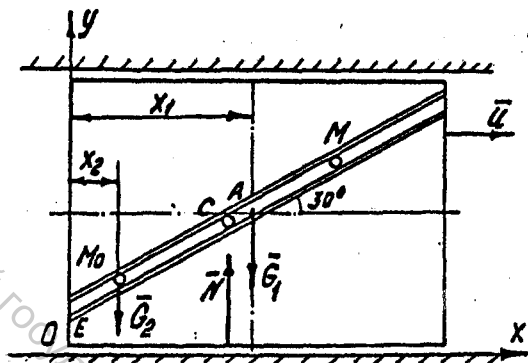


Рисунок 7.1

Выбираем систему координатных осей XOY (рис. 7.1).

Определим положение груза D в момент времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1 \text{ с}$.

$$s_0 = 0,5(2 - 0) = 1 \text{ м}, s_1 = 0,5(2 - 3) = -0,5 \text{ м}.$$

В начальный момент времени груз находился на плите в положении M_0 , а через 1 с – в положении M .

Запишем теорему о движении центра масс системы в проекциях на ось x :

$$M\dot{x}_c = \Sigma F_{kx}^e.$$

Покажем все внешние силы, приложенные к системе, состоящей из плиты и груза: $\vec{G}_1$ – сила тяжести плиты, $\vec{G}_2$ – сила тяжести груза, $\vec{N}$ – нормальная реакция направляющих. Так как все внешние силы перпендикулярны оси x , то $\Sigma F_{kx}^e = 0$. Тогда $M\dot{x}_c = 0$, а $\ddot{x}_c = 0$. Интегрируя это уравнение, получим $\frac{dx_c}{dt} = 0$, $\dot{x}_c = \text{const}$. В начальный момент времени при $t = t_0 = 0$ скорость центра масс системы $\dot{x}_{c_0} = u$, поэтому $\dot{x}_c = u$. Интегрируя полученное равенство, имеем $x_c = ut + C_1$.

Используя начальные условия движения, определим произвольную постоянную интегрирования. При $t = t_0 = 0$ $x_c = x_{c_0}$. Поэтому $x_{c_0} = 0 + C$, а $C_1 = x_{c_0}$, $x_c = ut + x_{c_0}$.

Координата x_{c_0} центра масс системы в начальный момент при $t_0 = 0$ определится из равенства

$$x_{c_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

где $m_1 = 18 \text{ кг}$, $m_2 = 6 \text{ кг}$, x_1 и x_2 соответственно координаты центров масс плиты и груза D (точка M_0 , рис. 7.1) при $t_0 = 0$.

Координата центра масс системы при $t_1 = 1 \text{ с}$ определится из равенства

$$x_{c_1} = \frac{m_1(x_1 + x_2) + m_2(x_2 + x + M_0 M \cos 30^\circ)}{m_1 + m_2};$$

где x — перемещение плиты за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1 \text{ с}$, $(x_1 + x_2)$ и $(x_2 + x + M_0 M \cos 30^\circ)$ соответственно координаты центров масс плиты и груза D (точка M , рис. 7.1) при $t_1 = 1 \text{ с}$. Студенту рекомендуется сделать дополнительный чертеж и показать указанные координаты на чертеже. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ координата центра масс системы

$$x_c = ut + x_{c_0} = ut + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = x_{c_1}.$$

Подставляя полученное выше значение x_{c_1} в данное равенство, получим

$$ut = \frac{(m_1 + m_2)x + m_2 M_0 N \cos 30^\circ}{m_1 + m_2}.$$

$$\text{Откуда } x = ut - \frac{m_2}{m_1 + m_2} M_0 M \cos 30^\circ.$$

Так как $MM_0 = 1,5 \text{ м}$ при $t_1 = 1 \text{ с}$, будем иметь

$$x = 2 - \frac{6}{24} \cdot 1,5 \cdot 0,866 = 1,67 \text{ м}.$$

Следовательно, искомое перемещение плиты за время от $t = 0$ до $t_1 = 1 \text{ с}$ равно $1,67 \text{ м}$.

При решении задачи оси координат могут быть выбраны произвольно, как, например, показано на рис. 7.1. Их можно выбрать проходящими через центр масс C_0 системы при $t = 0$.

Тогда $\dot{x}_c = u$, $x_c = ut + C_1$. При $t = t_0 = 0$ $C_1 = x_{c_0} = 0$,

$$\text{где } x_{c_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0, \text{ а } x_c = ut.$$

Учитывая, что при $t_1 = 1 \text{ с}$

$$x_{c_1} = \frac{m_1(x_1 + x) + m_2(x + x_2 + M_0 M \cos 30^\circ)}{m_1 + m_2} = ut$$

и $x_{c_0} = 0$, получим

$$x = ut - \frac{m_2}{m_1 + m_2} M_0 M \cos 30^\circ = 1,67 \text{ м},$$

т.е. получим аналогичный результат. Однако первый вариант решения является более общим.

При решении задачи можно использовать также формулу

$$M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k,$$

где $\dot{x}_c = u$, $x_1 = x$, и $x_2 = x + |AD| \cos 30^\circ$ соответственно скорость движения центра масс системы и уравнения движения плиты и груза D . Однако при такой методике решения координату $AD = s$ следует брать по модулю, так как при $t_1 = 1 \text{ с}$ $AD = -0,5 \text{ м}$. Оси координат следует выбрать проходящими через центр масс C_0 системы при $t = 0$. Тогда

$$M\dot{x}_c = m_1 \dot{x} + m_2 \dot{x} + m_2 |\dot{s}| \cos 30^\circ, \text{ а } \dot{x} = u - \frac{m_2 |\dot{s}| \cos 30^\circ}{m_1 + m_2},$$

$$\text{или } \dot{x} = u - \frac{3m_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} t.$$

Следовательно

$$x = ut - \frac{3m_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} \cdot \frac{t^2}{2},$$

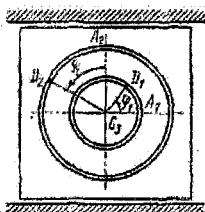
$$\text{при } t_1 = 1 \text{ с имеем } x = u - \frac{3m_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} = 1,67 \text{ м}.$$

Однако, здесь использовать равенство $M\dot{x}_{c_0} = \sum m_k \dot{x}_k$ не рекомендуется.

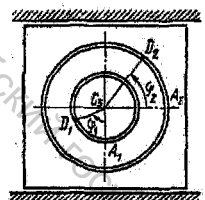
7.1.2 Пример 2

Механическая система состоит из грузов D_1 массой $m_1 = 2 \text{ кг}$ и D_2 массой $m_2 = 6 \text{ кг}$ и из прямоугольной вертикальной плиты массой $m_3 = 12 \text{ кг}$, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 7.2, табл. 7.1). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов $r = 0,4 \text{ м}$ и $R = 0,8 \text{ м}$.

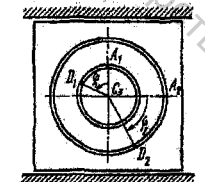
При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1 C_3 D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2 C_3 D_2$ — по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. 7.1 эти зависимости даны отдельно для рис. 7.2, где φ выражено в радианах, t — в секундах.



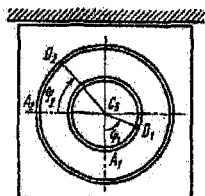
0)



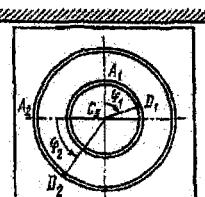
2)



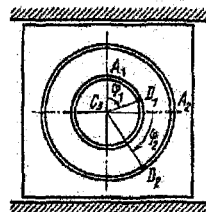
4)



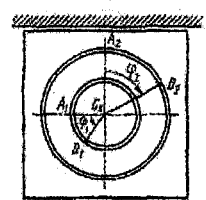
6)



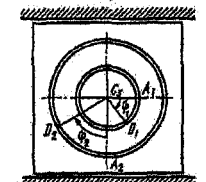
8)



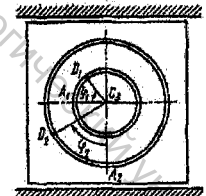
1)



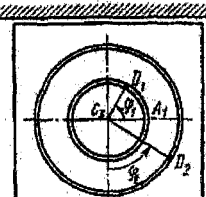
3)



5)



7)



9)

Рисунок 7.2

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в столбце «Найти», т. е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$, где x_3 – координата центра C_3 плиты (зависимость $x_3 = f_3(t)$ определяет закон движения плиты), N – полная нормальная реакция направляющих.

Таблица 7.1

Номер условия	Рис. 0—4		Рис. 5—9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2 + 1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2 - 2)$	$\frac{\pi}{2}(3 - t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2 + 2)$	x_3
1	$\pi(2 - t)$	$\frac{\pi}{4}(t + 3)$	$\frac{\pi}{4}(2t - 1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2 + 2)$	$\frac{\pi}{6}(5 - t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4 - t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t - 2)$	$\frac{\pi}{6}(3t - 2)$	$\frac{\pi}{2}(3 - t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2 - 4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2 - t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t + 2)$	$\frac{\pi}{4}(1 - t)$	$\pi(3 - t)$	$\frac{\pi}{6}(t - 1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1 - 2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2 - 3)$	$\frac{\pi}{3}(2 - t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5 - t)$	$\frac{\pi}{4}(t + 4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4 - t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2 + 3)$	$\frac{\pi}{2}(2 - t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4 - t^2)$	$\pi(t^2 + 2)$	x_3
9	$\frac{\pi}{2}(4 - t)$	$\pi(t + 5)$	$\frac{\pi}{6}(2t - 1)$	$\frac{\pi}{2}(2 - t)$	N

Указания. Задача на применение теоремы о движении центра масс. При этом для определения $x_3 = f_3(t)$ составить уравнение в проекции на горизонтальную ось x , а для определения N – на вертикальную ось y .

Пример решения. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3 , движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 7.3). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R , по законам $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

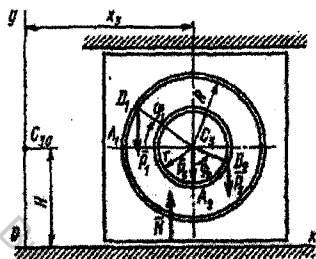


Рисунок 7.3

Дано: $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 8$ кг, $m_3 = 12$ кг,
 $r = 0,6$ м, $R = 1,2$ м, $\varphi_1 = \pi t$ рад, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1-t)$
 рад (t – в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2 , в произвольном положении (рис. 7.3). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакцию направляющих $\vec{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30} , где находился центр масс плиты в момент времени $t_0 = 0$.

1. Определение перемещения x_3 . Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x . Получим

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0, \quad (7.1)$$

так как $\Sigma F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (7.1), найдем, что $M\dot{x}_C = C_1$, т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $v_{Cx} = 0$, то $C_1 = 0$. Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$, получим

$$Mx_C = \text{const}, \quad (7.2)$$

т. е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Определим значение Mx_C . Из рис. 7.3 видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R \cos \varphi_1$, $x_2 = x_3 + r \sin \varphi_2$. Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы, $Mx_C = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, то

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R \cos(\pi t) + m_2 r \sin(\pi/2 - \pi t/2). \quad (7.3)$$

В соответствии с равенством (7.2) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны. Следовательно, учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$-m_1 R + m_2 r = (m_1 + m_2 + m_3) x_3 - m_1 R \cos(\pi t) + m_2 r \cos(\pi t / 2). \quad (7.4)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3 .

Ответ: $x_3 = 0,09[3 \cos(\pi t) - 2 \cos(\pi t / 2) - 1]$ м, где t – в секундах.

2. Определение реакции N . Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рис. 7.3):

$$M \ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}^e \text{ или } M \ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \quad (7.5)$$

Отсюда получим, учтя, что $P_1 = m_1 g$, и т.д.:

$$N = M \ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3) g. \quad (7.6)$$

По формуле, определяющей ординату y_C центра масс системы,

$$M y_C = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3, \quad \text{где } y_1 = H + R \sin \varphi_1, \quad y_2 = H - r \cos \varphi_2, \\ y_3 = H = OC_{30} = \text{const}, \text{ получим}$$

$$M y_C = (m_1 + m_2 + m_3) H + m_1 R \sin(\pi t) - m_2 r \cos(\pi / 2 - \pi t / 2) \text{ или}$$

$$M y_C = (m_1 + m_2 + m_3) H + m_1 R \sin(\pi t) - m_2 r \sin(\pi t / 2).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем

$$M \ddot{y}_C = m_1 R \pi \cos(\pi t) - m_2 r (\pi / 2) \cos(\pi t / 2);$$

$$M \ddot{y}_C = -m_1 R \pi^2 \sin(\pi t) + m_2 r (\pi^2 / 4) \sin(\pi t / 2).$$

Подставив это значение $M \ddot{y}_C$ в уравнение (7.6), определим искомую зависимость N от t .

Ответ: $N = 254,8 - 1,2 \pi^2 [6 \sin(\pi t) - \sin(\pi t / 2)]$, где t – в секундах, N – в ньютонах.

7.2 Применение теоремы об изменении количества движения системы

Решение задачи посредством указанной теоремы надо выполнять в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент.
2. Изобразить на рисунке все внешние силы, действующие на систему.
3. Выбрать неподвижную систему координат.

4. Записать теорему об изменении количества движения системы в проекциях на оси выбранной системы координат.
5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.
6. Составить начальные условия задачи.
7. Определить произвольные постоянные интегрирования по начальным условиям.
8. Найденные произвольные постоянные интегрирования подставляем в результат интегрирования дифференциальных уравнений.
9. Из полученных уравнений находим неизвестные величины.

Если сумма проекций внешних сил (или импульсов внешних сил) на ось оказывается равной нулю, то следует приравнять между собой проекции на эту ось главного вектора количеств движения системы в начальный и конечный моменты времени и из полученного уравнения определить искомую величину.

При решении задач не следует забывать, что в выражение теоремы об изменении количеств движения системы входят абсолютные скорости материальных точек, входящих в данную систему.

7.2.1. Пример 1

Воспользуемся при решении задачи рис. 7.1. Студенту предлагается самостоятельно выполнить чертеж в соответствии с изложенным ниже решением.

Выполнив пункты 1-3 рекомендованной последовательности решения задачи, запишем теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме в проекциях на оси системы координат $\frac{dK_x}{dt} = \Sigma F_{kx}^e$,

$\frac{dK_y}{dt} = \Sigma F_{ky}^e$. Вторым уравнением целесообразно воспользоваться, когда надо найти реакции связи. Первым уравнением удобно пользоваться, когда надо найти перемещение плиты, движущейся поступательно, или ее скорость. Учитывая, что $\Sigma F_{kx}^e = 0$, $\frac{dK_x}{dt} = 0$, $K_x = const$. Следовательно, проекции количества движения системы на ось x при $t=0$ и $t_1=1$ с равны между собой, т.е. $K_{0x} = K_{1x}$. При $t=0$ $K_{0x} = m_1 u + m_2 u$, так как абсолютные скорости плиты и груза равны u . При $t_1=1$ с

$$K_{1x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v + m_2 (v + v \cos 30^\circ),$$

где v – скорость перемещения плиты; $v \cos 30^\circ$ – проекция относительной скорости груза на ось x ; $(v + v \cos 30^\circ)$ – проекция абсолютной скорости груза на ось x . Учитывая, что здесь при $t_1=1$ с $s = -0,5$ м, а $\dot{s} = -3t$ м/с, относительная скорость $\dot{s} = v$, направлена вдоль AM , т.е. груз движется ускоренно в отрицательном направлении отсчета координаты его перемещения. Поэтому при определении K_{1x} принимается значение по модулю.

Поэтому можно записать

$$(m_1 + m_2)u = (m_1 + m_2)v + m_2v_r \cos 30^\circ.$$

Скорость перемещения плиты определится из выражения

$$\dot{x} = v = u - \frac{3m_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} t.$$

Следовательно, перемещение плиты

$$x = ut - \frac{3m_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} \cdot \frac{t^2}{2} = 2 - 0,33 = 1,67 \text{ м.}$$

7.2.2 Пример 2

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты массой $m_1 = 18$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массой $m_2 = 6$ кг (рис. 7.4, табл. 7.2). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u_0 = 2$ м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

На рис. 7.4 желоб KE прямолинейный и при движении груза расстояние $s = AD$ изменяется по закону $s = f_1(t)$, а на рис. 7.4.4 желоб – окружность радиуса $R = 0,8$ м и при движении груза угол $\varphi = \angle AC_1D$ изменяется по закону $\varphi = f_2(t)$. В табл. 7.2 эти зависимости даны отдельно для рис. 7.4.0, и для рис. 7.4.4 и т. д., где s выражено в метрах, φ – в радианах, t – в секундах.

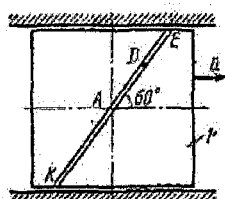
Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить зависимость $u = f(t)$, т. е. скорость плиты как функцию времени.

Указания. Задача на применение теоремы об изменении количества движения системы. При решении составить уравнение, выражающее теорему, в проекции на горизонтальную ось.

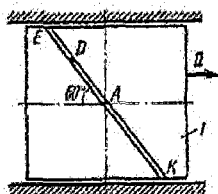
Пример решения задачи. В центре тяжести A тележки массой m_1 , движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень AD длиной l с грузом D массой m_2 на конце (рис. 7.5). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость тележки $u = u_0$, стержень AD начинает вращаться вокруг оси A по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Дано: $m_1 = 24$ кг, $m_2 = 12$ кг, $u_0 = 0,5$ м/с, $l = 0,6$ м, $\varphi = (\pi/3)(1 + 2t^3)$ рад (t – в секундах). Определить: $u = f(t)$ – закон изменения скорости тележки.

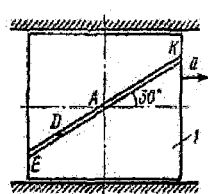
Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки и груза D , в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и реакции плоскости $\vec{N}'$, $\vec{N}''$. Проведем координатные оси Ox так, чтобы ось x была горизонтальна.



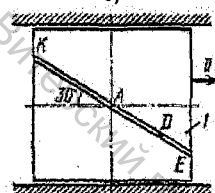
0)



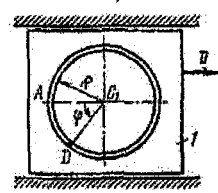
1)



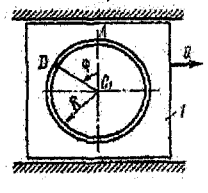
2)



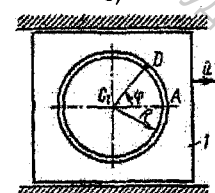
3)



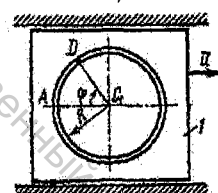
4)



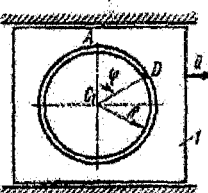
5)



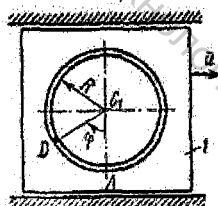
6)



7)



8)



9)

Рисунок 7.4

Таблица 7.2

Номер узла	$s = f_1(t)$		$\varphi = f_2(t)$	
	рис. 0,1	рис. 2,3	рис. 4,5,6	рис. 7,8,9
0	$0,8 \sin(\pi t^2)$	$0,4(3t^2 - 2)$	$\pi(3 - 2t^2)/3$	$\pi(2t^2 - 1)$
1	$1,2 \cos(\pi t/2)$	$0,6 \sin(\pi t^2/2)$	$\pi(1 - 3t^2)/4$	$\pi(1 - 4t^2)/3$
2	$0,6(2t^2 - 1)$	$0,8 \cos(\pi t)$	$\pi(t^2 - 3)/6$	$\pi(3 + 4t^2)/6$
3	$0,4 \sin(\pi t^2/3)$	$0,5 \sin(\pi t^2/6)$	$\pi(2 - t^2)$	$\pi(t^2 + 1)/2$
4	$0,5 \cos(\pi t/6)$	$1,2 \cos(\pi t/3)$	$\pi(1 + 2t^2)/6$	$\pi(t^2 - 5t^2)/4$
5	$0,6 \sin(\pi t^2/4)$	$0,5(3 - 4t^2)$	$\pi(5t^2 + 1)/4$	$\pi(t^2 - 4)/3$
6	$0,8(2 - 3t^2)$	$0,8 \sin(\pi t^2/3)$	$\pi(t^2 - 2)/2$	$\pi t^2/4$
7	$0,6 \cos(\pi t/3)$	$0,4 \cos(\pi t/4)$	$\pi(3 + t^2)/3$	$\pi(3t^2 - 1)/6$
8	$1,2 \sin(\pi t^2/6)$	$1,2 \sin(\pi t^2)$	$\pi t^2/2$	$\pi(t^2 + 3)/2$
9	$0,8 \cos(\pi t/4)$	$0,6 \cos(\pi t/6)$	$\pi(t^2 + 2)/6$	$\pi(2 - t^2)/4$

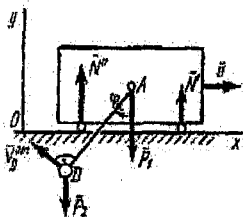


Рисунок 7.5

$$\frac{dQ_x}{dt} = \Sigma F_{kx}^e = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1.$$

(7.7)

Для рассматриваемой механической системы $\bar{Q} = \bar{Q}^r + \bar{Q}^D$, где $\bar{Q}^r = m_1 \bar{u}$ и $\bar{Q}^D = m_2 \bar{v}_D$ — количества движения тележки и груза D соответственно ($\bar{u}$ — скорость тележки, $\bar{v}_D$ — скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (7.7) следует, что

$$Q_x^D + Q_x^D = C_1 \text{ или } m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \quad (7.8)$$

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня AD вокруг оси A), а движение самой тележки — переносным. Тогда $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{nep} + \bar{v}_D^{om}$ и

$$v_{Dx} = v_{Dx}^{nep} + v_{Dx}^{om}. \quad (7.9)$$

Но $\bar{v}_D^{nep} = u$ и, следовательно, $v_{Dx}^{nep} = u_x$. Вектор $\bar{v}_D^{om}$ направлен перпендикулярно стержню и численно $v_D^{om} = l \cdot \omega_{AD} = l\dot{\phi} = 2l\pi t^2$.

Изобразив этот вектор на рис. 7.5 с учетом знака $\dot{\phi}$, найдем, что $v_{Dx}^{om} = -v_D^{om} \cos \varphi$. Окончательно из равенства (7.9) получим

$$v_{Dx} = u_x - v_D^{om} \cos \varphi = u_x - 2l\pi t^2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right). \quad (7.10)$$

(В данной задаче величину v_{Dx} можно еще найти другим путем, определив абсциссу x_D груза D , для которой, как видно из рис. 7.5, получим $x_D = x_A - l \sin \varphi$; тогда $v_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x}_A - l\dot{\phi} \cos \varphi$, где $\dot{x}_A = u_x$, а $\dot{\phi} = 2\pi t^2$.)

При найденном значении v_{Dx} равенство (7.8), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = C_1. \quad (7.11)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $u = u_0$. Подстановка этих величин в уравнение (7.11) дает $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ и тогда из (7.11) получим

$$(m_1 + m_2)u - 2m_2 \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0.$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости u тележки от времени:

$$u = u_0 + \frac{2\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right). \quad (7.12)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим искомую зависимость u от t .

Ответ: $u = 0,5 + 0,4\pi t^2 \cos(\pi/3 + 2\pi t^3/3)$ м/с.

7.3 Применение теоремы об изменении кинетического момента системы и дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела

Задачи с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке все внешние силы системы.
3. Выбрать систему координат и направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения.
4. Записать теорему об изменении момента количеств движения (кинетического момента) системы относительно соответствующей оси.
5. Вычислить моменты внешних сил относительно неподвижной оси (если не заданы).
6. Вычислить моменты количеств движения (кинетический момент) системы относительно неподвижной оси и затем взять производную по времени от кинетического момента системы.
7. Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение и найти неизвестные величины задачи, т.е. в зависимости от условия решить прямую или обратную задачи динамики.

Задачи с помощью теоремы о сохранении кинетического момента системы рекомендуется решать в такой последовательности.

Выполнить указанные здесь пункты 1-4. Затем показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю; вычислить и приравнять кинетические моменты системы относительно оси в начальный и конечный моменты времени: $L_{1z} = L_{2z}$; решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

7.3.1. Пример 1

Дано: $m_1 = 24 \text{ кг}$, $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, $OC = h = R$, $R = 1,2 \text{ м}$, $t_0 = 0$, $m_2 = 8 \text{ кг}$, $s = AD = 0,6 = \text{const}$, $M = 12 \text{ т Нм}$, $t_1 = 1 \text{ с}$.

Найти закон вращения платформы $\varphi = f_1(t)$.

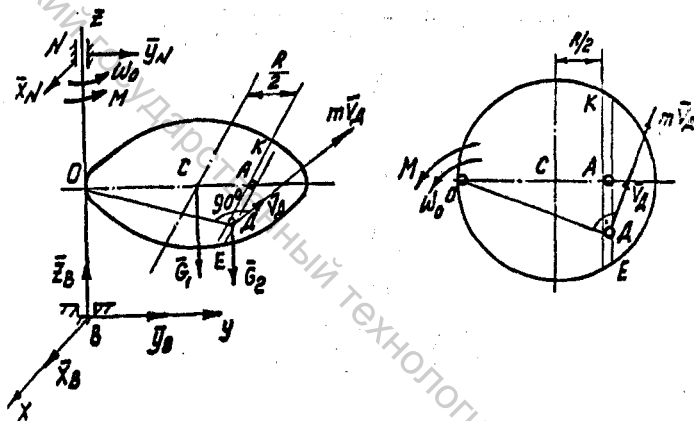


Рисунок 7.6

Рассмотрим систему, состоящую из горизонтальной платформы и груза (рис. 7.6).

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы $\frac{dL_z}{dt} = \Sigma m_i (\bar{F}_k^e)$, где L_z — кинетический момент системы относительно оси z ; $\Sigma m_i (\bar{F}_k^e)$ — главный момент внешних сил системы относительно оси z . На систему за время от $t_0 = 0$ до $t = 1 \text{ с}$ действуют силы: $\vec{G}_1$ — сила тяжести платформы; $\vec{G}_2$ — сила тяжести груза; пара сил с моментом M ; реакции $\bar{X}_N$ и $\bar{Y}_N$ подшипника и, $\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$ подпятника. $L_z = L_{z1} + L_{z2}$, где $L_{z1} = J\omega$ — кинетический момент горизонтальной платформы, вращающейся вокруг оси z ; $L_{z2} = m_2 \cdot v_D \cdot OD$ — кинетический момент груза массой m_2 относительно оси z .

В свою очередь, момент инерции J_z горизонтальной платформы относительно оси z на основании теоремы Штейнера-Гюйгенса о зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей можно определить из равенства

$$J_z = J_{zc} + m_1 OC^2 = \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 = \frac{3}{2} m_1 R^2,$$

где J_{zc} – момент инерции платформы относительно оси, проходящей через ее центр масс C . Тогда

$$L_z = J_z \omega + m_2 v_2 \cdot OD = \frac{3}{2} m_1 R^2 \omega + m_2 \omega \cdot OD^2 = \\ = \left\{ \frac{3}{2} \cdot 24 \cdot (1,2)^2 + 8[(1,5 \cdot R)^2 + 0,6^2] \right\} \omega = 80,64 \omega.$$

Силы $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ параллельны оси z , реакции подшипника и подпятника пересекают ось z . Моменты этих сил относительно оси z равны нулю. Поэтому главный момент M_{Kz}^e внешних сил равен моменту M пары сил, т.е. $M_{Kz}^e = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e) = M = 12t$.

Подставив L_z и $\Sigma m_z(\vec{F}_k^e)$ в исходное равенство, получим $\frac{d}{dt} 80,64 \omega = 12t$; $80,64 \frac{d\omega}{dt} = 12t$; $\frac{d\omega}{dt} = 0,15t$. Так как $\omega = \dot{\varphi}$, а $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}$, то данное уравнение можно записать в виде $\ddot{\varphi} = 0,15t$. Дважды проинтегрировав, получим $\dot{\varphi} = 0,15 \frac{t^2}{2} + C_1$, $\varphi = 0,15 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + C_1 t + C_2$.

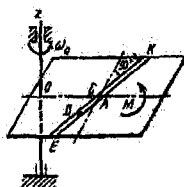
Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 , используя начальные условия. При $t = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, $\varphi_0 = 0$. Тогда при $t = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = 0 - C_1$, откуда $C_1 = \omega_0 = 10$, $\varphi = \varphi_0 = 0 = 0 + 0 + C_2$, откуда $C_2 = 0$.

С учетом C_1 и C_2 получим искомый закон вращения платформы в виде

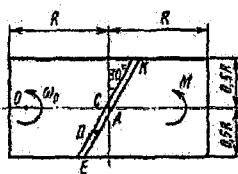
$$\varphi = 0,0025t^3 + 10t \text{ рад.}$$

7.3.2 Пример 2

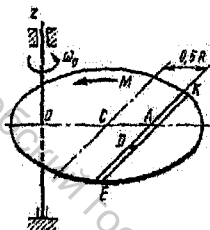
Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где $R = 1,2$ м) массой $m_1 = 24$ кг вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ вокруг вертикальной оси z , отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии $OC = b$ (рис. 7.7, табл. 7.3); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. 7.7 (вид сверху).



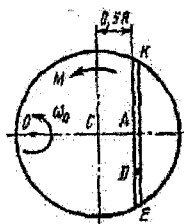
0)



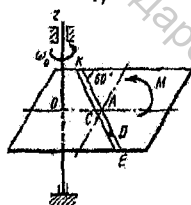
0a)



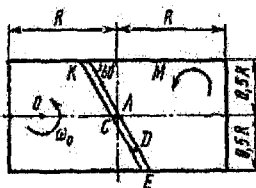
1)



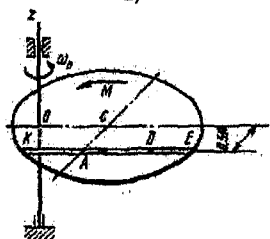
1a)



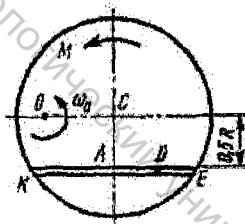
2)



2a)



3)



3a)

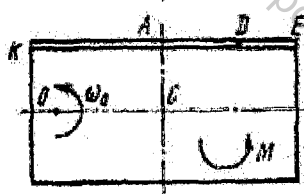
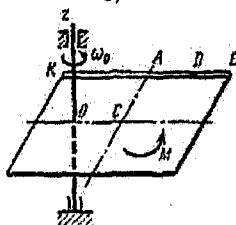
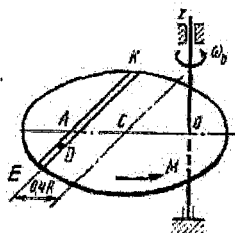
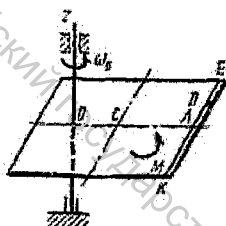


Рисунок 7.7

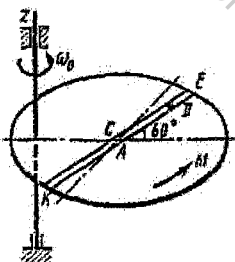
4)



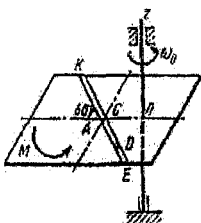
5)



6)

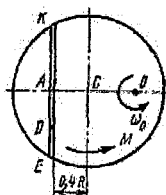


7)

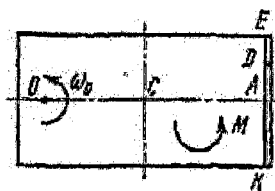


8)

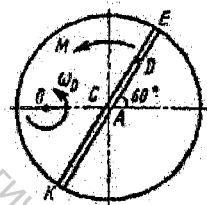
4a)



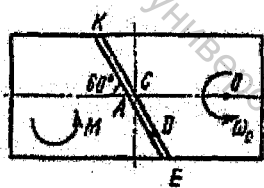
5a)



6a)

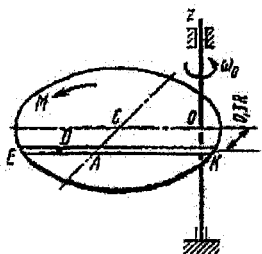


7a)

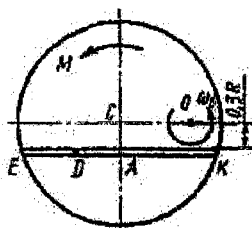


8a)

Рисунок 7.7 (продолжение)



9)



9a)

Рисунок 7.7 (окончание)

Таблица 7.3

Номер условия	b	$s = F(t)$	M
0	R	$-0,4t^2$	6
1	$R/2$	$0,6t^2$	$4t$
2	R	$-0,8t^2$	-6
3	$R/2$	$10t$	$-8t$
4	R	$0,4t^3$	10
5	$R/2$	$-0,5t$	$-9t^2$
6	R	$-0,6t$	8
7	$R/2$	$0,8t$	$6t^2$
8	R	$0,4t^3$	$-10t$
9	$R/2$	$0,5t^2$	$12t^2$

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой $m_1 = 8$ кг по закону $s = AD = F(t)$, где s выражено в метрах, t — в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом M (задан в ньютонметрах; при $M < 0$ его направление противоположно показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т. е. угловую скорость платформы, как функцию времени.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором $s > 0$ (когда $s < 0$, груз находится по другую сторону от точки A). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии $OC = b$ от центра C .

Указания. Задача на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\vec{v}_{отн}$ и переносной $\vec{v}_{пер}$ скоростей, т.е. $\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\vec{v} = m\vec{v}_{отн} + m\vec{v}_{пер}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (стати-

ка), согласно которой $m_z(m\vec{v}) = m_z(m\vec{v}_{отн}) + m_z(m\vec{v}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примере Д5.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси z), как это сделано на рис. 7.7, 0а – 9а.

Момент инерции пластины с массой m относительно оси Cz , перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C , равен:

для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2

$$I_{Cz} = m(a_1^2 + a_2^2)/12;$$

для круглой пластины радиуса R

$$I_{Cz} = mR^2/2.$$

Пример решения. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1 , жесткокреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. 7.8). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M , направленный противоположно ω_0 ; одновременно груз D массой m_2 , находящийся в желобе AB в точке C , начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

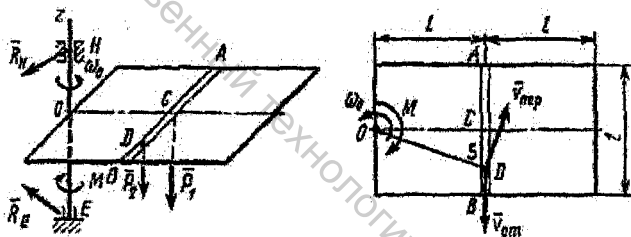


Рисунок 7.8

Дано: $m_1 = 16$ кг, $m_2 = 10$ кг, $l = 0,5$ м, $\omega_0 = 2$ с⁻¹, $s = 0,4t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), $M = kt$, где $k = 6$ Н·м/с. Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D . Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z :

$$\frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e). \quad (7.13)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, реакции $\vec{R}_E$, $\vec{R}_H$ и вращающий момент M . Так как силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ параллельны оси z , а реакции $\vec{R}_E$ и $\vec{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0

(т. е. против хода часовой стрелки), получим $\Sigma m_i(\vec{F}_i^s) = -M = -kt$ и уравнение (7.13) примет такой вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt. \quad (7.14)$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C_1. \quad (7.15)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{ns} + K_z^D, \quad (7.16)$$

где K_z^{ns} и K_z^D – кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси z , то $K_z^{ns} = I_z \omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1 \cdot (OC)^2 = I_{Cz'} + m_1 l^2$ ($I_{Cz'}$ – момент инерции относительно оси z' , параллельной оси z и проходящей через центр C платформы).

Но, как известно,

$$I_{Cz'} = m_1[(2l)^2 + l^2]/12 = 5m_1 l^2/12.$$

Тогда

$$I_z = 5m_1 l^2/12 + m_1 l^2 = 17m_1 l^2/12.$$

Следовательно,

$$K_z^{ns} = (17m_1 l^2/12)\omega. \quad (7.17)$$

Для определения K_z^D обратимся к рис. 7.8 и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$. Так как груз D движется по закону $s = CD = 0,4t^2$, то $v_{отн} = \dot{s} = 0,8t$; изображаем вектор $\vec{v}_{отн}$ на рис. 7.8, б с учетом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\vec{v}_{отн}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω_0 , изображаем вектор $\vec{v}_{пер}$ ($\vec{v}_{пер} \perp OD$); численно $v_{пер} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона,

$$\begin{aligned} K_z^D &= m_2(m_2 \vec{v}) = m_2(m_2 \vec{v}_{отн}) + m_2(m_2 \vec{v}_{пер}) = -m_2 v_{отн} \cdot OC + m_2 v_{пер} \cdot OD = \\ &= -m_2 \cdot 0,8tl + m_2 \omega (OD)^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Но на рисунка видно, что $OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16t^4$. Подставляя эту величину в равенство (7.18), а затем значения K_z^D и K_z^M из (7.18) и (7.17) в равенство (7.16), получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (l^2 + 0,16t^4) - m_2 (0,8t) l = (8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t. \quad (7.19)$$

Тогда уравнение (7.15), где $k=6$, примет вид

$$(8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t = -3t^2 + C_1. \quad (7.20)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t=0$, $\omega=\omega_0$. Получим $C_1=8,17\omega_0=16,34$. При этом значении C_1 из уравнения (7.20) находим искомую зависимость ω от t . Ответ: $\omega = (16,34 + 4t - 3t^2) / (8,17 + 1,6t^4)$, где t – в секундах, ω – в с^{-1} .

7.3.3. Применение дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела

Когда система состоит из одного вращающегося твердого тела (платформа и жестко скрепленный с нею груз), можно сразу составить дифференциальные уравнения движения этого тела и проинтегрировать его, учтя начальные условия.

Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени в соответствии с требованиями методики.
2. Направить одну из декартовых координат (ось z) по оси вращения твердого тела.
3. Изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу.
4. Вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения.

5. Записав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси $J_z \ddot{\varphi} = \Sigma m_i (\vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^*)$, подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции J_z твердого тела относительно оси вращения и решить, в зависимости от условия, прямую или обратную задачи. Выполнив пункты 1-4 рекомендованной последовательности решения задачи (см. рис. 7.6), запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$J_z \ddot{\varphi} = \Sigma m_i (\vec{F}_i^e)_z = M,$$

где $J_z = J_{z1} + J_{z2}$, а $J_{z1} = J_{zc} + m_1 OC^2$, $J_{z2} = m_2 \cdot OD^2$. Тогда $J_z = J_{zc} + m_1 \cdot OC^2 + m_2 \cdot OD^2$.

Учитывая, что ранее подробно рассмотрено решение этой задачи, используемые здесь обозначения не поясняются, а представлены в виде формул. Студенту следует пояснить все используемые формулы и уравнения.

Следовательно,

$$(J_{zc} + m_1 \cdot OC^2 + m_2 \cdot OD^2) \ddot{\varphi} = M = 12t, \text{ или}$$

$$\left\{ \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 + m_2 [(1,5R)^2 + 0,6^2] \right\} \ddot{\varphi} = 12t$$

Тогда $80,64 \ddot{\varphi} = 12t$ или $\ddot{\varphi} = 12t$. Получено то же самое дифференциальное уравнение. Искомый закон вращения платформы $\varphi = 0,0025t^3 + 10t$.

7.4 Применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

Решение задачи динамики плоского движения твердого тела рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1. Изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу.
2. Выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ .
3. Составить дифференциальные уравнения плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела. При этом следует помнить, что в третьем уравнении $J_c \ddot{\varphi} = \Sigma m_i (\vec{F}_i^e)_c$ момент сил инерции твердого тела J_c и сумма моментов всех внешних сил $\Sigma m_i (\vec{F}_i^e)_c$ вычисляются относительно оси, проходящей через центр масс C твердого тела, перпендикулярно к неподвижной плоскости.
4. Интегрированием системы дифференциальных уравнений движения определить уравнение (закон) твердого тела, центра масс C барабана.

7.4.1 Пример 1

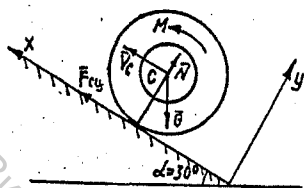


Рисунок 7.9

Дано: $\alpha = 30^\circ$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$,
 $M = 0,4PR$, P ; R , $v_0 = 0$.

Определить закон $x_c = f(t)$ движения центра масс барабана и наименьшее значение коэффициента трения (сцепления) $f_{\min}$ о плоскость (рис. 7.9).

На барабан действуют сила тяжести $\vec{G}$, нормальная реакция $\vec{N}$, пара сил с моментом M и сила трения (сцепления) $\vec{F}_{cy}$. Предполагаем, что барабан вращается против движения часовой стрелки и движется вверх. Ось x направим в ту сторону, куда предположили направленной скорость $\vec{v}_c$ центра масс барабана.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения барабана

$$m\ddot{x}_c = \Sigma F_{kx}^e; \quad m\ddot{y}_c = \Sigma F_{ky}^e; \quad J_c\ddot{\phi} = \Sigma m_c(\vec{F}_k^e)$$

Учитывая действующие на барабан силы, их можно записать в виде

$$m\ddot{x}_c = -G \sin \alpha + F_{cy} = -mg \sin 30^\circ + F_{cy}; \quad (7.21)$$

$$m\ddot{y}_c = N - G \cos \alpha = N - mg \cos 30^\circ; \quad (7.22)$$

$$J_c\ddot{\phi} = M - F_{cy}R. \quad (7.23)$$

Так как $y_c = R = \text{const}$, то $\ddot{\phi}_c = 0$. Поэтому из уравнения (7.22) следует, что $N = mg \cos 30^\circ$.

При качении барабана без скольжения точка его соприкосновения с плоскостью является мгновенным центром скоростей. Поэтому угловая скорость его вращения $\omega = \frac{v_c}{R}$ или $\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}_c}{R}$, откуда $\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}_c}{R}$.

Подставив $\ddot{\phi}$ в (7.23), получим

$$J_c\ddot{\phi} = m \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_c}{R} = M - F_{cy}R, \quad (7.24)$$

где $J_c = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции барабана.

Разделив обе части уравнения (7.21) на (7.24), получим равенство, в котором исключено $\ddot{x}_c$ и из которого можно найти F_{cy}

$$\frac{2}{R} = \frac{-mg \sin 30^\circ + F_{cy}}{M - F_{cy} R}.$$

Тогда $2M - 2F_{cy}R = -mg \sin 30^\circ R + F_{cy}R$ или $3F_{cy}R = 2M + mg \sin 30^\circ R$. Откуда

$$F_{cy} = \frac{2M + mg \sin 30^\circ R}{3R}. \quad (7.25)$$

Следовательно, сила сцепления

$$F_{cy} = \frac{2M + mg \sin 30^\circ R}{3R} = \frac{2 \cdot 0,4PR}{3R} + \frac{P \sin 30^\circ R}{3R} = \frac{0,8P}{3} + \frac{P}{6} = 0,44P.$$

Если при расчетах получится $F_{cy} < 0$, то это лишь означает, что фактически сила F_{cy} направлена в другую сторону, в остальном весь расчет будет верным.

При определении наименьшего значения коэффициента трения (сцепления), при котором возможно качение без скольжения, следует учесть, что сила трения (сцепления) не может быть больше предельной, т.е. что $[F_{cy}] \leq fN$, откуда $f \geq [F_{cy}]/N$. Следовательно, $f_{\min} = \frac{[F_{cy}]}{N} = \frac{0,44P}{P \cos 30^\circ} = \frac{0,44}{\cos 30^\circ} = 0,506$.

Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем $|N|$, так как в данной задаче не может быть $N < 0$).

Подставив равенство (7.25) в (7.21), получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \frac{2M + mg \sin 30^\circ R}{3R} - mg \sin 30^\circ = \frac{2M}{3R} + \frac{mg \sin 30^\circ}{3} - mg \sin 30^\circ = \\ &= \frac{2 \cdot 0,4mgR}{3R} - \frac{2}{3} mg \sin 30^\circ = \frac{0,8}{3} mg - \frac{2}{3} mg \sin 30^\circ = 2,61m - 3,26m = -0,656m. \end{aligned}$$

Следовательно, $\ddot{x}_c = -0,66$.

Дважды интегрируя это уравнение, получим

$$\dot{x}_c = -0,66t + C, \quad x_c = -0,33t^2 + C_1t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 , используем заданные начальные условия. При $t=0$, $x_{c_0}=0$, $\dot{x}_{c_0}=v_0=0$. Тогда при $t=0$ $\dot{x}_c=0=C_1$; $x_c=0=C_2$, $C_2=0$.

Подставив C_1 и C_2 , получим закон движения центра масс барабана в виде

$$x_c = -0,33r^2.$$

Знак «минус» у величины x_c показывает, что барабан движется не вверх, а вниз по наклонной плоскости.

7.4.2 Пример 2

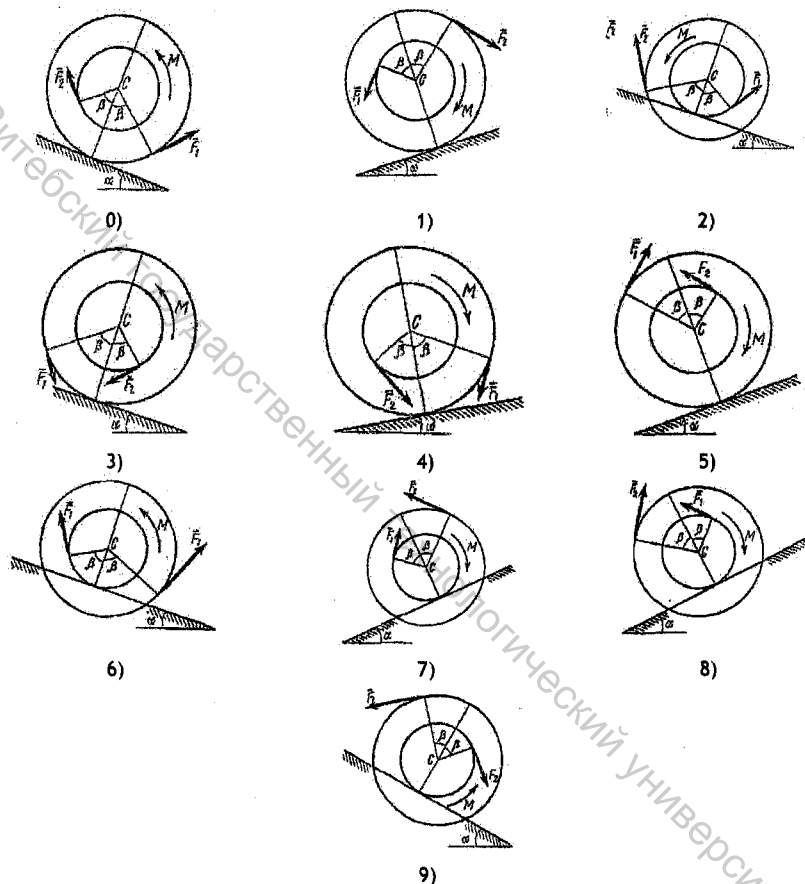


Рисунок 7.10

Таблица 7.4

Номер условия	α	β	F_1	F_2	M
	град				
0	30	60	0	$0,4P$	0
1	30	30	$0,2P$	0	0
2	0	30	0	$0,2P$	$0,1PR$
3	30	—	0	0	$0,4PR$
4	30	90	$0,1P$	0	$-0,2PR$
5	0	60	$0,3P$	$0,1P$	0
6	30	0	0	$0,3P$	$0,2PR$
7	0	60	$0,2P$	0	$0,3PR$
8	30	90	0	$0,2P$	$-0,4PR$
9	30	60	$0,1P$	0	$-0,3PR$

Барабан радиуса R весом P имеет выточку (как у катушки) радиуса $r = 0,6R$ (рис. 7.10, табл. 7.4). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направления которых определяются углом β ; кроме сил на барабан действует пара с моментом M ; когда в таблице $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке. При движении, начинающемся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс C барабана, т. е. $x_C = f(t)$, и наименьшее значение коэффициента трения f о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса R .

Указания. Задача на применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует во избежание ошибок в знаках направить координатную ось x в ту сторону, куда предполагается направленным движение центра C барабана, и считать тогда все моменты положительными, когда они направлены в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра C другое, то в ответе получится $a_C < 0$, но найденное значение $|a_C|$ будет верным. Силу трения, когда не ясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону (результат от этого не зависит).

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т. е. что $|F_{mp}| \leq fN$, откуда $f \geq |F_{mp}|/N$. Следовательно, $f_{\min} = |F_{mp}|/N$. Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем $|N|$, так как в данной задаче не может быть $N < 0$). Если при

расчетах получится $F_{\text{тр}} < 0$, то это означает лишь, что фактически сила $\bar{F}_{\text{тр}}$ направлена в другую сторону; в остальном весь расчет будет верен.

Пример решения. Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиуса R и весом P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона α ; на барабан действуют сила $\bar{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 7.11).

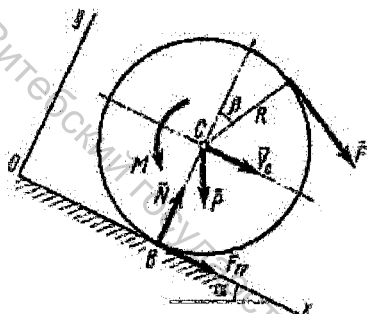


Рисунок 7.11

Дано: $P, F = 0,8P, M = 1,1PR, \alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ$. Определить: 1) $x_C = f(t)$ — закон движения центра масс барабана; 2) $f_{\min}$ — наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

Решение. Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил $\bar{P}, \bar{F}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}$ и момента M . Так как направление силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$ заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Проводим оси Ox и составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения:

$$m\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}, \quad m\ddot{x}_C = F \cos \beta + P \sin \alpha + F_{\text{тр}}; \quad (7.26)$$

$$m\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}, \quad m\ddot{y}_C = N - P \cos \alpha - F \sin \beta; \quad (7.27)$$

$$I_{Cx} \varepsilon = \Sigma m_{Cx}(\bar{F}_k); \quad \frac{mR^2}{2} \varepsilon = FR - F_{\text{тр}}R - M. \quad (7.28)$$

За положительное направление для моментов принято направление по ходу часовой стрелки, т. е. в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра C от оси Oy .

1. Определение $x_C = f(t)$. Так как ясно, что в нашей задаче $y_C = R = \text{const}$ и $\ddot{y}_C = 0$, то уравнения (7.26) – (7.28) содержат четыре неизвестные величины ($\ddot{x}_C, \varepsilon, N$ и $F_{\text{тр}}$).

Поэтому необходимо найти еще одно соотношение, связывающее эти величины. Для этого учтем, что $\ddot{x}_C = a_C$ (так как центр C движется прямолинейно) и что при качении без скольжения в точке B находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$v_C = \omega R; \quad a_C = \dot{v}_C = \dot{\omega} R = \varepsilon R$$

или

$$\ddot{x}_C = \varepsilon R. \quad (7.29)$$

Теперь из уравнения (7.28) можно исключить ε , подставив в (7.28) найденное значение εR ; деля одновременно обе части уравнения (7.28) на R , получим

$$\frac{1}{2} m \ddot{x}_C = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \quad (7.30)$$

Далее, сложив почленно равенства (7.26) и (7.30), исключим из них F_{mp} и получим

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} m \ddot{x}_C &= F(1 + \cos \beta) + P \sin \alpha - \frac{M}{R} = 0,8P(1 + \cos 30^\circ) + \\ &+ P \sin 30^\circ - 1,1P = 0,89P. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $P = mg$, найдем для определения $x_C = f(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}_C = 0,6g. \quad (7.31)$$

Интегрируя уравнение (7.31), получим

$$\dot{x}_C = 0,6gt + C_1; \quad x_C = 0,3gt^2 + C_1t + C_2. \quad (7.32)$$

По начальным условиям при $t=0$ $v_C = \dot{x}_C = 0$ и $x_C = 0$ (ось y проводим через начальное положение точки C). Подстановка этих величин в равенства (7.32) дает $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Окончательно находим следующий закон движения центра C :

$$x_C = 0,3gt^2. \quad (7.33)$$

2. Определение $f_{\min}$. Для определения f исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству

$$|F_{mp}| \leq fN, \quad (7.34)$$

куда, подчеркиваем, входят модули сил. Величину N находим из уравнения (7.27), учитывая, что $\ddot{y}_C = 0$. Получим

$$N = P \cos \alpha + F \sin \beta = P \cos 30^\circ + 0,8 \sin 30^\circ = 1,27P. \quad (7.35)$$

Значение $F_{тр}$ проще всего найти из уравнения (7.30), заменив в нем $\ddot{x}_C$ его значением (7.31). Получим

$$0,3mg = F - F_{тр} - M/R.$$

Отсюда, так как $mg = P$, то

$$F_{тр} = F - M/R - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (7.36)$$

Знак указывает, что сила $\vec{F}_{тр}$ направлена противоположно показанному на рисунке.

Подставляя значения $F_{тр}$ и N из равенств (7.36) и (7.35) в неравенство (7.34), получим $0,6P \leq 1,27Pf$, откуда $f \geq 0,47$. Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, $f_{min} = 0,47$.

7.5 Применение к изучению движения системы принципа Даламбера

Решение задачи с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке активные силы, действующие на точки системы.
3. Освободить систему от связей, заменить действия связей реакциями, наложенными на каждую из материальных точек системы.
4. Добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек системы.
5. Выбрать системы координат.
6. Составить уравнения равновесия системы сил.
7. Решить составленную систему уравнений, определить искомые величины.

В первом примере изложено решение задачи тремя способами. Студенту рекомендуется решить задачу в общем виде, как это выполнено в варианте 2. В качестве проверки правильности выполненного решения можно использовать вариант 1 или основной вариант решения.

7.5.1. Пример 1

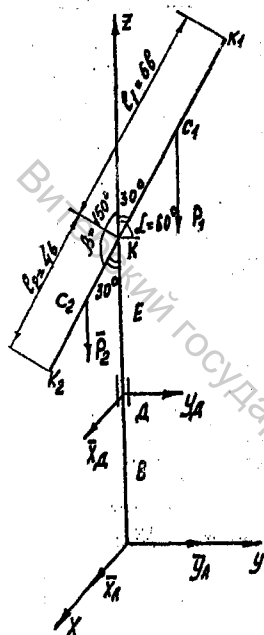


Рисунок 7.12

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\omega = 10 \text{ с}^{-1} = \text{const}$,
 $AB = BD = DE = EK = a = 0,4 \text{ м}$, $m = 10 \text{ кг}$,
 $b = 0,1 \text{ м}$ (рис. 7.12).

Определить: x_A, y_A, z_A, x_D, y_D .

Решение. Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера: рассмотрим систему, находящуюся в равновесии под действием заданных активных сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, реакций связей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D$ и сил инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ (рис. 7.13).

Так как $\omega = \text{const}$, рассмотрим только центробежные силы $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ инерции каждого стержня.

Главный вектор сил инерции точек вращающегося тела определяется по формуле

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c, \quad (7.37)$$

где m — масса тела, а $\vec{a}_c$ — ускорение центра тяжести тела.

В формуле (7.37) знак «-» показывает, что сила инерции направлена против ускорения. Дав такое направление, например, силе $\vec{\Phi}_1$ (см. рис. 7.12 и 7.13), мы тем самым учитываем знак «минус» и в дальнейшем считаем силу $\vec{\Phi}_1$ положительной.

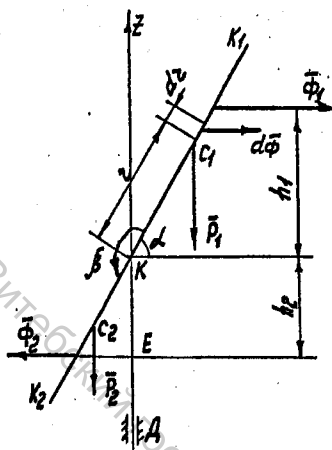


Рисунок 7.13

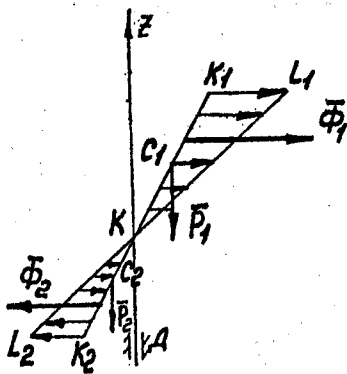


Рисунок 7.14

Равнодействующая сил инерции точек тела равна их главному вектору. Однако при решении следует иметь в виду, что в тех случаях, когда силы инерции приводятся к равнодействующей, последняя совпадает по величине и направлению с главным вектором этих сил. Но равнодействующая сил инерции необязательно проходит через центр масс тела, хотя величина и ее направление всегда определяются по формуле (7.37). Поэтому для стержней KK_1 и KK_2

$$\Phi_1 = m_1 a_{c_1} = m_1 \omega^2 \frac{1}{2} KK_1 \cos \alpha = m \omega^2 \frac{1}{2} 6 \cdot b \cdot \cos \alpha = \omega^2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,1 \cdot \cos 60^\circ = 90 \text{ Н.}$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{c_2} = m_2 \omega^2 \frac{1}{2} KK_2 \cos(\beta - 90^\circ) = \omega^2 m_2 \frac{1}{2} 4b \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ Н}$$

Масса всего стержня $m = m_1 + m_2 = 4b\gamma + 6b\gamma = 10b\gamma$, где $b = 0,1 \text{ м}$, $\gamma = \frac{10 \text{ кг}}{10b} = 10 \text{ кг/м}$. Тогда масса m_1 стержня KK_1 равна $6b\gamma = 6 \text{ кг}$, а масса m_2 стержня KK_2 $4b\gamma = 4 \text{ кг}$.

Для определения реакций подпятника в точке A и подшипника в точке D необходимо знать точки приложения сил $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$.

Так как сумма моментов параллельных сил инерции точек стержня относительно точки K равна моменту равнодействующих этих сил, то

$$\Phi_1 h_1 = \int_0^{h_1} r \sin \alpha d\Phi, \quad (7.38)$$

где h_1 — плечо силы $\vec{\Phi}_1$ относительно точки K , $d\Phi$ — элементарная сила инерции момента стержня длиной dr , r — координата элемента стержня (рис. 7.14).

Подставив значение Φ_1 и $d\Phi = m_1 a_1 = \gamma dr \omega^2 r \cos \alpha$, где γ — масса участка стержня единичной длины, в уравнение (7.38) и сократив обе части неравенства на ω^2 и $\cos \alpha$, получим

$$m_1 \frac{1}{2} K K_1 h_1 = \gamma_1 \sin \alpha \int_0^{l_1} r^2 dr,$$

$$m_1 \frac{1}{2} l_1 h_1 = \gamma_1 \sin \alpha \frac{r^3}{3} \Big|_0^{l_1} = \gamma_1 \sin \alpha \frac{l_1^3}{3} = \gamma_1 l_1 \sin \alpha \frac{l_2}{3}, \text{ где } \gamma l_1 = m_1.$$

Сокращая обе части равенства на m_1 и l_1 , получим $\frac{1}{2} h_1 = \sin \alpha \frac{l_2}{3}$. Откуда

$$h_1 = \frac{2}{3} l_1 \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot b \cdot \sin 60^\circ = 0,35 \text{ м.}$$

Рассматривая аналогично для стержня l_2 , получим $h_2 = \frac{2}{3} l_2 \cos 30^\circ = \frac{2}{3} \cdot 4b \cdot \cos 30^\circ = 0,23 \text{ м.}$

Согласно принципу Даламбера, силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, подшипника $\vec{X}_D, \vec{Y}_D$ и силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ должны удовлетворять уравнениям статики:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_D = 0, \quad (7.39)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A + Y_D + \Phi_1 - \Phi_2 = 0, \quad (7.40)$$

$$\Sigma F_{kz} = Z_A - P_1 - P_2 = 0; \quad (7.41)$$

$$\Sigma m_x(\vec{F}_k) = -Y_D \cdot AD - P_1 \frac{KK_1}{2} \cos \alpha + \quad (7.42)$$

$$+ P_2 \frac{KK_2}{2} \cos(\beta - 90^\circ) - \Phi_1(AK + h_1) + \Phi_2(AK - h_2) = 0;$$

$$\Sigma m_y(\vec{F}_k) = X_D \cdot AD = 0; \quad (7.43)$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0. \quad (7.44)$$

Из уравнения (7.43) $X_D = 0$.

Из уравнения (7.39) $X_A = -X_D = 0$.

Из уравнения (7.41) $Z_A = P_1 + P_2 = P = mg = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ Н}$.

Из уравнения (7.42)

$$-Y_D \cdot 2 \cdot 0,4 - mg \cdot 3b \cdot \cos 60^\circ + m_2 \cdot 2b \cos 60^\circ - 90(4 \cdot 0,4 + 0,35) + 40(4 \cdot 0,4 - 0,23) = 0,$$

$$\text{или } -Y_D \cdot 0,8 - 8,82 + 3,92 - 175,5 + 54,80 = 0.$$

Тогда $Y_D = -150,6 \text{ Н}$.

Из уравнения (7.40) $Y_D = -Y_D - \Phi_1 + \Phi_2 = -(-150,6) - 90 + 40 = 100,6 \text{ Н}$.

Знак «минус» у реакции Y_D показывает, что она имеет направление, противоположное показанному на чертеже.

Другое решение (вариант 1). Пользуясь принципом Даламбера, присоединяем к действующим на систему внешним силам $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, x_A, y_A, z_A, x_D, y_D силу инерции. Для каждого элемента стержня с массой dm центробежная сила инерции равна $dm\omega^2 y$, где y — расстояние элемента от оси вращения AZ (рис. 7.14). Равнодействующая этих распределенных по линейному закону параллельных сил проходит через центр тяжести треугольника KK_1L_1 , который лежит в точке пересечения его медиан, т.е. на расстоянии $h_1 = \frac{2}{3}l_1 \sin \alpha$ от оси, параллельной AU и проходящей через точку K . Так как эта равнодействующая равна главному вектору сил инерции, то по формуле (7.37)

$$\Phi_1 = m_1 a_{c_1} = m_1 \omega^2 y_{c_1} = m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2} \cos \alpha.$$

Рассматривая аналогично для треугольника KK_2L_2 , получим $h_2 = \frac{2}{3}l_2 \cos 30^\circ$, $\Phi_2 = m_2 a_{c_2} = m_2 \omega^2 y_{c_2} = m\omega^2 \frac{l_2}{2} \cos(\beta - 90^\circ)$ (здесь y_{c_1}, y_{c_2} — координаты центров тяжести стержней l_1 и l_2).

Составляя теперь уравнения статики (7.39) – (7.44), получим искомые реакции подпятника A и подшипника B .

Другое решение (вариант 2). Задачу можно решить, не пользуясь результатами варианта 1, а вычисляя сумму моментов сил инерции относительно оси x непосредственно путем интегрирования. Проведем вдоль стержня KK_1 (KK_2) ось Kr . На каждый элемент стержня dr с координатой r действует сила инерции, равная $\omega^2 y dm$. Ее момент относительно оси x (для стержня KK_1) будет

равен $-\omega^2 y_1 dm(AK + r \sin \alpha)$, а для стержня KK_2 равен $\omega^2 y_2 dm(AK - r \cos 30^\circ)$. Тогда уравнение моментов можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Sigma m_x(\vec{F}_k) = & -Y_D \cdot AD - P_1 \frac{KK_1}{2} \cdot \cos \alpha + P_2 \frac{KK_2}{2} \cos(\phi - 90^\circ) - \\ & - \int_0^{l_1} \omega^2 y_1 dm_1 (AK + r \sin \alpha) + \int_0^{l_2} \omega^2 y_2 dm_2 (AK - r \cos 30^\circ) = 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Выражая все величины, стоящие под знаком интегралов, через r , получим $y_1 = r \cos \alpha$, $y_2 = r \cos 60^\circ$, $dm_1 = \frac{m_1}{l_1} dr$, $dm_2 = \frac{m_2}{l_2} dr$.

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & - \int_0^{l_1} \omega^2 y_1 dm_1 (AK + r \sin \alpha) = \\ & = - \int_0^{l_1} \omega^2 r \cos \alpha \cdot \frac{m_1}{l_1} dr (AK + r \sin \alpha) = -\omega^2 \frac{m_1}{l_1} \cdot AK \cos \alpha \int_0^{l_1} r dr - \\ & - \omega^2 \frac{m_1}{l_1} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_0^{l_1} r^2 dr = -10^2 \cdot \frac{6}{0,6} \cdot 1,6 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,6^2}{2} - 10^2 \cdot \frac{6}{0,6} \cdot 0,866 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,6^3}{3} = \\ & = -175,176. \\ & - \int_0^{l_2} \omega^2 y_2 dm_2 (AK - r \cos 30^\circ) = - \int_0^{l_2} \omega^2 r \cos 60^\circ \cdot \frac{m_2}{l_2} dr \cdot (AK - r \cos 30^\circ) = \omega^2 \frac{m_2}{l_2} \cdot AK \cos 60^\circ \int_0^{l_2} r dr - \\ & - \omega^2 \frac{m_2}{l_2} \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ \int_0^{l_2} r^2 dr = 10^2 \cdot \frac{4}{0,4} \cdot 1,6 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,4^2}{2} - 10^2 \cdot \frac{4}{0,4} \cdot 0,5 \cdot 0,866 \cdot \frac{0,4^3}{3} = 54,7627. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.45), находим для Y_D то же выражение, что и в предыдущем решении. Силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ в уравнении (7.40) вычисляются также путем интегрирования.

Составляя уравнения статики, получим уравнения (7.39) – (7.44) для определения искомых неизвестных реакций подпятника A и подшипника D .

7.5.2. Пример 2

Вертикальный вал AK (рис. 7.15), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. 7.5 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10 \text{ кг}$, состоящий из частей 1 и 2 (размеры частей стержня показаны на ри-

сунках, где $b = 0,1$ м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице 7.5 в столбцах 3 и 4, а углы α , β , γ , φ даны в столбцах 5–8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0,6$ м.

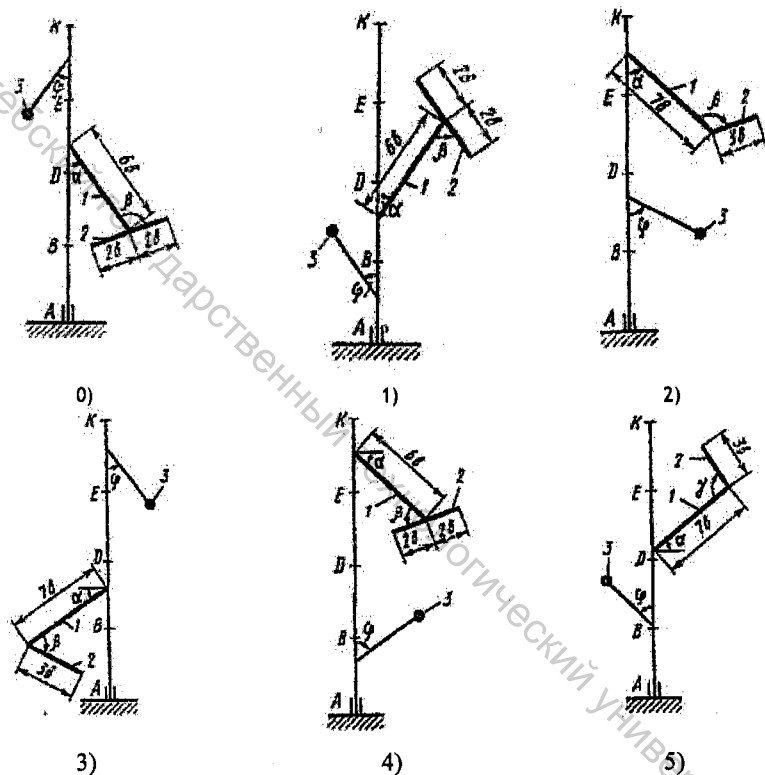
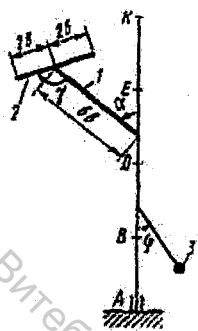
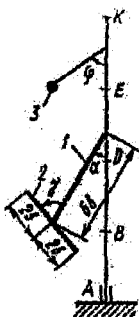


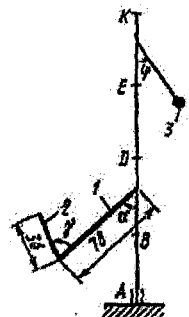
Рисунок 7.15



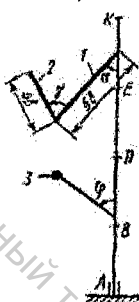
6)



7)



8)



9)

Рисунок 7.15 (окончание)

Таблица 7.5

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α , град	β , град	γ , град	φ , град
		ломаного стержня	нечесомого стержня		рис. 0—4	рис. 5—9	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	B	D	K	45	135	225	60
1	K	B	D	60	240	150	45
2	K	E	B	30	210	120	60
3	D	K	B	60	150	240	30
4	K	D	E	30	120	210	60
5	E	B	K	45	225	135	60
6	E	D	K	60	60	150	30
7	K	B	E	30	30	120	60
8	D	E	K	60	150	60	30
9	E	K	D	30	120	210	60

Указания. Задача на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\vec{R}''$, то численно $R'' = ma_C$, где a_C – ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\vec{R}''$ в общем случае не проходит через точку C .

Пример решения. Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. 7.16), вращается с постоянной угловой скоростью ω . К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей 1 и 2, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

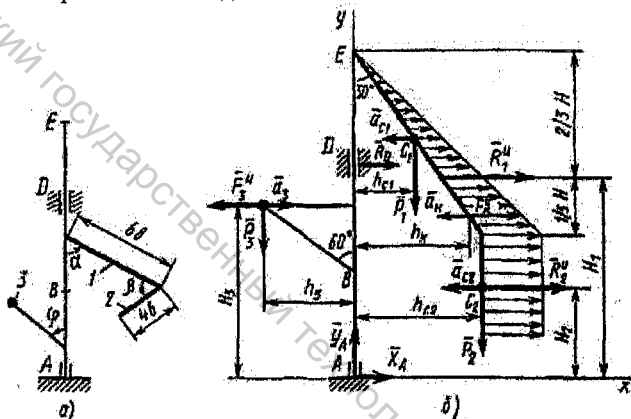


Рисунок 7.16

Дано: $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10 \text{ кг}$, $m_3 = 2 \text{ кг}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $a = 0,3 \text{ м}$, $b = 0,1 \text{ м}$. Определить: реакции подпятника A и подшипника D , пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. 7.16). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0,6m$; $m_2 = 0,4m$;

$P_1 = 0,6mg$; $P_2 = 0,4mg$; $P_3 = m_3g$.	(7.46)
--	--------

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Ax так, чтобы стержни лежали в плоскости xy , и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\vec{R}_D$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\vec{F}_k''$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k'' = \Delta m_k a_{nk} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k — масса элемента. Так как все F_k'' пропорциональны h_k , то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 — прямоугольник (рис. 7.16).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R'' = m a_C$, где m — масса тела, a_C — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1'' = m_1 a_{C1}; \quad R_2'' = m_2 a_{C2}, \quad (7.47)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3'' = m_3 a_3. \quad (7.48)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, \quad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, \quad a_3 = \omega^2 h_3, \quad (7.49)$$

где h_{C1} , h_{C2} — расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 — соответствующее расстояние груза:

$$\begin{aligned} h_{C1} &= 3b \sin 30^\circ = 0,15 \text{ м}; \\ h_{C2} &= 6b \sin 30^\circ = 0,3 \text{ м}; \\ h_3 &= l \sin 60^\circ = 5b \sin 60^\circ = 0,43 \text{ м}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Подставив в (7.47) и (7.48) значения (7.49) и учтя (7.50), получим числовые значения R_1'' , R_2'' и F_3'' :

$$\begin{aligned} R_1'' &= 0,6m\omega^2 h_{C1} = 57,6 \text{ Н}; \\ R_2'' &= 0,4m\omega^2 h_{C2} = 76,8; \\ F_3'' &= m_3 \omega^2 h_3 = 55,0. \end{aligned} \quad (7.51)$$

При этом линии действия равнодействующих $\bar{R}_1''$ и $\bar{R}_2''$ пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\bar{R}_1''$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника E , где $H = 6b \cos 30^\circ$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= 0; X_A + R_D + R_1'' + R_2'' - F_3'' = 0; \\ \Sigma F_{ky} &= 0; Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \\ \Sigma m_A(\bar{F}_k) &= 0;\end{aligned}\tag{7.52}$$

$$-R_D \cdot 2a - P_1 h_{c1} - P_2 h_{c2} + P_3 h_3 - R_1'' H_1 - R_2'' H_2 + F_3'' H_3 = 0,$$

где H_1 , H_2 , H_3 — плечи сил $\bar{R}_1''$, $\bar{R}_2''$, $\bar{F}_3''$ относительно точки A , равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b \cos 30^\circ = 0,52$ м).

$$\begin{aligned}H_1 &= 3a - (2/3)H = 0,55 \text{ м}, \\ H_2 &= 3a - (H + 2b) = 0,18 \text{ м}, \\ H_3 &= a + l \cos 60^\circ = 0,55 \text{ м}.\end{aligned}\tag{7.53}$$

Подставив в уравнения (7.52) соответствующие величины из равенств (7.46), (7.50), (7.51), (7.53) и решив эту систему уравнений (7.52), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33,7$ Н; $Y_A = 117,7$ Н; $R_D = -45,7$ Н.

8.1 Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений

Задачу на равновесие механической системы с одной степенью свободы с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Выделить систему, равновесие которой следует рассмотреть.

2. Изобразить активные силы, действующие на систему.

3. Дать возможное перемещение одной из точек системы, показать на чертеже векторы $\delta \vec{S}_k$ элементарных перемещений точек, приложения сил или углы $\delta \varphi_k$ элементарных поворотов тел, на которые действуют силы, и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения.

Если у системы несколько степеней свободы, то ей надо сообщить одно из независимых перемещений (механизм в рассматриваемой задаче имеет одно независимое возможное перемещение).

4. Вычислить сумму элементарных работ всех активных сил, на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю, т.е. составить уравнение принципа возможных перемещений системы в виде $\sum \delta A_k^a = 0$, который формулируется следующим образом: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю. Уравнение $\sum \delta A_k^a = 0$ называют уравнением возможных работ или общим уравнением статики.

5. Решив полученное уравнение принципа возможных перемещений (уравнение равновесия), определить искомую величину. У систем с несколькими степенями свободы указанный расчет повторяется для каждого независимо перемещения отдельно.

8.1.1 Пример 1

Дано: $AE = BE$, $\alpha = 0$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 0$, $\Theta = 120^\circ$, $C = 100$ Н/см = 10^4 Н/м, $M = 160$ Нм, $Q = 340$ Н, $l_1 = 0,4$ м, $F = c\lambda$.

Определить деформацию λ пружины.

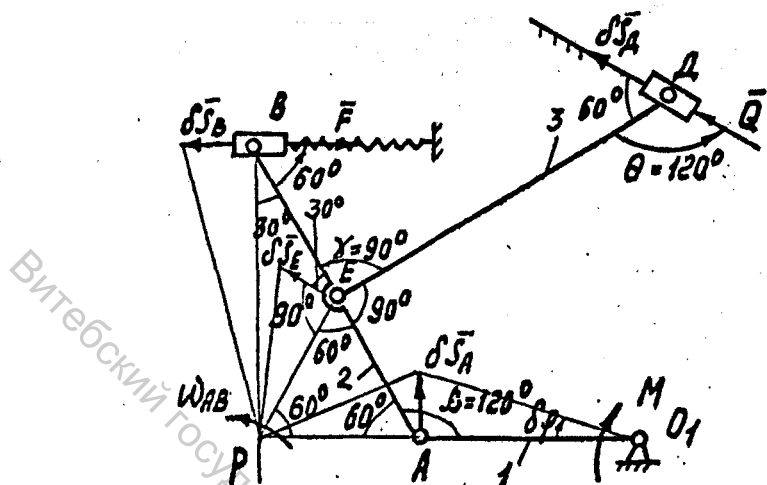


Рисунок 8.1

Рассматриваемый механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится в равновесии под действием следующей системы взаимно уравновешивающихся сил: силы упругости $\bar{F}$, силы $\bar{Q}$ и пары сил, момент которой равен M (рис. 8.1).

Связи, наложенные на механизм, допускают следующие возможные перемещения его звеньев: поворот кривошипа O_1A на угол $\delta\varphi$, перемещение точки A кривошипа O_1A на δS_A , перемещение δS_B ползуна B вдоль направляющих, перемещение δS_D ползуна D вдоль направляющих.

Уравнение возможных работ, выражающее принцип возможных перемещений для рассматриваемого механизма имеет вид:

$$M\delta\varphi + Q\delta S_D - F\delta S_B = 0. \quad (8.1)$$

Найдем зависимость между возможными перемещениями точек системы.

Сообщаем системе возможное перемещение. Кривошип O_1A поворачиваем на угол $\delta\varphi$. Возможное перемещение δS_A для точки A кривошипа O_1A перпендикулярно к OA , направлено по касательной к траектории (окружности с центром в точке O_1), а $\delta S_A = O_1A\delta\varphi$. Звено AB совершает плоское движение. Возможное перемещение δS_B точки B направлено по горизонтали вдоль направляющих.

Зависимость между δS_A и δS_B можно найти, построив мгновенный центр вращения P стержня AB , который лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к векторам $\delta \vec{S}_A$ и $\delta \vec{S}_B$. Тогда возможные перемещения точек A и B так же, как и возможные скорости, пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра вращения звена AB .

Следовательно $\frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{PB}{PA}$. Откуда $\delta S_A \frac{PB}{PA} = \delta S_A \operatorname{tg} 60^\circ = O_1 A \operatorname{tg} 60^\circ \delta \varphi$.

Возможное перемещение δS_E точки E , середины звена AB перпендикулярно PE и определится из аналогичного равенства $\frac{\delta S_E}{\delta S_A} = \frac{PE}{PA}$, откуда

$$\delta S_E = \delta S_A \frac{PE}{PA}$$

Для определения отношения $\frac{PE}{PA}$ рассмотрим треугольник AEP . Угол

$EAP = 60^\circ$. Из треугольника ABP $AP = AB \sin(\angle ABP) = AB \cdot \frac{1}{2} = AE$ (по условию $AB = 2AE$). Поэтому и угол $APE = \angle AEP = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Следовательно, в треугольнике APE все углы равны, и он равносторонний, т.е. $AP = AE = PE$. Поэтому $\frac{PE}{PA} = 1$, $\delta S_E = \delta S_A = O_1 A \cdot \delta \varphi$.

Теперь нужно найти зависимость между δS_E и δS_D . Так как расстояние между точками E и D при возможном перемещении системы остается неизменным, то проекции возможных перемещений этих точек на прямую ED , их соединяющую, равны между собой

$$np_{ED}(\delta \vec{S}_E) = np_{ED}(\delta \vec{S}_D), \text{ т.е. } \delta S_E \cos 60^\circ = \delta S_D \cos 60^\circ.$$

$$\text{Откуда } \delta S_D = \delta S_E = O_1 A \cdot \delta \varphi.$$

Сила упругости пружины пропорциональна ее деформации $F = c\lambda$. Подставив в уравнение работ (8.1) выражения силы упругости F и возможных перемещений δS_D и δS_B точек системы, получим

$$M \cdot \delta \varphi + Q \cdot O_1 A \cdot \delta \varphi - c\lambda \cdot O_1 A \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \delta \varphi = 0;$$

$$\lambda = \frac{M + Q \cdot O_1 A}{c \cdot O_1 A \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{M + Q \cdot l_1}{c \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}, \text{ или } \lambda = \frac{160 + 340 \cdot 0,4}{10000 \cdot 0,4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0,0427 \text{ м} = 4,27$$

см.

Следовательно, пружина растянута на 4,27 см.

8.1.2 Пример 2

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α , β , γ , φ , θ (рис. 8.2, табл. 8.1). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: $l_1 = 0,4$ м, $l_4 = 0,6$ м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка E находится в середине соответствующего стержня.

На ползун B механизма действует сила упругости пружины $\bar{F}$; численно $F = c\lambda$, где c — коэффициент жесткости пружины, λ — ее деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун D действует сила $\bar{Q}$, а на кривошип O_1A — пара сил с моментом M ; на рис. 2 и 9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2 (рис. 8.2).

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. 8.1, где Q выражено в ньютонах, а M , M_1 , M_2 — в ньютонметрах.

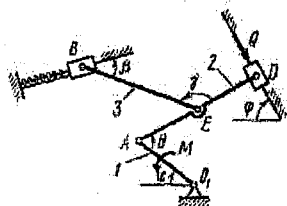
Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере решения (см. рис. 8.4, а также рис. 8.3, б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну B стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. 8.3, а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. 8.3, б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Указания. Задача на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т. е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

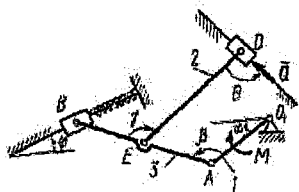
Чтобы найти λ , надо из полученного условия равновесия определить силу упругости F . На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т. е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

Пример решения. Механизм (рис. 8.4), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунков B , D , соединенных друг с другом и с неподвижной опорой O шарнирами. К ползуну B прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c , к ползуну D приложена сила $\bar{Q}$, а к стержню 1 (кривошипу) — пара сил с моментом M .

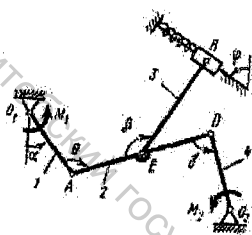
Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $l = 0,4$ м, $AE = ED$, $c = 125$ Н/см, $M = 150$ Н·м, $Q = 350$ Н. Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.



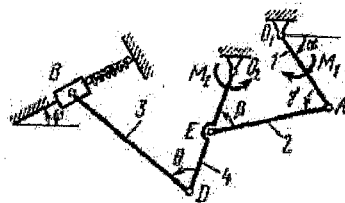
0)



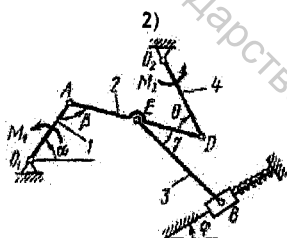
1)



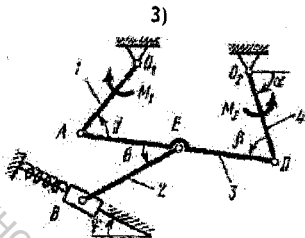
2)



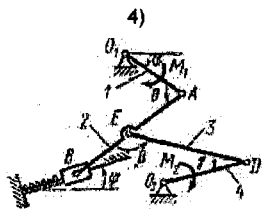
3)



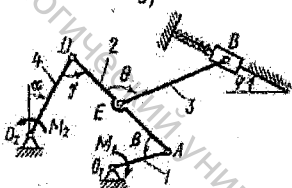
4)



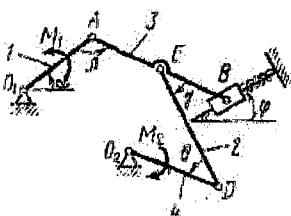
5)



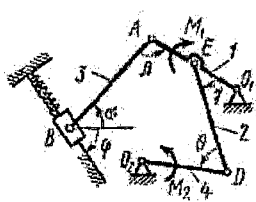
6)



7)



8)



9)

Рисунок 8.2

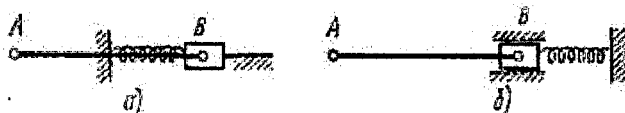


Рисунок 8.3

Таблица 8.1

Номер условия	Углы, град					$c, \text{H/cm}$	Для рис. 0—1		Для рис. 2—4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Для рис. 5—9

Номер условия	Углы, град					$c, \text{H/cm}$	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 8.3, б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д9 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180^\circ$).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\Sigma \delta A_k = 0,$$

(8.2)

где δA_k — элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

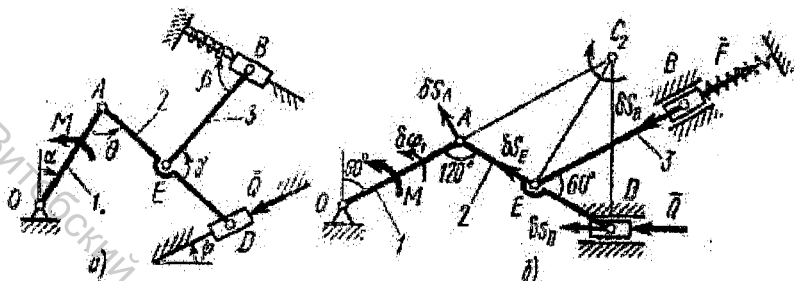


Рисунок 8.4

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\bar{Q}$, силу упругости $\bar{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом M .

Неизвестную силу F найдем с помощью уравнения (8.2), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ .

2. Чтобы составить уравнение (8.2), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ — поворот стержня 1 вокруг оси O , δs_D и δs_B — перемещения ползунов (точек) D и B .

Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D , δs_B независимое от других — одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут δs_D и δs_B , выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления δs_D , δs_B , так как иначе в уравнении (8.2) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями.

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = l_1 \delta\varphi_1; \delta s_A \perp OA. \quad (8.3)$$

Теперь определим и изобразим δs_D , учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую AD должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30^\circ = \delta s_A \cos 30^\circ \text{ и } \delta s_D = \delta s_A = l_1 \delta \varphi_1. \quad (8.4)$$

Чтобы определить δs_B , найдем сначала δs_E . Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня 2 (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_D , восстановленных из точек A и D) и покажем направление поворота стержня 2 вокруг C_2 , учтя направление δs_A или δs_D . Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60^\circ$, то $\triangle AC_2D$ – равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку $AE = ED$. Тогда перемещение δs_E , перпендикулярное C_2E , будет направлено по прямой EA (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2).

Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую EA должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30^\circ = l_1 \delta \varphi_1 \cos 30^\circ. \quad (8.5)$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую BE находим и изображаем δs_B . Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60^\circ = l_1 \delta \varphi_1 \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,43 l_1 \delta \varphi_1. \quad (8.6)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (8.2); получим

$$M \delta \varphi_1 + Q \delta s_D - F \delta s_B = 0 \quad (8.7)$$

или, заменяя здесь δs_D и δs_B их значениями (8.4) и (8.6) и вынося одновременно $\delta \varphi_1$ за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0,43 l_1 F) \delta \varphi_1 = 0. \quad (8.8)$$

Так как $\delta \varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0,43 l_1 F = 0. \quad (8.9)$$

Из уравнения (8.9) находим значение F и определяем $\lambda = F/c$. Ответ: $\lambda = 13,5$ см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

8.2 Применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера-Лагранжа)

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, получим общий метод решения задач динамики $\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^o = 0$. Данное равенство представляет собой общее уравнение динамики, которое может быть прочитано следующим образом: при движении системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю.

Задачу с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.
2. Изобразить активные силы, действующие на систему.
3. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.
4. Определить алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции.
5. Дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил через это возможное перемещение.
6. Вычислить сумму работ всех сил на возможных перемещениях точек системы. При этом определить знаки работ сил инерции и моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы.
7. Составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю.
8. После сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину.

Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если — отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

8.2.1. Пример 1

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 20$ Н, $P_3 = 10$ Н, $P_4 = 30$ Н, $P_5 = 0$, $P_6 = 40$ Н, $M = 1,8$ Нм, $R_1 = 0,2$ м, $r_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,3$ м, $r_2 = 0,15$ м, $\rho_2 = 0,2$ м.

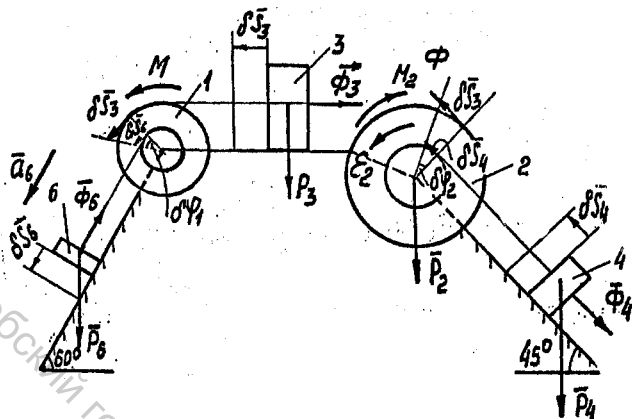


Рисунок 8.5

Определить ускорение a_6 груза, имеющего больший вес, т.е. шестого.

Для решения задачи применим общее уравнение динамики.

Покажем задаваемые силы: силы тяжести $\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_6$ — сила тяжести шкива 2, грузов 3, 4 и 6, момент пары сил M , приложенный к шкиву 1 (рис. 8.5).

Приложим силы инерции шкива 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ϵ_2 , которые приводятся к паре сил инерции с моментом $|M_2^\Phi| = J_{2x}\epsilon_2$, где $J_{2x} = m_2\rho_2^2$ — момент инерции шкива 2 относительно оси его вращения; направление M_2^Φ противоположно направлению ϵ_2 .

Силы инерции грузов 3, 4, 6, движущихся поступательно с ускорениями $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_6$, определяются по формулам: $\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_3$; $\vec{\Phi}_4 = -m_4\vec{a}_4$; $\vec{\Phi}_6 = -m_6\vec{a}_6$. Здесь знак «минус» показывает, что сила инерции направлена против ускорения. Дав такое направление силам $\vec{\Phi}_3, \vec{\Phi}_4, \vec{\Phi}_6$, мы тем самым учитываем знак «минус» и в дальнейшем считаем силы положительными. Мысленно остановив систему, сообщим ей возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. 8.5).

Дадим грузу 6 возможное перемещение δS_6 , направив его параллельно наклонной плоскости вниз. не следует считать, что направление движения какого-либо груза и его возможного перемещения должны обязательно совпадать. Направление движения груза завивит от системы сил, которые к ней приложены, возможное же перемещение груза, рассматриваемое из данного положения,

зависит только от связей, наложенных на этот груз, в остальном оно произвольно. В данной задаче движение системы таково, что груз 6 опускается, при этом, в силу нерастяжимости нитей, грузы 3 и 4 получают возможные перемещения δS_3 и δS_4 , направленные соответственно по горизонтали и вдоль наклонной плоскости вверх, а шкивы 1 и 2 получают соответственно возможные угловые перемещения $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Взяв точку нити на ободе ступени шкива, получим зависимость между линейными и угловым возможными перемещениями $\delta S = r\delta\varphi$, где r — радиус ступени шкива. Как видно, точка нити, лежащая на ободе ступени шкива, получает возможное перемещение $r\delta\varphi$.

Составим общее уравнение динамики:

$$P_6 \sin 60^\circ \delta S_6 - \Phi_6 \cdot \delta S_6 + M \delta\varphi_1 - \Phi_3 \delta S_3 - M_2^{\Phi} \cdot \delta\varphi_2 - P_4 \sin 45^\circ \cdot \delta S_4 - \Phi_4 \cdot \delta S_4 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} P_6 \sin 60^\circ \delta S_6 - m_6 a_6 \cdot \delta S_6 + M \delta\varphi_1 - m_3 a_3 \delta S_3 - \\ - J_{2x} \cdot \varepsilon_2 \delta\varphi_2 - P_4 \sin 45^\circ \cdot \delta S_4 - m_4 a_4 \cdot \delta S_4 = 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Установим зависимость между возможными перемещениями и между ускорениями, входящими в равенство (8.10), учитывая то, что эти зависимости такие же, как между соответствующими скоростями.

Зависимости между возможными перемещениями можно представить (см. рис. 8.5) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_3}{\delta S_6} = \frac{R_1}{r_1}, \text{ откуда } \delta S_3 = \delta S_6 \frac{R_1}{r_1}; \delta\varphi_1 = \frac{\delta S_6}{r_1}; \\ \frac{\delta S_4}{\delta S_6} = \frac{R_2}{r_2}, \text{ откуда } \delta S_4 = \delta S_6 \frac{r_2}{R_2} = \delta S_6 \frac{R_1 r_2}{r_1 R_2}; \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_3}{R_2} = \delta S_6 \frac{R_1}{r_1 R_2}. \end{aligned}$$

Зависимости между ускорениями можно представить в виде:

$$\begin{aligned} a_1^r = a_6 = \varepsilon_1 r_1, \text{ откуда } \varepsilon_1 = \frac{a_6}{r_1}; \quad a_3^r = \varepsilon_1 R_1 = a_3, \text{ откуда } a_3 = a_6 \frac{R_1}{r_1}, \\ a_4 = a_2^r = \varepsilon_2 R_2, \text{ откуда } \varepsilon_2 = \frac{a_4}{R_2} = a_6 \frac{R_1}{r_1 R_2}; \quad a_2^r = \varepsilon_2 r_2 = a_2, \text{ откуда } a_2 = a_6 \frac{R_1 r_2}{r_1 R_2}. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения в уравнение (8.10), после почленного сокращения уравнения на δS_6 получим

$$P_6 \sin 60^\circ - \frac{P_6}{g} a_6 + \frac{M}{r_1} - \frac{P_3}{g} a_6 \frac{R_1^2}{r_1^2} - \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 a_6 \frac{R_1^2}{r_1^2 R_2^2} - P_4 \sin 45^\circ \cdot \frac{R_1 r_2}{r_1 R_2} - \frac{P_4}{g} a_6 \cdot \frac{R_1^2 r_2^2}{r_1^2 R_2^2} = 0.$$

Подставляя значения данных по условию задачи, получим

$$40 \sin 60^\circ - \frac{40}{9,8} a_6 + \frac{1,8}{0,1} - \frac{10}{9,8} a_6 \left(\frac{0,2}{0,1} \right)^2 - \frac{20}{9,8} \cdot (0,2)^2 a_6 \frac{0,2^2}{0,1^2 \cdot 0,3^2} - \\ - 30 \sin 45^\circ \cdot \frac{0,2 \cdot 0,15}{0,1 \cdot 0,3} - \frac{30}{9,8} a_6 \cdot \frac{0,2^2 \cdot 0,15^2}{0,1^2 \cdot 0,3^2} = 0;$$

$19,35 = 14,8 a_6$; и, следовательно, искомое ускорение груза $a_6 = 1,3 \text{ м/с}^2$.

8.2.2. Пример 2

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3–6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. 8.6, табл. 8.2). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_1 = 0,1 \text{ м}$, а шкива 2 – $R_2 = 0,3 \text{ м}$, $r_2 = 0,15 \text{ м}$; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0,1 \text{ м}$ и $\rho_2 = 0,2 \text{ м}$.

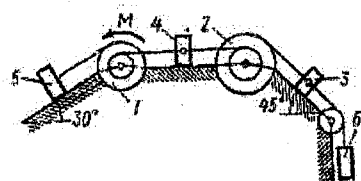
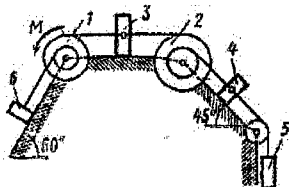
Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса $P_1, \dots, P_6$ шкивов и грузов заданы в таблице 8.2 в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Указания. Задача на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера – Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче, рассмотренной в разделе 8.1.2, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M'' = I_z \varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление M'' противоположно направлению ε .

Пример решения задачи. Механическая система (рис. 8.7) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2 , радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , приложенной к блоку 1.

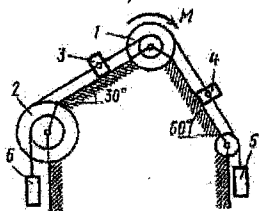
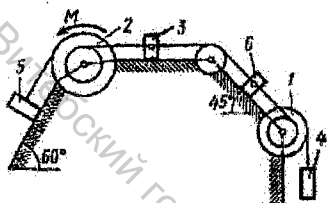
Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30 \text{ Н}$, $P_3 = 40 \text{ Н}$, $P_4 = 20 \text{ Н}$, $M = 16 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $R_1 = 0,2 \text{ м}$, $R_2 = 0,3 \text{ м}$, $r_2 = 0,15 \text{ м}$, $\rho_2 = 0,2 \text{ м}$. Определить ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.



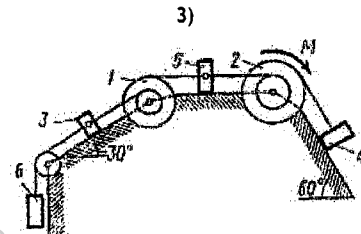
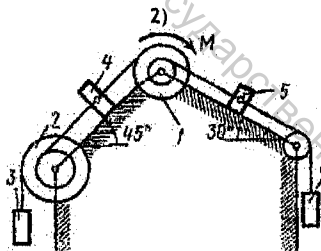
0)

1)



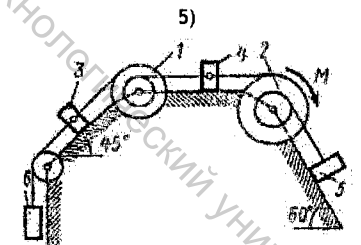
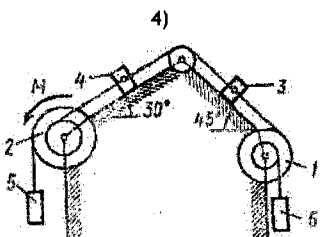
2)

3)



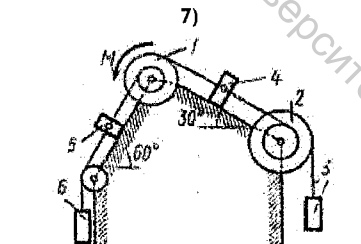
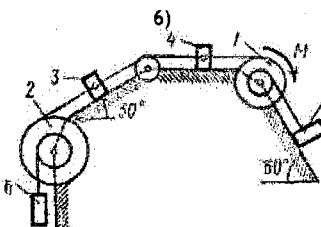
4)

5)



6)

7)



8)

9)

Рисунок 8.6

Таблица 8.2

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

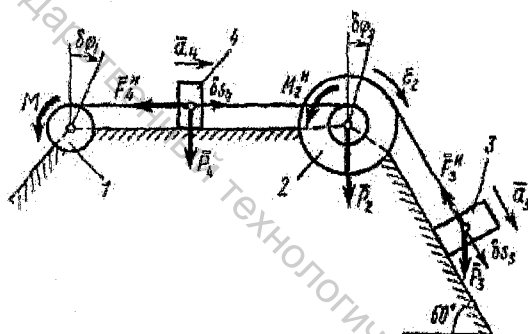


Рисунок 8.7

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\Sigma \delta A_k^a + \Sigma \delta A_k^u = 0, \quad (8.11)$$

где $\Sigma \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил; $\Sigma \delta A_k^u$ – сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ и пару сил с моментом M . Задавшись направлением ускорения a_3 , изображаем на чертеже силы инерции $\bar{F}_3^u, \bar{F}_4^u$ и пару сил инерции с моментом M_2^u , величины которых равны

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3, F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4, M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \quad (8.12)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (8.11), получим

$$(P_3 \sin 60^\circ - F_3^u) \delta s_3 - M_2^u \delta \varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M \delta \varphi_1 = 0. \quad (8.13)$$

Выразим все перемещения через $\delta \varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta \varphi_2; \delta s_4 = r_2 \delta \varphi_2; \delta \varphi_1 = \frac{r_2}{R_1} \delta \varphi_2. \quad (8.14)$$

Подставив величины (8.12) и (8.14) в уравнение (8.13), приведем его к виду

$$\left[P_3 \left(\sin 60^\circ - \frac{a_3}{g} \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] \delta \varphi_2 = 0. \quad (8.15)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3 :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3.$$

Затем, учтя, что $\delta \varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (8.15) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^\circ - M(r_2/R_1)}{P_3 R_2 + P_2 \rho_2^2/R_2 + P_4(r_2^2/R_2)} g.$$

Вычисления дают следующий ответ: $a_3 = -0,9 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанному на рис. 8.7.

8.3 Применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения несвободной системы матери-

альных точек при наличии двусторонних идеальных голономных связей, выраженных в обобщенных координатах.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ и начальные условия, найти закон движения системы в виде $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, ..., $q_s = q_s(t)$, т.е. определить обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$, как функции времени.

При решении задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода нужно придерживаться такой последовательности.

1. Выяснить характер связей, наложенных на систему. Уравнение Лагранжа второго рода можно применять тогда, когда связи идеальные и голономные.

2. Определить число степеней свободы системы (число обобщенных координат) и выбрать обобщенные координаты.

3. Изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все действующие на систему активные силы; реакции идеальных связей изображать не следует; если имеются силы трения, то их следует присоединить к активным силам.

4. Вычислить кинетическую энергию системы в ее абсолютном движении, выразив ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

5. Найти частные производные $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

6. Вычислить обобщенные силы системы; при этом во избежание ошибок в знаках каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным.

7. Составить уравнения Лагранжа второго рода и решить их в соответствии с поставленной задачей.

Из полученных уравнений, если заданы действующие силы и начальные условия, можно, интегрируя эти уравнения, найти закон движения системы.

Если же задан закон движения, то составленные уравнения позволяют определить действующие силы.

8.3.1. Пример 1

Дано: $P_3 = 2P$, $P_4 = 5P$, $M_4 = 2PR$, c , $\delta = 0$, $v_0 = 0$.

Определить закон изменения обобщенной координаты $x = f(t)$, а также частоту k и период T колебаний, совершаемых телом 3.

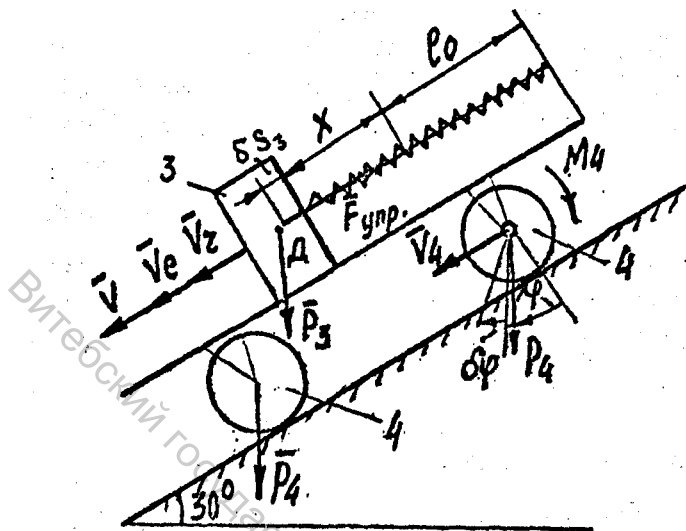


Рисунок 8.8

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система (рис. 8.8) имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота колеса φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi, q_2 = x$). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (8.16)$$

Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_3 + 2T_4. \quad (8.17)$$

Так как груз D движется поступательно, а колесо — плоскопараллельно, то

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}, \quad T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2, \quad (8.18)$$

где $J_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2}$ (R_4 – радиус колеса 4).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\phi}$ и $\dot{x}$.

Мгновенный центр скоростей колеса 4 находится в точке касания и плоскости, поэтому угловая скорость его вращения $\omega_4 = \frac{V_4}{R_4}$. Откуда скорость центра колеса $V_4 = \omega_4 R_4$. Очевидно, что $\omega_4 = \dot{\phi}$, $V_4 = R_4 \dot{\phi}$. Для $\vec{V}_D$, рассматривая движение груза как сложное и учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, будем иметь $\vec{V}_D = \vec{V}_D' + \vec{V}_D^e$, где численно $V_D' = \dot{x}$, $V_D^e = V_4 = R_4 \dot{\phi}$. Тогда, принимая во внимание, что при возрастании ϕ и x скорости $\vec{V}_D'$ и $\vec{V}_D^e$ направлены в одну сторону, получим $V_D = \dot{x} + R_4 \dot{\phi} = V_3$.

Подставляя все найденные значения скоростей и значение J_4 в равенстве (8.18) и учитывая, что $P_3 = 2P$, а $P_4 = 5P$, получим из (8.17) следующее выражение для T :

$$T = \frac{m_3 V_3^2}{2} + 2 \left(\frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 \right) = \frac{m_3}{2} (\dot{x} + R_4 \dot{\phi})^2 + 2 \left(\frac{m_4}{2} R_4^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_4 R_4^2}{2} \cdot \dot{\phi}^2 \right),$$

или окончательно будем иметь

$$T = \frac{P}{g} (\dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\phi} + 8,5R^2\dot{\phi}^2). \quad (8.19)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{P}{g} (2R\dot{x} + 17R^2\dot{\phi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{P}{g} (2\dot{x} + 2R\dot{\phi}); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Теперь определим обобщенные силы Q_ϕ и Q_x . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силу упругости $\vec{F}$, где численно $F = c\lambda$, и пару с моментом M_4 . Для определения Q_ϕ сообщим системе возможное перемещение, при котором координата ϕ получает приращение $\delta\phi > 0$, а x не изменяется, т.е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр D груза 3 получают одинаковые перемещения $\delta S_4 = \delta S_D = R\delta\phi$ и элементарная работа действующих сил будет равна

$$\delta A_\phi = Q_\phi \delta\phi = -M\delta\phi + 2P_4 \sin 30^\circ R_4 \delta\phi + P_3 \sin 30^\circ R_4 \delta\phi.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_{\varphi} = 4PR\delta\varphi. \quad (8.21)$$

Для определения Q_x сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т.е. $\delta\varphi = 0$ (колеса не поворачиваются и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершают только силы $\vec{P}_3$ и $\vec{F}$, и, учтя, что $P_3 = 2P$, будем иметь

$$\delta A_x = Q_x \delta x = P_3 \sin 30^\circ \delta x - cx \delta x = (P - cx) \delta x. \quad (8.22)$$

Коэффициенты при $\delta\varphi$ и δx в равенствах (8.21) и (8.22) и будут искомыми обобщенными силами; следовательно,

$$Q_{\varphi} = 4PR, \quad Q_x = P - cx. \quad (8.23)$$

Подставляя величины (8.20) и (8.23) в уравнения (8.16), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}(2R\ddot{x} + 17R^2\ddot{\varphi}) = 4PR; \quad \frac{P}{g}(2\ddot{x} + 2R\ddot{\varphi}) = P - cx. \quad (8.24)$$

Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (8.24) $\ddot{\varphi}$. Получим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} = k^2 x = a, \text{ где } k^2 = \frac{17cg}{30P}; \quad a = \frac{3}{10}g. \quad (8.25)$$

Общим решением уравнения (8.25), как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т.е. $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, а x_2 — частное решение уравнения (8.25). Будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A = \text{const}$. Подставляя значение x_2 в уравнение (8.25), получим $x_2 = \frac{a}{k^2}$. Таким образом, общее решение уравнения (8.25) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{a}{k^2}, \quad (8.26)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную $\dot{x}$ от x по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (8.27)$$

По начальным условиям при $t = 0$ $x = \delta = 0$, $\dot{x} = V_0 = 0$ (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подстав-

для эти величины в уравнения (8.26) и (8.27), найдем из них, что $C_1 = -\frac{a}{k^2}$, $C_2 = 0$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = f(t)$ в виде

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt), \quad (8.28)$$

где значения a и k^2 даются последними двумя из равенств (8.25). Таким образом, центр D груза совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (8.28). Круговая частота k и период этих колебаний T будут:

$$k = \sqrt{\frac{17}{30} \frac{cg}{P}}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{30P}{17cg}}. \quad (8.29)$$

8.3.2. Пример 2

Механическая система состоит из тел 1, 2, ..., 5 весом $P_1, P_2, \dots, P_5$ соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки 1 и 2 (рис. 8.9, табл. 8.3). Радиусы ступенчатых блоков 1 и 2 равны соответственно $R_1 = R$, $r_1 = 0,4R$, $R_2 = R$, $r_2 = 0,8R$. При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R .

На систему кроме сил тяжести действует сила $\bar{F}$, приложенная к телу 3 или 4 (если тело 3 в систему не входит, сила приложена в точке B к тележке), и пары сил с моментами M_1, M_2 , приложенные к блокам 1 и 2; когда $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице 8.3 в столбце «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости c (например, если в столбце стоит AB , то участок AB является пружиной, если AD , то AD – пружина и т.д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты x , т.е. $x = f(t)$, считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты x см. «Указания»).

Проверка в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а ноль – что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером 4, P_4 – их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

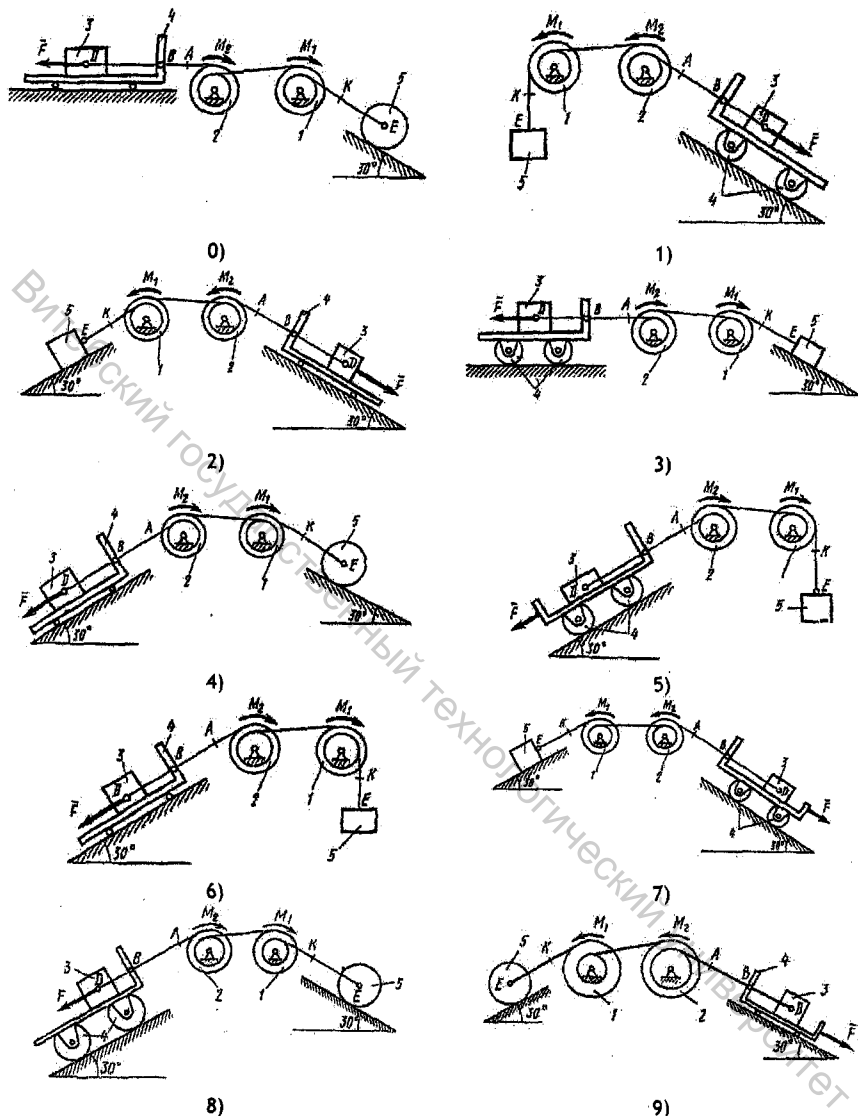


Рисунок 8.9

Указания. Задача на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами q_1 и q_2 и для нее должны быть составлены два уравнения.

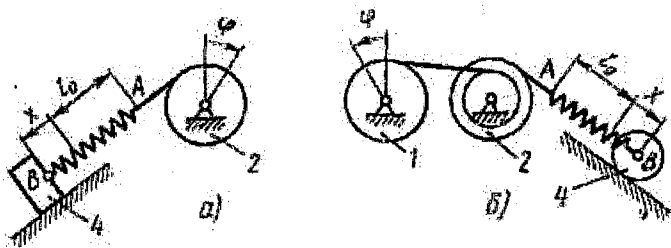


Рисунок 8.10

Таблица 8.3

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	$4P$	0	—	$3P$	—	$4P$	0	0	AB
1	0	$2P$	—	—	$3P$	0	0	$-2PR$	KE
2	0	$2P$	—	—	—	0	$2PR$	0	AB
3	—	0	$2P$	$6P$	—	0	0	$2PR$	BD
4	P	—	—	—	$4P$	0	$-PR$	0	KE
5	—	—	$4P$	$3P$	—	P	0	0	BD
6	$2P$	0	—	—	P	0	0	$-PR$	KE
7	—	$4P$	—	$2P$	—	$3P$	0	$2PR$	AB
8	—	$4P$	$2P$	0	—	0	0	$3PR$	BD
9	$2P$	0	—	P	—	0	$2PR$	0	AB

Решение начать с выбора обобщенных координат, обозначив их $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ или $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$. За координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел 3, 4 или 5 системы, к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к этому телу в точке B и ее длина в произвольный момент времени равна AB , то $x = AB - l_0$, где l_0 — длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит, а входят лишь тела 3 и 4, за координату y принять расстояние тела 4 от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. 8.10. Дальнейший ход решения разъяснен в примере.

Пример решения. Механическая система (рис. 8.11) состоит из барабана 1 радиуса R , к которому приложена пара сил с моментом M , тележки 2 и катка 3 (барабан и каток — однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно P_1 , P_2 , P_3 , весом колес тележки пренебречь. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком — пружиной BD , коэффициент жесткости которой равен c . Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

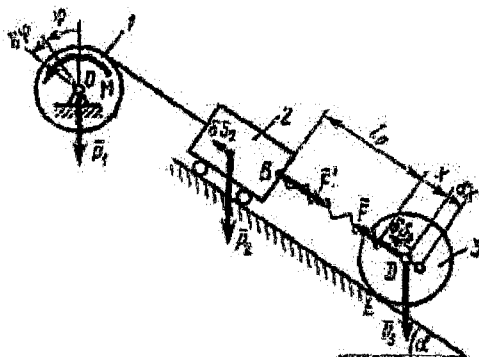


Рисунок 8.11

Дано: $R, c, P_1 = 2P; P_2 = 4P; P_3 = 2P; M = 4PR, \alpha = 30^\circ$. Определить: 1) $x = f(t)$, где x — удлинение пружины (или перемещение центра D катка по отношению к тележке 2); 2) частоту k и период τ колебаний.

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины $x(q_1 = \varphi, q_2 = x)$. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \quad (8.30)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (8.31)$$

Так как барабан вращается вокруг оси O , тележка движется поступательно, а каток — плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_2^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2, \quad (8.32)$$

где $I_O = (P_1/2g)R^2$, $I_D = (P_3/2g)R_3^2$ (R_3 — радиус катка 3).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\phi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\phi}$, $v_2 = R\omega_1 = R\dot{\phi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{om} + \bar{v}_D^{nep}$, где численно $v_D^{om} = \dot{x}$, $v_D^{nep} = v_2 = R\dot{\phi}$. Тогда, принимая во внимание, что при возрастании ϕ и x скорости $\bar{v}_D^{om}$ и $\bar{v}_D^{nep}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка – мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\phi}, \quad \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\phi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_0 и I_D в равенства (8.32) и учитывая, что $P_1 = P_3 = 2P$, а $P_2 = 4P$, получим окончательно из (8.31) следующее выражение для T :

$$T = \frac{P}{g}(4R^2\dot{\phi}^2 - 3R\dot{\phi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2). \quad (8.33)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{P}{g}(8R^2\dot{\phi} - 3R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}(-3R\dot{\phi} + 3\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (8.34)$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, силы упругости $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M .

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата ϕ получает приращение $\delta\phi > 0$, а x не изменяется, т. е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр D катка получают одинаковые перемещения $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\phi$ и элементарная работа действующих сил будет равна

$$\delta A_1 = M\delta\phi - P_2 \sin 30^\circ \cdot \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D - F'\delta s_2 + F\delta s_D.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = (M - 0,5P_2R - 0,5P_3R)\delta\phi = PR\delta\phi. \quad (8.35)$$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т. е. $\delta\varphi = 0$ (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершат только силы $\bar{P}_3$ и $\bar{F}$, учтя, что $P_3 = 2P$, получим

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F \delta x = (P - cx) \delta x. \quad (8.36)$$

Коэффициенты при $\delta\varphi$ и δx в равенствах (8.35) и (8.36) и будут искомыми обобщенными силами; следовательно,

$$Q_1 = PR; Q_2 = P - cx. \quad (8.37)$$

Подставляя величины (8.34) и (8.37) в уравнения (8.30), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}(8R^2\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x}) = PR; \quad \frac{P}{g}(-3R\ddot{\varphi} + 3\ddot{x}) = P - cx. \quad (8.38)$$

4. Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (8.38) $\ddot{\varphi}$. Получим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + k^2 x = a,$$

где

$$k^2 = \frac{8}{15} \frac{cg}{P}, \quad a = \frac{11}{15} g. \quad (8.39)$$

Общее решение уравнения (8.39), как известно из высшей математики, имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т. е. $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$, а x_2 — частное решение уравнения (8.39). Будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A = \text{const}$. Подставляя значение x_2 в уравнение (), получим $A = a/k^2$. Таким образом, общее решение уравнения (8.39) имеет вид:

$$x = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + a/k^2, \quad (8.40)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную $\dot{x}$ от x по времени:

$$\dot{x} = C_1 k \cos(kt) - C_2 k \sin(kt). \quad (8.41)$$

По начальным условиям при $t=0$ $x=0$, $\dot{x}=0$ (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подставляя эти величины в уравнения (8.40) и (8.41), найдем из них, что $C_1 = 0$, $C_2 = -a/k^2$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = f(t)$ в виде

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt), \quad (8.42)$$

где значения a и k^2 даются последними двумя из равенств (8.39). Таким образом, центр D катка совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (8.42). Крутовая частота k и период τ этих колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{8cg}{15P}}; \quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{15P}{8cg}}. \quad (8.43)$$

8.4 Исследование малых колебаний системы с одной степенью свободы

8.4.1. Пример задачи

Дано: $m_2 = 5$ кг, $m_4 = 3$ кг, $m_5 = 4$ кг, $c_4 = 500$ Н/м, $R_1 = 0,4$ м, $r_1 = 0,2$ м, $R_2 = 0,3$ м, $OD = 0,5$ м, $R_2 = 0,15$ м. Определить k , T , $\lambda_{\text{ст}}$.

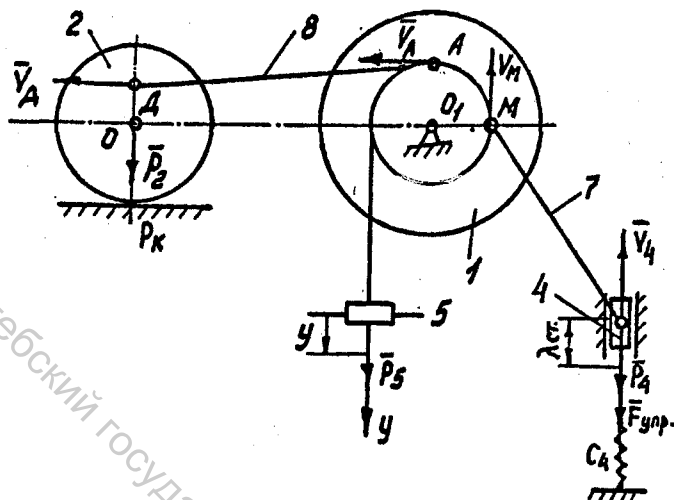


Рисунок 8.12

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода для консервативной системы.

За обобщенную координату системы (рис. 8.12) примем вертикальное отклонение y груза 5 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{d\Pi}{dy}, \quad (8.44)$$

где T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия системы.

Кинетическую энергию T вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной скорости $\dot{y}$, а потенциальную энергию Π — с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

Кинетическая энергия системы

$$T = T_2 + T_4 + T_5. \quad (8.45)$$

Кинетическая энергия груза 5, движущегося поступательно со скоростью $V_5 = \dot{y}$,

$$T_5 = \frac{m_s \dot{y}^2}{2} = \frac{4}{2} \dot{y}^2 = 2 \dot{y}^2. \quad (8.46)$$

Кинетическая энергия колеса 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = T_2^{пост} + T_2^{вр} = \frac{m_2 V_0^2}{2} + \frac{1}{2} J_{\alpha} \omega_2^2, \quad (8.47)$$

где момент инерции колеса 2 $J_{\alpha} = \frac{1}{2} m_2 R^2$.

Скорость точки A колеса 1 $V_A \perp O_1 A$ и направлена в сторону вращения колеса 1, а по модулю $V_A = \dot{y}$.

Колесо 2 катится по горизонтальной плоскости, значит, мгновенный центр скоростей колеса 2 находится в точке касания колеса и плоскости, точке P_k .

Точка D , конец стержня AD , лежит на вертикальном диаметре, значит, ее скорость перпендикулярна диаметру вертикальному, т.е. направлена по горизонтали. Так как направления скоростей точек A и D стержня параллельны, но не перпендикулярны AD , то мгновенный центр скоростей P_{AD} находится в бесконечности, поэтому угловая скорость $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_{AD}} = \frac{V_A}{\infty} = 0$, т.е. стержень AD совершает мгновенно поступательное движение, а поэтому $V_A = V_D = \dot{y}$.

Угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{DP_k} = \frac{\dot{y}}{1,5R_2} = \frac{\dot{y}}{\frac{3}{2} \cdot 0,3} = \frac{20}{9} \dot{y}$. Скорость

центра колеса $\vec{V}_0 \perp OP_k$ и направлена в сторону вращения колеса 2, а ее модуль

$$V_0 = \omega_k \cdot OP_k = \omega_k R_2 = \frac{20}{9} \dot{y} \cdot 0,3 = \frac{2}{3} \dot{y}. \quad (8.48)$$

Подставляем найденные значения в (8.47)

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 R^2 \cdot \frac{400}{81} \cdot \dot{y}^2 = \frac{5}{3} \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия ползуна 4, совершающего поступательное движение, $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \dot{y}^2 = 1,5 \dot{y}^2$, так как и в случае со стержнем 8, стержень совершает мгновенно-поступательное движение, поэтому $\vec{V}_4 = \vec{V}_M$, а по модулю $V_4 = V_M = V_A = \dot{y}$.

Кинетическая энергия всей системы

$$T = 2 \dot{y}^2 + \frac{5}{3} \dot{y}^2 + 1,5 \dot{y}^2 = 5,2 \dot{y}^2. \quad (8.49)$$

Определим потенциальную энергию системы, которая определяется работой сил тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклоненного положения, когда груз имеет координату y , в нулевое положение, которым считаем положение покоя системы: $\Pi_I = \Pi_{II}$.

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести при указанном перемещении

$$\Pi_I = -P_3 y + P_4 y.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины,

$$\Pi_{II} = \frac{c_4}{2} (\lambda_{cm} + y)^2 - \frac{c_4}{2} \lambda_{cm}^2 = \frac{c_4}{2} \lambda_{cm}^2 + c_4 \lambda_{cm} y + \frac{c_4}{2} y^2 - \frac{c_4}{2} \lambda_{cm}^2 = c_4 \lambda_{cm} y + \frac{c_4}{2} y^2, \text{ где}$$

λ_{cm} — статическая деформация пружины, y — перемещение точки прикрепления пружины.

$$\text{Потенциальная энергия системы } \Pi_I = \Pi_{II} = P_4 y - P_3 y + c_4 \lambda_{cm} y + \frac{c_4}{2} y^2.$$

В положении покоя, соответствующем статической деформации пружины

$$\left. \frac{d\Pi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \text{ откуда } P_4 - P_3 + c_4 \lambda_{cm} = 0,$$

$$\lambda_{cm} = \frac{P_3 - P_4}{c_4} = \frac{m_3 g - m_4 g}{c_4} = \frac{9,8(4-3)}{500} = 0,0196 \text{ м.}$$

Следовательно, потенциальная энергия системы $\Pi = \frac{c_4}{2} y^2$.

Найдем значения членов уравнения (8.44):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 10,4 \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 10,4 \ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = c_4 y.$$

Подставив найденные значения в уравнении (8.44), получим

$$10,4 \ddot{y} = -c_4 y = -500 y.$$

Разделив на 10,4, получим

$$\ddot{y} = -\frac{500}{10,4} y = -48 y, \quad \ddot{y} + 48 y = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Циклическая частота колебаний $k = \sqrt{48} = 6,93 \text{ с}^{-1}$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{6,93} = 0,904 \text{ с.}$

Глава 9

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

9.1 Скалярные и векторные величины

Методы векторного исчисления широко используются в механике. Они имеют большое преимущество перед координатным методом, что объясняется сокращенностью записей, физической наглядностью формул. Векторные формулы не связаны с системой координат. Они инвариантны по отношению к преобразованиям координат.

Различают два типа величин: скалярные и векторные. Физические величины, определяемые числом, не зависящим от выбора системы координат, называются скалярными, или скалярами.

Векторной величиной, или вектором, является направленный отрезок, который задается его длиной и направлением в пространстве.

В свою очередь, вектор может быть свободным (приложенным в любой точке пространства), скользящим (приложенным в любой точке некоторой прямой – линии действия вектора) и неподвижным (приложенным в некоторой фиксированной точке).

Рассмотрим элементы векторного исчисления для свободных векторов.

Вектор может быть геометрически изображен прямолинейным отрезком AB (рис. 9.1), длина которого в известном масштабе соответствует численному значению (модулю) вектора. Концы A и B отрезка AB называются, соответственно, началом и концом вектора $\vec{AB}$.

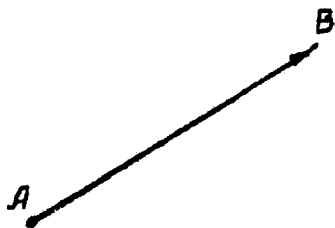


Рисунок 9.1

Два вектора (рис. 9.2) считаются равными, если они параллельны, направлены в одну сторону и равны по модулю, т.е. если $a = b$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Если линии действия векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны между собой, они называются параллельными, или коллинеарными. Векторы, параллельные одной и той же плоскости, называются компланарными.



Рисунок 9.2

Вектор, совпадающий по направлению с данным вектором и имеющий модуль, равный единице, называется единичным вектором, или ортом данного вектора.

При помощи единичного вектора всякий вектор можно представить как произведение модуля вектора на единичный вектор, т.е. $\vec{a} = a \cdot \vec{a}_0$, где $\vec{a}_0$ - орт данного вектора $\vec{a}$.

9.2 Проекция вектора на ось и на плоскость. Аналитическое задание вектора

Проекцией вектора $\vec{AB} = \vec{a}$ на ось x (рис. 9.3) называется, взятая с соответствующим знаком, длина отрезка A_1B_1 , заключенного между проекциями начала и конца вектора $\vec{AB}$ на эту ось. Проекция берется со знаком "плюс", если перемещение от A_1 к B_1 совпадает с положительным направлением оси x , и, если нет, то со знаком "минус",
 $np_x(\vec{AB}) = (\vec{AB})_x = \pm |A_1B_1| = \pm |\vec{AB}| \cos(\vec{AB}, \hat{x})$ или
 $np_x(\vec{a}) = a_x = a \cos(\vec{a}, \hat{x}) = a \cos \alpha$.

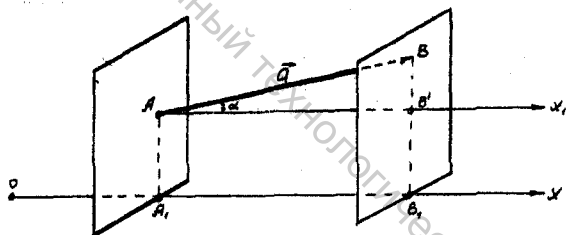


Рисунок 9.3

Согласно определению, проекция вектора на ось есть величина скалярная: положительная или отрицательная, в зависимости от того, острый или тупой угол образует проектируемый вектор с осью проекций.

Из самого определения проекции вектора на ось следует, что проекция не изменится, если мы будем переносить вектор параллельно самому себе или если будем проектировать на различные, но параллельные и одинаково направленные оси.

При решении задач рекомендуется вычислять абсолютное значение проекции вектора (силы), как произведение модуля вектора на косинус острого угла между линией действия вектора и осью, определяя знак проекции непосредственно по чертежу.

Если задано направление от проекции начала вектора к проекции его конца, то получим вектор, называемый составляющей вектора $\vec{a}$ по оси x .

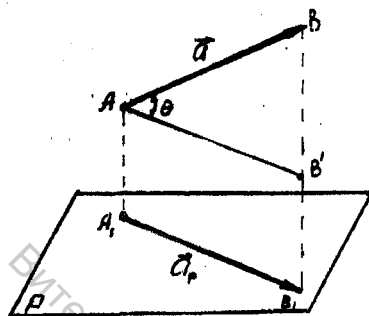


Рисунок 9.4

Проекцией вектора $\overline{AB} = \vec{a}$ на плоскость P называется вектор $\overline{A_1B_1}$, заключенный между проекциями начала и конца вектора $\overline{AB}$ на эту плоскость (рис. 9.4). По определению $\vec{a}_p = \overline{A_1B_1}$ есть вектор, который характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости P . Модуль вектора $\vec{a}_p$ определяется равенством $a_p = |A_1B_1| = a \cos \Theta$, где Θ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}_p$.

Аналитически вектор вполне определяется тремя своими проекциями на оси координат. Эти проекции иногда называются координатами вектора.

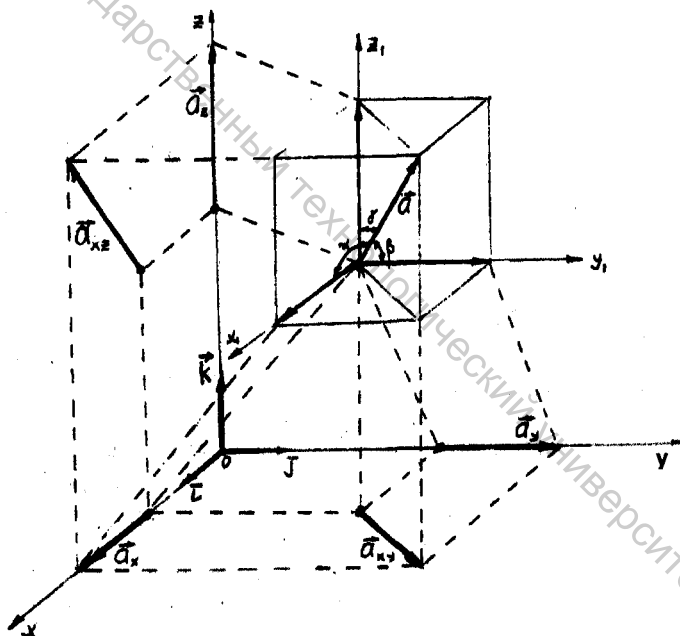


Рисунок 9.5

Если дан вектор $\vec{a}$, т.е. даны его модуль $|a|$ и его направление (направляющие косинусы), то известны и проекции вектора на оси координат (рис. 9.5).

Действительно, $a_x = a \cos(\vec{a}, \hat{x})$, $a_y = a \cos(\vec{a}, \hat{y})$, $a_z = a \cos(\vec{a}, \hat{z})$.

Обратно, если даны проекции вектора на оси координат, то вектор определен. Действительно, возведя почленно в квадрат указанные выше равенства и складывая их, имеем $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$, откуда модуль вектора $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. При выводе этой формулы учитывалось соотношение, связывающее косинусы трех (α, β, γ) углов, образуемых направлением какого-либо вектора $\vec{a}$ с осями прямоугольных координат, т.е. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Направляющие косинусы определяются из выражений

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Если известны единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ прямоугольных координатных осей, составляющие вектора $\vec{a}$ по осям координат будут

$$\vec{a}_x = a \cos \alpha \vec{i} = a_x \vec{i}; \vec{a}_y = a \cos \beta \vec{j} = a_y \vec{j}; \vec{a}_z = a \cos \gamma \vec{k} = a_z \vec{k}.$$

9.3 Сложение векторов

Суммой двух свободных векторов называется вектор, совпадающий по величине и направлению с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 9.6).

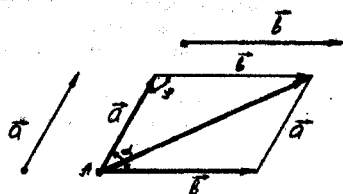


Рисунок 9.6

Другими словами, суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$. Из треугольника ABC имеем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$, а $\varphi = \pi - \alpha$, где α - угол между векторами. Следовательно, $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$.

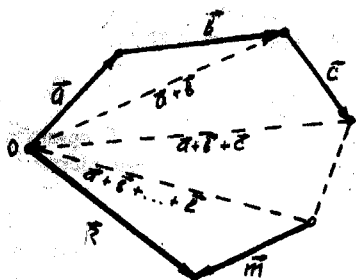


Рисунок 9.7

Сумму нескольких свободных векторов получим последовательным применением закона сложения двух векторов: для получения суммы n векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots, \vec{e}, \vec{m}$ сумму двух первых векторов $(\vec{a} + \vec{b})$ сложим с третьим вектором $\vec{c}$, полученную сумму трех первых векторов $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ сложим с четвертым вектором и т.д. Сложив сумму $(n-1)$ первых векторов

($\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{e}$) с последним вектором $\vec{m}$ (рис. 9.7), получим сумму всех n векторов

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \dots + \vec{e} + \vec{m}.$$

Таким образом, сумма нескольких векторов есть вектор, который изображается замыкающей стороной ломаной линии, составленной из слагаемых векторов. При этом начало каждого последующего вектора откладывается от конца предыдущего, а замыкающий вектор направлен от начала первого слагаемого вектора к концу последнего.

Составленный таким способом многоугольник носит название векторного многоугольника, а сам метод - правила векторного многоугольника.

Если ломаная линия, составленная из слагаемых векторов, самозамыкается, т.е. если конец последнего из слагаемых векторов совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нулю.

9.4 Разложение вектора по координатным осям. Аналитический способ сложения векторов

Разложение вектора на сумму нескольких векторов — задача неопределенная. Рассмотрим разложение вектора на ортогональные составляющие.

Пусть вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ требуется представить в виде суммы трех составляющих векторов, параллельных заданным осям x, y, z . На векторе $\vec{OM}$, как на диагонали, строим параллелепипед, ребра которого направлены по этим осям (рис. 9.8).

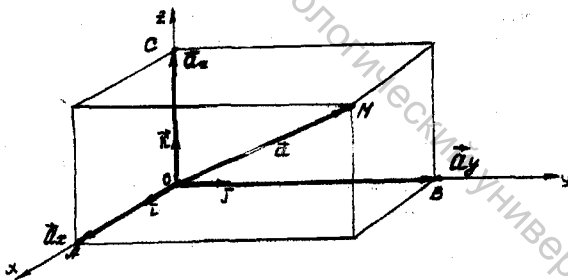


Рисунок 9.8

Тогда $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, или $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ - ортогональные (прямоугольные) составляющие вектора $\vec{a}$ по осям x, y, z .

В случае прямоугольной плоской системы координат x, y (рис. 9.9) получим

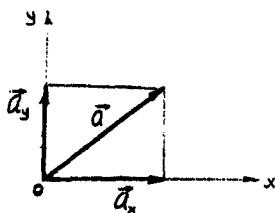


Рисунок 9.9

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Из векторной алгебры известно, что проекция суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Если вектор $\vec{R}$ равен сумме векторов $\vec{a}_k$, т.е. $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k$, то $R_x = \sum_{k=1}^n a_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^n a_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^n a_{kz}$.

Одновременно данные формулы определяют проекции вектора $\vec{R}$ на оси координат.

Тогда, как отмечено выше, модуль суммы вектора $\vec{R}$ определится из выражения

$$R = \left| \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Направляющие косинусы углов, образуемые вектором $\vec{R}$, с осями координат, находятся по известным выше формулам (см. рис. 9.5).

9.5 Произведение векторов

В векторном исчислении различают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

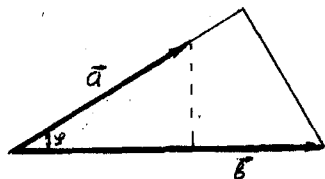


Рисунок 9.10

1. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, равная произведению модулей a и b этих векторов, умноженному на косинус угла между ними (рис. 9.10). По определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$.

Скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot n p b_a = b \cdot n p a_b = ab \cos \varphi.$$

Из этого равенства следует, что:

а) скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов

равно нулю;

б) скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a \cdot a \cos \varphi = a^2$. Здесь $\varphi = 0$.

На основании указанных свойств имеем, что

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Тогда скалярное произведение двух векторов можно выразить через их проекции

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$, то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Векторное произведение есть вектор (рис. 9.11), модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними.

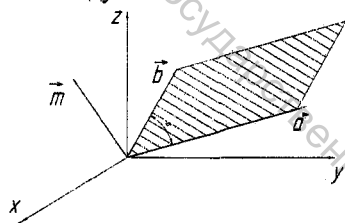


Рисунок 9.11

Направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем в ту сторону, чтобы, смотря с конца полученного вектора $\vec{m}$, видеть кратчайший поворот первого вектора до совмещения со вторым против хода часовой стрелки (рис. 9.11). По определению вектор векторного произведения определяется по формуле

$$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b},$$

а его модуль

$$m = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$

Из последнего равенства следует, что:

1) модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 9.11);

2) векторное умножение двух векторов свойством коммутативности (переместительности) не обладает, так как $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

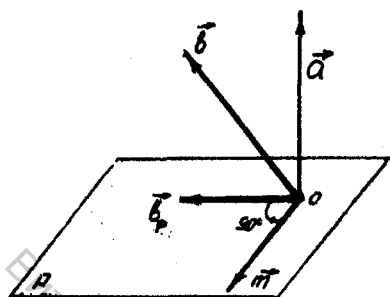


Рисунок 9.12

Геометрически векторное произведение $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b}$ можно найти следующим построением (рис. 9.12): проводим плоскость P , перпендикулярную вектору $\vec{a}$, строим ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на плоскость P и поворачиваем эту проекцию в плоскости P вокруг точки O на 90° против хода часовой стрелки (если смотреть на плоскость с конца вектора $\vec{a}$). Полученный вектор $\vec{m}$ является векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их проекции можно выразить следующим образом

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Комбинированные произведения трех векторов могут иметь вид $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Первая комбинация есть произведение вектора $\vec{a}$ на скаляр $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Вторая комбинация типа $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ называется смешанным произведением векторов и есть, очевидно, скаляр

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Произведение трех векторов типа $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ называется двойным векторным произведением и есть вектор. Двойное векторное произведение можно представить в виде определителя

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ (\vec{b} \times \vec{c})_x & (\vec{b} \times \vec{c})_y & (\vec{b} \times \vec{c})_z \end{vmatrix},$$

где $(\vec{b} \times \vec{c})_x, (\vec{b} \times \vec{c})_y, (\vec{b} \times \vec{c})_z$ суть проекции векторного произведения $\vec{b} \times \vec{c}$ на оси x, y, z . Иначе это произведение можно представить следующим образом:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Данная формула используется при определении ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

10.1 Понятие о производной. Геометрический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение точки. Пройденный ею путь s , отсчитываемый от определенной точки прямой, есть функция времени $s = f(t)$, т.е. всякому определенному моменту времени t соответствует определенное значение s . Придадим t приращение Δt , и тогда новому моменту времени $t + \Delta t$ будет соответствовать путь $s + \Delta s$. В случае равномерного движения приращение пути пропорционально приращению времени, и в этом случае отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает постоянную скорость движения. В общем случае это отношение зависит как от выбранного момента времени t , так и от приращения Δt , и выражает среднюю скорость за промежуток времени Δt (от t до $t + \Delta t$).

Чем меньше промежутков времени Δt , тем с большим правом можно считать движение рассматриваемой точки за этот промежуток времени равномерным, и предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, при стремлении Δt к нулю, определяет скорость

$$v \text{ в данный момент } t: v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Скорость v есть функция от t . Эта функция называется производной функции $f(t)$ по t . Таким образом, скорость есть производная от пути по времени.

Рассмотрим основное понятие дифференциального исчисления - понятие производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке X . Исходя из некоторого фиксированного значения x независимой переменной, придадим ему некоторое приращение Δx , так что значение $x + \Delta x$ принадлежит этому промежутку. Тогда значение $y = f(x)$ заменится новым значением $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, т.е. функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению независимой переменной Δx , при стремлении Δx к нулю,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x , при заданном значении x . Иначе говоря,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

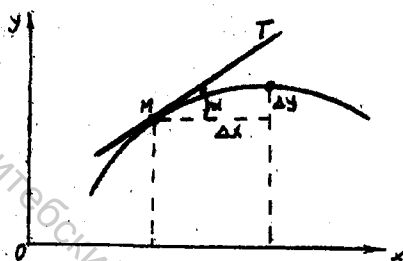


Рисунок 10.1

Геометрическое толкование производной заключается в следующем (рис. 10.1). Производная $y' = f'(x)$ равна тангенсу угла α , образованного касательной к кривой в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси OX , т.е. равна угловому коэффициенту касательной.

Изменение скорости с течением времени характеризуется ускорением. Приращению времени Δt отвечает приращение скорости Δv , а отношение $a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение точки в прямолинейном движении за промежуток времени Δt . Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим ускорение $\bar{a}$ движения точки в данный момент времени

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \text{ или } a = \frac{dv}{dt}.$$

Ускорение точки в прямолинейном движении есть производная от скорости по времени.

Основные формулы для производных приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Основные формулы для производных

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
5	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
7	$y = e^x$	$y' = e^x$
8	$y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$

9	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
10	$y = c \cdot u(x)$	$y' = c \cdot u'(x)$
11	$y = u(x) + v(x) + w(x)$	$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x)$
12	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
13	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
14	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
15	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
16	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
17	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
18	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
21	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
22	$y = (u^v)', \text{ где } u = u(x),$ $v = v(x)$	$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \log u \cdot v'$
23	$x = f(y)$	$x_y' = \frac{1}{y'}$

10.2 Неопределенный интеграл и простейшие приемы его вычисления

При решении технических задач приходится не по заданной функции искать ее производную, а наоборот - восстанавливать функцию по известной ее производной. В разделе 2.1, предполагая известным уравнение движения $s = s(t)$, т.е. закон изменения пути с течением времени, путем дифференцирования, нашли сначала скорость $v = \frac{ds}{dt}$, а затем и ускорение $a = \frac{dv}{dt}$. Часто приходится решать обратную задачу. Задано ускорение a в функции от времени t : $a = a(t)$, требуется определить скорость v и пройденный путь s в зависимости от t . Таким образом, необходимо по функции $a = a(t)$ восстановить ту

функцию $v = v(t)$, для которой a является производной, а затем, зная функцию v , найти ту функцию $s = s(t)$, для которой производной будет v .

Пусть дана производная $y' = f(x)$ или дифференциал $dy = f(x)dx$ неизвестной функции y .

Функция $F(x)$, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной или $f(x)dx$ своим дифференциалом, называется первообразной функцией для функции $f(x)$ или интегралом от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, причем функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подинтегральным выражением.

Разыскание для функции всех ее первообразных, называемое интегрированием ее, и составляет одну из задач интегрального исчисления. Эта задача является обратной основной задаче дифференциального исчисления.

Возвращаясь к той механической задаче, которую поставили вначале, можно записать, что $v = \int a(t)dt$ и $s = \int v(t)dt$.

Предположим, что мы имеем дело с равноускоренным движением, например, под действием силы тяжести. Тогда $a = g$, если направление по вертикали вниз считать положительным. Получим

$$v = \int g dt = gt + C. \quad (10.1)$$

При различных значениях C будем получать различные значения скорости в один и тот же момент времени. Чтобы получить вполне определенное решение задачи, достаточно знать величину скорости в один какой-нибудь момент времени. Например, пусть известно, что в момент $t = t_0$ скорость $v = v_0$. Подставим эти значения в выражение (10.1). Получим $v_0 = gt_0 + C$, откуда $C = v_0 - gt_0$. Тогда выражение скорости имеет вполне определенный вид

$v = g(t - t_0) + v_0$, где $v = \frac{ds}{dt}$. Найдем выражение для пути. Имеем

$$\int [g(t - t_0) + v_0] dt = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C_1.$$

Дифференцированием легко проверить, что первообразная функция может быть взята в такой форме. Неизвестную новую постоянную C_1 можно определить, если дано, что в момент $t = t_0$ путь $s = s_0$. Подставив $s = s_0, t = t_0$ в уравнение пути s , получим $C_1 = s_0$. Окончательно получим

$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Ниже приведены основные формулы неопределенных интегралов, которые могут быть использованы при решении задач кинематики и динамики курса теоретической механики.

$$1. \int 0 \cdot dx = C.$$

$$2. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C.$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a} + C.$$

Интегральное исчисление используется также в тех разделах теоретической механики, в основу которых положен принцип суммирования бесконечно малых элементов (определение центра тяжести твердых тел, моментов инерции и т.д.).

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и её производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}$. Здесь F - заданная функция своих аргументов. В таком уравнении искомая функция зависит от одного переменного.

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, такое уравнение называется уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая указанное выше уравнение в тождество, называется решением этого уравнения, а график этой функции - интегральной кривой.

Следовательно, решением уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ будет $y = y(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$, которое называется общим решением (общим интегралом) дифференциального уравнения. Если произвольным постоянным $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ придавать определенные значения, получим частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения. Произвольных постоянных в решении должно быть столько, каков порядок дифференциального уравнения.

11.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

В разделе 10.2 рассматривалась задача об определении функции $y = y(x)$ по заданной ее производной $y' = f(x)$, т.е. операция интегрирования, с помощью которой она решается:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (11.1)$$

В этом общем решении фигурирует постоянная C . Если даны начальные условия $y = y_0$ при $x = x_0$, то этим определяется конкретное значение постоянной $C = C_0$. Подставив его в (11.1), получим частное решение нашей задачи, т.е. конкретную функцию $y = y(x)$, которая не только имеет наперед заданную производную, но и удовлетворяет указанным выше условиям.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит производные неизвестных функций или их дифференциалы.

Разыскание общего решения дифференциального уравнения называется интегрированием уравнения.

В данной работе рассматриваются только те типы дифференциальных уравнений, с которыми студенты встречаются в процессе изучения курса теоре-

тической механики.

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (11.2)$$

в котором коэффициент при dx зависит только от x , а коэффициент при dy — только от y . Такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

При решении уравнения (11.2) его удобно представить в виде

$$Q(y)dy = -P(x)dx.$$

Интегрируя правую и левую часть этого равенства, получим

$$\int Q(y)dy = -\int P(x)dx + C,$$

или

$$\int_{y_0}^y Q(y)dy = -\int_{x_0}^x P(x)dx. \quad (11.3)$$

Уравнение (11.3) является частным решением, которое выполняется при $x = x_0$ и $y = y_0$.

Пример. Тело массы 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление среды, пропорциональное первой степени скорости, т.е. $R = 0,4v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения (рис. 11.1).

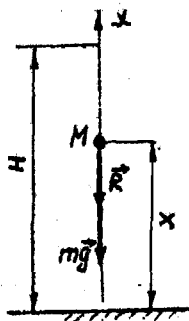


Рисунок 11.1

Решение. Направим ось x в сторону движения тела, выбрав начало отсчета на поверхности Земли в начальном положении тела. Начальные условия имеют вид: при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$. К телу M в произвольном положении приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления $\vec{R}$, направленная в сторону, противоположную движению.

Составим дифференциальное уравнение в проекции на ось x :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - R, \text{ или } m \frac{dv}{dt} = -mg - 0,4v.$$

Приведем его к уравнению с разделяющимися переменными. Получим

$$\frac{mdv}{0,4v + mg} = -dt.$$

Для интегрирования полученного уравнения используем формулу (11.3), учитывая при этом, что, когда тело достигнет наивысшего положения, его скорость будет равна нулю:

$$\int_{v_0}^0 \frac{mdv}{0,4v + mg} = - \int_0^T dt.$$

Вычисляя, получим

$$T = \frac{m}{0,4} \ln \left| \frac{0,4v + mg}{0,4v_0 + mg} \right|, \text{ откуда } T = 5 \ln \frac{7}{5} = 1,71 \text{ с.}$$

11.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение называется линейным, если неизвестная функция и ее производные, вместе взятые, входят в уравнение линейно.

Линейное дифференциальное уравнение имеет вид: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным. Каждому линейному неоднородному уравнению соответствует однородное линейное уравнение.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (11.4)$$

где p и q постоянные вещественные коэффициенты, т.е. случай, когда $a_k(x) = \text{const}$.

Составим характеристическое уравнение. Порядок производной определяет степень коэффициентов λ_k характеристического уравнения. При составлении характеристического уравнения необходимо заменить y на 1.

Для уравнения (11.4) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

При решении характеристического уравнения могут встретиться три случая:

а) корни характеристического уравнения вещественные и различные, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее решение дифференциального уравнения (11.4) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \quad (11.5)$$

б) корни характеристического уравнения кратные, равны по величине и по знаку, т.е. $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2}$. Общее решение будет

$$y = e^{\frac{p}{2}}(C_1 + C_2 x). \quad (11.6)$$

Следовательно, если корни характеристического уравнения равны, то одно частное решение отличается от другого на множитель x , т.е. если $\lambda_1 = \lambda_2$, $y_1 = e^{\lambda x}$, $y = x e^{\lambda x}$. Общее решение имеет вид (11.6);

в) корни характеристического уравнения комплексные сопряженные $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Общее решение будет

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx), (a \neq 0) \quad (11.7)$$

или

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx, (a = 0). \quad (11.8)$$

При решении задач теоретической механики независимым переменным является время t , а функцию этой переменной будем обозначать через x .

Тогда уравнение (11.4) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + gx = 0, \text{ или } \ddot{x} + p\dot{x} + gx = 0.$$

11.3 Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (11.9)$$

где p и q - постоянные вещественные числа, а $f(x)$ непрерывна в некотором интервале (a, b) .

Общее решение уравнения (11.9) складывается из общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения определяется методом неопределенных коэффициентов. Если его нельзя использовать, то применяется метод вариации произвольных постоянных.

11.3.1. Предположим, что правая часть $f(x)$ представляет собой произведение многочлена на показательную функцию. Тогда

$$y'' + py' + qy = e^{ax} p_m(x), \quad (11.10)$$

где $p_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \dots + p_{m-1}x + p_m$, $m \geq 0$.

При определении частного решения уравнения (11.10) возможны два случая.

1 случай. α не является корнем характеристического уравнения, т.е. $p(\alpha) \neq 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_1 = e^{\alpha x} Q_m(x), \quad (11.11)$$

где

$$Q_m(x) = g_0x^m + g_1x^{m-1} + \dots + g_{m-1}x + g_m \quad (11.12)$$

есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ определяются подстановкой (11.11) в уравнение (11.10) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства.

II случай. Пусть α является k -кратным корнем ($k \geq 1$) характеристического уравнения, т.е.

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0. \quad (11.13)$$

В этом случае частное решение следует искать в виде

$$y_1 = x^k e^{\alpha x} Q_m(x), \quad (11.14)$$

где $Q_m(x)$ имеет вид (11.12).

11.3.2 Предположим, что правая часть уравнения (11.9) имеет вид ;

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos bx + R_m(x) \sin bx], \quad (11.15)$$

где $P_m(x), R_m(x)$ - заданные многочлены от x степени m .

1 случай. Если $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение

$$y_1 = e^{\alpha x} [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx], \quad (11.16)$$

где $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$ - многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты многочленов определяются подстановкой y_1 в уравнение (11.9).

2 случай. Если $a + ib$ является k - кратным корнем ($k \geq 1$) характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_1 = x^k e^{\alpha x} [Q_m^{(1)} \cos bx + Q_m^{(2)} \sin bx], \quad (11.17)$$

где $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$ многочлены степени m с неопределенными коэффициентами.

Пример 1. Найти общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение y_1 будем искать в виде $y_1 = Ax^2 + Bx + C$.

При этом $y_1' = 2Ax + B, y_1'' = 2A$.

Подставим y_1, y_1', y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение. Для сокращения выкладок целесообразно выписать решение y_1, y_1', y_1'' в отдельных строках последовательно. Затем слева записать соответствующие коэффициенты уравнения. Умножая на коэффициенты уравнения и складывая, сразу приводим подобные члены, как это показано ниже:

6	$y_1 = Ax^2 + Bx + C$
-5	$y_1' = 2Ax + B$
1	$y_1'' = 2A$
$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2.$	

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему

$$6A = 6, \quad 6B - 10A = -10, \quad 6C - 5B + 2A = 2,$$

откуда $A = 1, B = 0, C = 0$.

Следовательно, $y_1 = x^2$ и общее решение имеет вид:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2.$$

Пример 2. Найти общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + y' - 2y = e^x (\cos x - 7 \sin x).$$

Принтегрируем соответствующее однородное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \text{ где корни } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Составляем число $a + ib$. Получим $a + ib = 1 + i$. Так как это число не является корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде

$$y_1 = e^{ax} (A \cos x + B \sin x).$$

Подставим, как и в примере 1, y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение примера 2:

-2	$y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x)$
1	$y_1' = e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x]$
1	$y_1'' = e^x (2B \cos x - 2A \sin x)$
$e^x [(-A + 3B) \cos x - (B + 3A) \sin x] = e^x (\cos x - 7 \sin x).$	

Сокращая на e^x и приравнявая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему $-A + 3B = 1, -B - 3A = -7$, откуда $A = 2, B = 1$. Следовательно, $y_1 = e^x (2 \cos x + \sin x)$. Тогда общим решением неоднородного дифференциального уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x (2 \cos x + \sin x).$$

11.4 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Из изложенного в п. 11.3 следует, что для того, чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью (11.11) или (11.14), надо:

1. Рассмотреть однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному дифференциальному уравнению и составить характеристическое уравнение.

2. Решить характеристическое уравнение и найти все его корни.

3. Найти (при необходимости) фундаментальную систему решений (частные решения) и записать общее решение однородного уравнения y_0 .

4. По виду специальной правой части (11.10) или (11.15) записать частное решение неоднородного уравнения (11.9) y_1 с неопределенными коэффициен-

тами вида (11.14) или (11.6).

Примечание. Если правую часть уравнения (11.9) можно представить в виде суммы нескольких функций специального вида, надо составить частные решения, соответствующие каждому из слагаемых, и, используя теорему о наложении решений неоднородного уравнения, найти частное решение уравнения (11.9).

5. Найти производные соответствующего порядка решений y_1 и подставить в левую часть уравнения (11.9). Приравнявая коэффициенты при линейно независимых функциях (см. примеры 1; 2 в п. 11.3), составить систему линейных уравнений для определения неопределенных коэффициентов. Решив полученную систему, получим решение y_1 .

6. Сложив решение y_0 и y_1 , получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (11.9).

Рассмотрим на примерах методику нахождения частного решения y_1 неоднородного уравнения. При этом проанализируем три случая, каждый из которых включает два примера.

Пример 1. Доказано, что частное решение можно найти, если правая часть дифференциального уравнения есть целая алгебраическая функция относительно x . Тогда частное решение может быть задано также в виде многочлена той же степени относительно x с неопределенными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = x^2(x^2 + 0 \cdot x + 0)$. Общее решение $y = y_0 + y_1$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Тогда $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$. Частное решение берется похожим на правую часть $y_1 = Ax^2 + Bx + D$, где A, B, D - неопределенные коэффициенты, $y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$. Подставим y_1 , y_1' , y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение, получим

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2D = x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему $2A = 1$, $2B - 6A = 0$, $2A - 3B + 2D = 0$. Откуда $A = 0,5$, $B = 1,5$, $D = 7/4$. Тогда $y_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Отсюда $y = y_0 + y_1 = (C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4})$ - решение данного дифференциального уравнения.

Исключение. Если правая часть есть функция алгебраическая и если ноль (0) является корнем характеристического уравнения, то предполагаемое частное решение умножается на x в той степени, сколько корней, равных нулю, имеется у характеристического уравнения.

Пример 2. $y'' + 4y' = 3x + 2$; $y = y_0 + y_1$; $y'' + 4y' = 0$. Тогда $\lambda^2 + 4\lambda = 0$ или $\lambda(\lambda + 4) = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$. Следовательно, $y_0 = C_1 + C_2 e^{-4x}$. Задаем частное решение в виде $y_1 = (Ax + B)x$. Если бы два корня характеристического уравнения были равны нулю, тогда умножали бы на x^2 . Учитывая, что

$y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$, получим $2A + 8Ax + 4B = 3x + 2$. Откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим $8A = 3$, $2A + 4B = 2$. Откуда $A = 3/8$, $B = 5/16$. Тогда $y_1 = \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x$. Окончательно получим $y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2e^{-4x} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x)$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 3. Если правая часть есть функция показательная, а именно в виде $ke^{mx} = f(x)$, где k и m - const, предполагаемое частное решение задается в виде той же показательной функции только с неопределенными коэффициентами $y_1 = Ae^{mx}$. $y'' - 4y' + 4y = 5e^{3x}$. Общее решение $y = y_0 + y_1$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Тогда $y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Частное решение $y_1 = Ae^{3x}$. При этом $y_1' = 3Ae^{3x}$, $y_1'' = 9Ae^{3x}$. Подставим y_1 , y_1' , y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение, получим $9Ae^{3x} - 12Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = 5e^{3x}$. Откуда $A = 5$. Тогда $y_1 = 5e^{3x}$. Окончательно получим $y = y_0 + y_1 = (C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 5e^{3x})$ - общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Исключение. Если правая часть есть функция показательная и если корни характеристического уравнения равны m (коэффициенту при x у показателя степени), тогда предполагаемое частное решение умножается на x в той степени, сколько корней характеристического уравнения равно m .

Пример 4. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$, $y = y_0 + y_1$, $y'' - 4y' + 4y = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Тогда $y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, а $y_1 = Ae^{2x}x^2$. При этом $y_1' = 2Ae^{2x}x^2 + 2Ae^{2x}x$, $y_1'' = 4Ae^{2x}x^2 + 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}x + 2Ae^{2x} = 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$. Подставим y_1 , y_1' , y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение. Получим $2Ae^{2x} = 3e^{2x}$. Откуда $A = 3/2$, а $y_1 = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$. Окончательно получим $y = (C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x})$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 5. Если правая часть есть функция тригонометрическая $f(x) = k \cos mx + n \sin mx$ (или только один косинус, или синус), предполагаемое частное решение задается в виде тригонометрической функции с неопределенными коэффициентами $y_1 = A \cos mx + B \sin mx$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 5y = 20 \cos 3x$. Общее решение $y = y_0 + y_1$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0$. Характе-

ристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Тогда $y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Частное решение $y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x$. При этом $y_1' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y_1'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$.

Подставляем y_1 , y_1' , y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение. Опуская промежуточные преобразования, получим $(12B - 4A) \cos 3x + (-12A - 4B) \sin 3x = 20 \cos 3x$.

Приравнявая коэффициенты при $\cos$ и $\sin$, получим систему $12B - 4A = 20$, $4B + 12A = 0$. Откуда $A = -1/2$, $B = 3/2$. Тогда

$y_1 = -\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} \sin 3x$. Окончательно имеем

$$y = y_0 + y_1 = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x.$$

Исключение. Если правая часть есть функция тригонометрическая и если корни характеристического уравнения мнимые и при этом коэффициенты при мнимой части корня равны m (коэффициенту при x аргумента тригонометрической функции), тогда предполагаемое частное решение умножается на x .

Пример 6. $y'' + 9y = 2 \sin 3x$, $y = y_0 + y_1$, $y'' + 9y = 0$, $\lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Тогда $y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, $y_1 = (A \sin 3x + B \cos 3x)x$ - предполагаемое частное решение умножается на x . При этом $y_1' = (A - 3B) \sin 3x + (B + 3Ax) \cos 3x$, $y_1'' = -3B \sin 3x + (3A - 9Bx) \cos 3x + 3A \cos 3x - (3B + 9Ax) \sin 3x$. Подставляем y_1 , y_1' , y_1'' в данное неоднородное дифференциальное уравнение. Получим $6A \cos 3x - 6B \sin 3x = 2 \sin 3x$. Откуда $6A = 0$, $-6B = 2$; $A = 0$, $B = -\frac{1}{3}$. Тогда $y_1 = -\frac{1}{3} x \cos 3x$. Окончательно общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x.$$

Найдем общее решение неоднородного дифференциального уравнения вида $y'' + 2y' = (3e^{-2x} + 2x)$, где правая часть - сумма показательной и алгебраической функций относительно x .

Решение. $y'' + 2y' = 0$, $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Тогда $y_0 = (C_1 + C_2 e^{-2x})$ - общее решение данного однородного дифференциального уравнения. Частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $y_1 = Ae^{-2x}x + (Bx + D)x$. Коэффициенты A , B , D определяются по методике, рассмотренной выше, и находится общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения в виде $y = y_0 + y_1$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Предположим, что материальная точка массы m движется под действием силы $F = -cx$, притягивающей ее к началу координат, силы сопротивления среды $R\dot{x} = -b\frac{dx}{dt}$ и внешней силы $\bar{Q}(t)$, направленной по оси x (рис. 12.1).

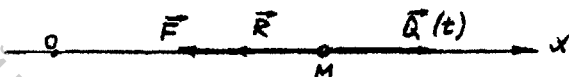


Рисунок 12.1

Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - b \frac{dx}{dt} + Q(t), \text{ или}$$

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + Q(t). \quad (12.1)$$

Данное уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = f(t), \quad (12.2)$$

где $n = \frac{b}{2m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, $f(t) = \frac{Q(t)}{m}$.

Уравнение затухающих колебаний ($n < k$) имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \quad (12.3)$$

Предположим, что $n = 0$, т.е. рассмотрим колебания в среде без сопротивления - свободные колебания. Дифференциальное уравнение свободных колебаний запишется в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (12.4)$$

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, корни которого чисто мнимые числа $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Общее решение дифференциального уравнения

(12.4)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (12.5)$$

Приведем это уравнение к более удобному для анализа виду, выразив C_1 и C_2 через новые постоянные интегрирования a и φ , положив $C_1 = a \sin \varphi$, $C_2 = a \cos \varphi$. Тогда $x = a \sin(kt + \varphi)$.

Такое движение называется гармоническим колебанием с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$, частотой k , амплитудой a и начальной фазой φ .

Амплитуда a и начальная фаза φ определяются из начальных условий $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$. Подставив эти условия в формулы $x = a \sin(kt + \varphi)$, $\dot{x} = ak \cos(kt + \varphi)$, получим $x_0 = a \sin \varphi$, $\dot{x}_0 = ak \cos \varphi$. Из этих равенств найдем

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \quad (12.6)$$

Предположим теперь, что $n > 0$, т.е. колебание происходит в среде с сопротивлением. Характеристическое уравнение для затухающих колебаний имеет вид $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, корни которого

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Возможны три случая.

Случай 1. $n^2 - k^2 > 0$. В этом случае оба корня характеристического уравнения вещественны и отрицательны. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - k^2})t} + C_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - k^2})t}.$$

Соответствующее движение точки называется аperiodическим движением.

Случай 2. $n = k$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = -n < 0$. Общее решение уравнения (12.3) будет определяться в виде $x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t)$.

Соответствующее ему движение будет также аperiodическим.

Случай 3. $n^2 - k^2 < 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни, причем их вещественная часть отрицательна. Общее решение имеет вид:

$$x = e^{-nt} [C_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2}t) + C_2 (\sin \sqrt{k^2 - n^2}t)]$$

или

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \varphi), \quad (12.7)$$

где a и φ связаны с C_1 и C_2 известными формулами

$$C_1 = a \sin \varphi, C_2 = a \cos \varphi.$$

Такое движение точки называется затухающим гармоническим колебанием с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ и частотой $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, амплитудой ae^{-nt} и начальной фазой φ . В отличие от чисто гармонического колебания здесь амплитуда ae^{-nt} не постоянна. Число a называется начальной амплитудой, а n - коэффициентом затухания. Множитель e^{-nt} характеризует быстроту затухания. Начальная амплитуда a и начальная фаза φ определяются из начальных условий.

Уравнение (12.2), которое имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = f(t),$$

представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки в среде с сопротивлением.

Уравнение вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2x = f(t). \quad (12.8)$$

Здесь собственные колебания, определяемые соответствующим однородным уравнением, есть чисто гармонические колебания. Движение, соответствующее частному решению уравнения (12.8), называется вынужденным колебанием.

Таким образом, колебание, определяемое уравнением (12.8), складывается из собственных колебаний точки под действием восстанавливающей силы $\vec{F}$, стремящейся вернуть точку в положение равновесия, и вынужденных колебаний, вызванных воздействием возмущающей силы $\vec{Q}(t)$.

В приложениях возмущающая сила часто бывает синусоидальной величиной. В этом случае частное решение уравнения вынужденных колебаний может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Сложив его с общим решением соответствующего уравнения свободных колебаний, получим общее решение уравнения вынужденных колебаний.

Пусть дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2x = H \sin pt. \quad (12.9)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$.

Рассмотрим два случая: 1) $p \neq k$; 2) $p = k$.

Пусть $p \neq k$. Частное решение будем искать в виде

$$x_1 = A \cos pt + B \sin pt.$$

Подставив частное решение в уравнение (12.9), получим

k^2	$x_1 = A \cos pt + B \sin pt,$
0	$\dot{x}_1 = -Ap \sin pt + Bp \cos pt,$
1	$\ddot{x}_1 = -Ap^2 \cos pt - Bp^2 \sin pt,$
$A(k^2 - p^2) \cos pt + B(k^2 - p^2) \sin pt = H \sin pt.$	

Получим систему:

$$\left. \begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= 0 \\ B(k^2 - p^2) &= H \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0, B = \frac{H}{k^2 - p^2}.$$

Общее решение уравнения (12.9) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin pt, \text{ или}$$

$$x = a \sin(kt + \varphi) + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (12.10)$$

Если $p = k$, частное решение имеет вид:

$$x(t) = t(A \cos kt + B \sin kt).$$

Подставив частное решение в уравнение (12.9), получим

k^2	$x_1 = t(A \cos kt + B \sin kt),$
0	$\dot{x}_1 = A \cos kt + B \sin kt + t(-Ak \sin kt + Bk \cos kt),$
1	$\ddot{x}_1 = 2k(-A \sin kt + B \cos kt) - tk^2(A \cos kt + B \sin kt),$
$-2Ak \sin kt + 2Bk \cos kt = H \sin kt.$	

Получим систему $-2Ak = h, 2Bk = 0$, откуда $A = -\frac{H}{2k}, B = 0$.

Тогда частное решение $x_1 = -\frac{H}{2k} t \cos kt$.

Общее решение уравнения (12.9) при $p = k$ будет

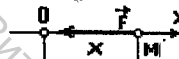
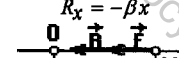
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{H}{2k} t \cos kt$$

$$\text{или } x = a \sin(kt + \varphi) - \frac{H}{2k} t \cos kt.$$

Здесь даны краткие сведения о колебательном движении материальной точки. Колебательное движение материальной точки является предметом самостоятельного рассмотрения.

Виды дифференциальных уравнений, описывающих колебательное движение материальной точки, и виды общих решений уравнений приведены в таблице 12.1. Графики колебаний и основные характеристики приведены в таблицах 12.2 и 12.3.

Таблица 12.1

Виды колебаний	Дифференциальные уравнения и их характеристики	Решение дифференциальных уравнений
1	2	3
<u>Свободные колебания:</u> восстанавливающая сила $F_x = -cx$ 	$\ddot{x} + k^2 x = 0,$ $k^2 = \frac{c}{m}, \lambda^2 + k^2 = 0,$ $\lambda_{1,2} = \pm ik$	$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$ или $x = a \sin(kt + \alpha)$
<u>Затухающие колебания</u> восстанавливающая сила $F_x = -cx$. сила сопротивления среды $R_x = -\beta \dot{x}$ 	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \frac{\beta}{m} = 2n,$ $\frac{c}{m} = k^2; \lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ а) $n < k, \lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$ б) $n > k, \lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ в) $n = k, \lambda_1 = \lambda_2 = -n$	а) $x = e^{-nt} (c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t)$, или $x = a e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha)$ б) $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, или $x = e^{-nt} (c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t})$ в) $x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t)$
<u>Вынужденные колебания</u> А) восстанавливающая сила $F_x = -cx$, возмущающая сила $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ 	$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, h = \frac{H}{m},$ $\lambda^2 + k^2 = 0, \lambda_{1,2} = \pm ik$ а) $k > p$, б) $k < p$, в) $k = p$ - резонанс	а) $x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt +$ $+\frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ или $x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \times$ $\times \sin(pt + \delta)$ б) $x = a \sin(kt + \alpha) +$ $+\frac{h}{2(p^2 - k^2)} \sin(pt + \delta - \pi)$ в) $x = a \sin(kt + \alpha) +$ $+\frac{h}{2k} t \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$

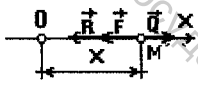
1	2	3
Б) восстанавливающая сила $F_x = -cx$, сила сопротивления среды $R_x = -\beta \dot{x}$, возмущающая сила $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ 	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$ а) $n < k$ б) $n > k$ в) $n = k$	а) $x = e^{-nt} (c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)$, или $x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ б) $x = e^{-nt} (c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ в) $x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)$

Таблица 12.2

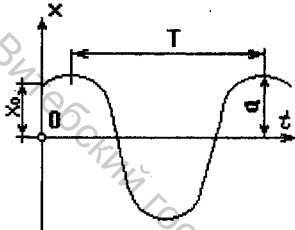
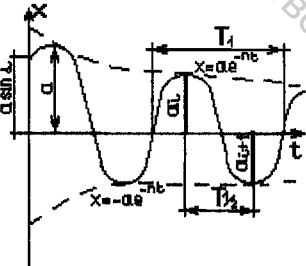
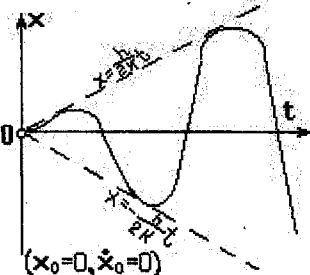
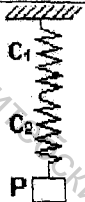
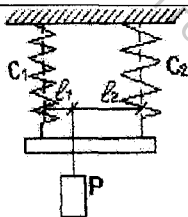
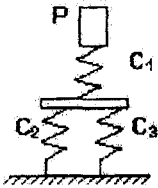
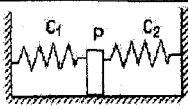
Графики колебаний и основные характеристики	
<u>Свободные колебания</u> 	$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{x_0}.$
<u>Затухающие колебания</u> 	$T_1 = \frac{2}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k_1}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$ $D = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{nT_1}{2}}, \quad \delta = \ln e^{-\frac{nT_1}{2}} = -\frac{nT_1}{2},$ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(\dot{x}_0 + nx_0\right)^2}{k_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0}{x_0 + nx_0} k_1.$
<u>Вынужденные колебания</u> (сила сопротивления $R=0$) 	$A = \frac{h}{ k^2 - p^2 }; \quad A_0 = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2};$ $\mu = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\left 1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right }, \quad \text{При } p=k \quad A = \frac{h}{2k} t.$

Таблица 12.3

Схемы соединения пружин	Эквивалентная жесткость C_{np}	Статическое удлинение	Период колебаний T
	$C_{np} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$\delta_{cm} = \delta_{cm_1} + \delta_{cm_2} = P \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{P(C_1 + C_2)}{g C_1 C_2}}$
	$C_{np} = C_1 + C_2$	$\delta_{cm} = \frac{P}{C_1 + C_2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(C_1 + C_2)}}$
	$C_{2,3} = C_2 + C_3$ $C_{np} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$	$\delta_{cm} = P \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}$	$T = 2\pi \times \sqrt{\frac{P(C_1 + C_2 + C_3)}{g C_1(C_2 + C_3)}}$
	$C_{np} = C_1 + C_2$		$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(C_1 + C_2)}}$

Список использованных источников

1. Теоретическая механика : методические указания по выполнению контрольных заданий для студентов заочного отделения инженерно-строительных, транспортных, машиностроительных и приборостроительных специальностей (с примерами их выполнения) / сост. А. В. Локтионов ; ВТИШ. – Витебск, 1981. – 64 с.
2. Теоретическая механика : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / сост. Л. И. Котова [и др.]. – Москва : Высш. школа, 1989. – 111 с.
3. Локтионов, А. В. Теоретическая механика. Динамика : учеб. пособие / А. В. Локтионов, Л. Г. Крыгина ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2003. – 171 с.
4. Локтионов, А. В. Теоретическая механика : Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» : учеб. пособие. Ч. 2. / А. В. Локтионов ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2005. – 205 с.
5. Методические указания по машинному контролю знаний студентов по курсу теоретической механики. Динамика / сост. М. С. Ковалев [и др.]. – Киев : КПИ, 1978. – 42 с.
6. Методические указания к изучению темы «Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси» / сост. Ю. С. Биза. – Минск : БИМСХ, 1988. – 44 с.
7. Контрольные вопросы по теоретической механике. Динамика / В. М. Адашевский [и др.]. – Харьков : ХПИ, 1988, – 28 с.
8. Дифференциальные уравнения движения точки / В. С. Аввакуменко [и др.]. – Горки : БСХА, 1985. – 18 с.
9. Методические указания по программированному контролю знаний студентов по курсу «Теоретическая механика». Раздел «Динамика» / сост. В. С. Григорчак [и др.]. – Караганда : КПИ, 1983. – 67 с.
10. Гладких, Е. Ф. Задания для самостоятельной работы по теоретической механике / Е. Ф. Гладких. – Липецк : ЛПИ, 1982. – 29 с.
11. Методические указания «Основные понятия высшей математики в задачах курса теоретической механики» для студентов механических и технологических специальностей / сост. А. В. Локтионов, Л. Г. Крыгина ; ВГТУ. – Витебск, 1996. – 33 с.

Библиотека ВГТУ



Учебное издание

Локтионов Анатолий Васильевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Тестовый контроль и программированные задачи
по разделу «Динамика»**

Часть 1

Редактор В.И. Олышанский

Технический редактор И.Л. Кудина

Корректор Т.К. Покатович

Компьютерный набор и верстка А.Н. Голубев

Подписано в печать 22.05.07. Формат 60х84 1/16. Печать ризографическая.
Гарнитура ТАЙМС. Усл.печ.л. 14,2. Уч.изд. л. 16,3. Тираж 163 экз. Заказ № 276.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет». Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Лицензия № 02330/0133005 от 01.04.2004.

210035, Витебск, Московский проспект, 72.