МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Элементы линейной и векторной алгебры. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса заочной формы обучения

ВИТЕБСК
2015

УДК 517 (075.8)

Высшая математика. Элементы линейной и векторной алгебры. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса заочной формы обучения.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2015.

Составители: доц. Дунина Е.Б.,
доц. Никонова Т.В.,
ст. преп. Рубаник О.Е.,
ст. преп. Статковский Н.С.

В методических указаниях изложены теоретические сведения и практические задания по четырем разделам курса «Высшая математика». Издание предназначено для студентов всех специальностей заочной формы обучения и может быть использовано на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов по высшей математике.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ» 14.04.2015 г., протокол № 6.

Рецензент: ст. пр. Коваленко А.В.
Редактор: зав. каф., д.ф.-м.н. Джежора А.А.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» " 28 " мая 2015 г., протокол № 5 .

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 23.09.15. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 4,9.
Печать ризографическая. Тираж 99 экз. Заказ № 258.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, г. Витебск, Московский пр., 72.

Введение

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей заочной формы обучения и дополняют лекционные курсы по дисциплине «Высшая математика».

Весь материал распределен по четырем разделам. Разделы состоят из подразделов. Вначале каждого подраздела даются краткие теоретические сведения, рассмотрены примеры решения задач и приводятся задачи для самостоятельной работы, которые помогают сформировать у студентов современные теоретические и практические знания по математике. Дополнительную информацию по каждому разделу можно найти в предложенном списке литературы.

Методические указания могут использоваться также и при дистанционном изучении данной дисциплины.

1 Определители и матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

1.1 Определители и их свойства. Вычисление определителей

Определителем или детерминантом второго порядка, называется разность:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}. \tag{1.1}$$

Числа $a_{11}, b_{12}, a_{21}, b_{22}$ - называют элементами определителя. Элементы a_{11}, b_{22} образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{21}, b_{12} образуют побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащими на главной и побочной диагоналях.

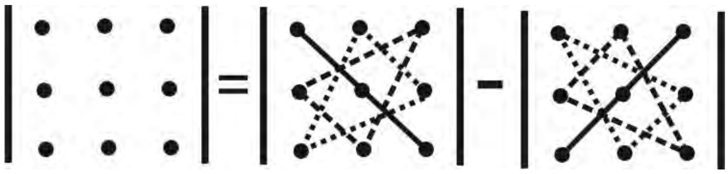
Пример: вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5 = 14$.

Определителем третьего порядка называется определитель вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_{22}c_{33} + a_{21}b_{32}c_{13} + b_{12}c_{23}a_{31} - c_{13}b_{22}a_{31} - b_{32}c_{23}a_{11} - a_{21}b_{12}c_{33}. \tag{1.2}$$

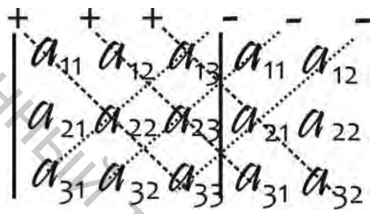
Этот способ вычисление определителя третьего порядка называется ***правилом Саррюса,*** иногда его называют ***правилом треугольника***. Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Пример: вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 5\cdot +3\cdot 1\cdot 4 - 5\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = -27$.

Формула длинная и, чтобы не допустить ошибку по невнимательности, можно воспользоваться следующим способом. Справа от определителя приписывают первый и второй столбец и проводят линии. Произведение элементов на прямых параллельных главной диагонали берутся со знаком плюс, а произведение элементов на прямых параллельных побочной диагонали, – со знаком минус:



Пример: вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}. \begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot(-2) - 4\cdot 3\cdot(-2) = 54.$$

Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится от замены всех его строк соответствующими по номеру столбцами и обратно. Такая операция замены в определители строк столбцами с сохранением порядка следования, называется ***транспонированием определителя.***

2. Если поменять местами два столбца (строки), то знак определителя изменится на противоположный.

3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.

4. Если все элементы какой-либо строки или столбца умножить на одно и тоже число m, то значение определителя измениться в m раз.

5. Определитель, у которого элементы двух столбцов или строк пропорциональны, равен нулю.

Минором определителя некоторого элемента**,**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется такой новый определитель, который получается из определителя Δ вычёркиванием строки и столбца, проходящих через данный элемент.

Например, минором определителя, соответствующим элементу a_{22}, будет

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента, называется соответствующий его минор, взятый со знаком «+» или «-» в зависимости от того, будет ли сумма номеров строки и столбца, которым принадлежит элемент, чётным или нечётным числом.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} мы будем обозначать A_{ij}. Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.3)$$

Например, алгебраическое дополнение элемента a_{23}

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраическое дополнение. Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

7. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или строки равна нулю. Например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

8. Определитель не меняет своего значения от прибавления ко всем элементам какого-либо столбца или строки соответствующих элементов другого столбца или строки, умноженных на одно и то же число.

Пример: вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой первой строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 45-48-2(36-42)+3(32-35)=0.$$

Задания для решения

Вычислить определитель Δ: а) по правилу треугольника; б) разложив его по элементам i-й строки; в) разложив его по элементам j- столбца.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $i=3, j=2$; **2.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$, $i=2, j=2$; **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3, j=1$;

4. $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 13 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=1, j=3$; **5.** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1, j=1$; **6.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $i=3, j=3$;

7. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 1 & 13 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2, j=1$; **8.** $\begin{vmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix}$, $i=1, j=2$; **9.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3, j=1$;

10. $\begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1, j=1$; **11.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1, j=2$; **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=1, j=3$;

13. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & -6 \\ 11 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=2, j=1$; **14.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix}$, $i=2, j=2$; **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 12 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2, j=3$;

1.2 Применение свойств определителя для упрощенного их вычисления

Метод понижения порядка

Все рассмотренные свойства определителя третьего порядка имеют место и для определителя n-ого порядка. Поэтому на основании свойств вычисление определителя любого порядка можно свести к вычислению определителя третьего и второго порядка. При конкретных вычислениях довольно часто используют формулы разложения определителя по столбцу или строке. Особенно удобно использовать формулы разложения по тем строкам или столбцам, где предварительно получены нули, кроме одного элемента, в этом случаи формула разложения будет содержать только одно слагаемое.

Пример: вычислить определитель четвертого порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение.

Вычитая из первого столбца утроенный последний столбец, будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Далее естественно разложить определитель по первому столбцу. В результате получим

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теперь в определителе третьего порядка вычтем из второго столбца удвоенный первый

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя определитель третьего порядка, разложив его по первой строке, окончательно получим

$$\Delta = 8 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot (500 - 400) = 800.$$

Приведение определителя к треугольному виду.

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***определителем треугольного вида***. С помощью элементарных преобразований над строками или столбцами определитель приводится к треугольному виду и тогда его значение, согласно свойствам определителя, равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Пример: вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ приведением его к треугольному виду.

Решение.

Получим нули в первом столбце под главной диагональю. Преобразования будет выполнять проще, если элемент a_{11}, будет равен единице. Для этого поменяем местами первый и второй столбцы определителя. По свойству 2, определитель сменит знак на противоположный

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Далее к третьей строке прибавляем первую, умноженную на (-2), а к четвертой строке прибавляем первую, в результате получим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее получаем нули во втором столбце на месте элементов, стоящих под главной диагональю. И снова, если диагональный элемент будет равен ± 1, то вычисления будут более простыми. Для этого меняем местами вторую и третью строки (знак определителя меняется на противоположный):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вторую строку умножаем на 3 и прибавляем к третьей и вторую строку умножаем на два и прибавляем четвертой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}.$$

Меняем местами третью и четвертую строки

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{vmatrix}.$$

Умножаем третью строку на (-10) и прибавляем к четвертой, получим определитель треугольного вида

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 80 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 80 = -80.$$

Задания для решения

Вычислить определитель Δ: а) приведя к треугольному виду; б) получив предварительно нули в *i*-й строке.

1. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=4$; **2.** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1$; **3.** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=3$;

4. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2$; **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1$; **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2$;

7. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$, $i=3$; **8.** $\begin{vmatrix} 0 & 9 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 11 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $i=4$; **9.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$, $i=1$;

10. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=2$; **11.** $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 17 & 4 \\ 1 & 0 & 12 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=3$; **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $i=4$;

13. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1$; **14.** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2$; **15.** $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3$;

1.3 Матрицы и их виды. Действия над матрицами

Матрица – прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов.
Обычно матрицу обозначают двойными вертикальными черточками или круглыми скобками

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей размера $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} из которых составлена матрица называются ее элементами. Если $m=n$ матрица называется ***квадратной***. Среди квадратных матриц выделяют класс ***диагональных матриц***, т.е. матрицы, которые имеют элементы не равные нулю только на главной диагонали:

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_1 & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix}.$$

Если $d_1 = d_2 = ... = d_n = 1$, то матрица называется ***единичной:***

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы нулевые, получила название ***нулевой:***

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы *A* и *B* считаются ***равными,*** если они одинакового размера, т.е. число строк и столбцов матрицы *A* соответственно равны числу строк и столбцов матрицы *B* и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой.

Основные операции, которые производятся над матрицами:

1. ***Сложение и вычитание матриц***.

Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. Суммой (разностью) матриц *A* и *B*, обозначаемой *A+B (A-B),* называется матрица *C*, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} – соответственно элементы матриц *A* и *B*.

Пример: найти сумму и разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

2. ***Умножение матрицы на число.***

Произведением матрицы *A* и числа λ, обозначаемым λA, называется матрица *B* той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы *A,* т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

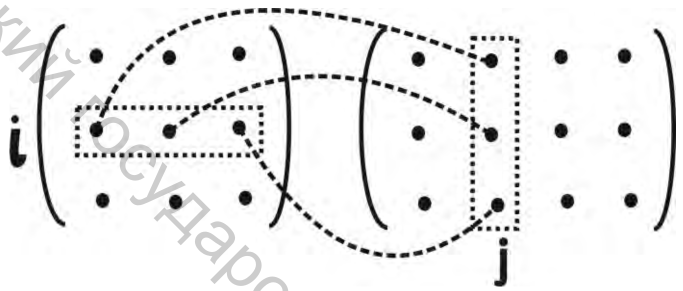
Пример: найти 2*A,* если $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}$.

3. *Умножение матриц.*

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, элементы которой $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} – элементы матриц *A* и *B*. Таким образом, произведение *AB* матрицы *A* на матрицу *B* определяется только в том случае, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*. В результате умножения получится новая матрица *C*, у которой число строк будет равно числу строк матрицы *A*, а число столбцов равно числу столбцов матрицы *B*.

Получение элемента c_{ij} схематично изображается так



Следует отметить, что произведение матриц не коммутативно $A\cdot B\neq B\cdot A$. Если *AB=BA*, то матрицы *A* и *B* называются ***перестановочными.***

Пример: найти *AB,* если $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&-5&3\\6&2&-4\\5&-1&7\end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-5&3\\6&2&-4\\5&-1&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot6+2\cdot5 & 1\cdot(-5)+0\cdot2+2\cdot(-1) & 1\cdot3+0\cdot(-4)+2\cdot7\\ 0\cdot1+(-1)\cdot6+3\cdot5 & 0\cdot(-5)+(-1)\cdot2+3\cdot(-1) & 0\cdot3+(-1)\cdot(-4)+3\cdot7\\ 3\cdot1+2\cdot6+1\cdot5 & 3\cdot(-5)+2\cdot2+1\cdot(-1) & 3\cdot3+2\cdot(-4)+1\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-7&17\\9&-5&25\\20&-12&8\end{pmatrix}.$$

Задания для решения

1. Даны матрицы *A* и *B*. Найти: *A+B*, *3A*, *2A-5B*, если

1.1 $A=\begin{pmatrix}5&-3\\0&9\\22&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&23\\-1&7\\6&5\end{pmatrix}$;

1.2 $A=\begin{pmatrix}6&1&7\\-9&0&6\\13&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&11&13\\0&9&4\\3&12&15\end{pmatrix}$;

1.3 $A=\begin{pmatrix}12&5\\-9&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&13\\10&4\end{pmatrix}$;

1.4 $A=\begin{pmatrix}8&-4\\16&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}55&0\\-8&3\end{pmatrix}$;

1.5 $A=\begin{pmatrix}12&-2&0\\7&5&7\\1&4&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&14&4\\-8&1&2\\5&2&7\end{pmatrix}$;

1.6 $A=\begin{pmatrix}0&36\\18&-1\\7&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17&5\\3&-5\\2&3\end{pmatrix}$;

1.7 $A=\begin{pmatrix}43 & -6 & 5\\ 0 & 12 & 7\\ 3 & 9 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ -8 & 1 & 22\\ 12 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

1.8 $A=\begin{pmatrix}7 & 6 & 6\\ -9 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 32 & 7\\ 5 & 9 & 4\\ 7 & 12 & 8\end{pmatrix}$;

1.9 $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 11 & -1\\ 2 & 1 & -3 & 11\\ 7 & 3 & 1 & 4\\ 5 & 4 & 8 & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 3\\ 11 & 0 & 6 & 3\\ 5 & 32 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

1.10 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 5 & 3\\ 0 & 32 & 8\\ 3 & 65 & 3\end{pmatrix}$;

1.11 $A=\begin{pmatrix}25 & -13\\ 6 & 1\\ 0 & 23\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 45\\ -7 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}$;

1.12 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 5 & 8 & 4\\ -5 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 7\\ 0 & 12 & 16\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}$;

1.13 $A=\begin{pmatrix}-96 & 1\\ 11 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 4 & -9\end{pmatrix}$;

1.14 $A=\begin{pmatrix}8 & -4\\ 16 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18 & 6\\ -5 & 3\end{pmatrix}$;

1.15 $A=\begin{pmatrix}9 & -9 & 1\\ 7 & 8 & 5\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 15 & 5\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

2. Даны матрицы *A* и *B*. Найти: *AB* и *BA*, если

2.1 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 6\\ 6 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 9 & 3\\ 0 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$;

2.2 $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 11 & 13\\ 4 & 6 & 1\\ 3 & 8 & 7\end{pmatrix}$;

2.3 $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 0 & 9 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$;

2.4 $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 4 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$;

2.5 $A=\begin{pmatrix}100 & 3\\ 23 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$;

2.6 $A=\begin{pmatrix}23 & 11\\ 55 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;

2.7 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 7\\ -1 & 9 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4\\ -7 & 2 & 44\\ 1 & 8 & 5\end{pmatrix}$;

2.8 $A=\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}76 & 2\end{pmatrix}$;

2.9 $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 11 & -3 & 3\\ 7 & 4 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 45 & 3\\ -1 & 32 & 2\\ 3 & 43 & 1\end{pmatrix}$;

2.10 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & -5 & 7\\ 4 & 65 & 7\end{pmatrix}$;

2.11 $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 3\\ 6 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 4 & 1\\ 1 & 7 & 2\\ 3 & 11 & 3\end{pmatrix}$;

2.12 $A=\begin{pmatrix}35\\ -9\\ 90\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}$;

2.13 $A=\begin{pmatrix}0 & -7\\ 8 & 34\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 65 & -1\end{pmatrix}$;

2.14 $A=\begin{pmatrix}88 & 9\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}44 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

2.15 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 7 & 2 & 5\\ 6 & 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 31 & -3\\ -9 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

1.4 Обратная матрица

Дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

определитель системы.

Матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной*** (или особенной), а матрица, определитель которой отличен от нуля – ***невырожденной*** (или неособенной).

Если для данной матрицы A существует матрица A^{-1}, такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}, \tag{1.6}$$

где E – единичная матрица, то матрица A^{-1} называется обратной матрицей по отношению к матрице A, а сама матрица A – обратимой. ***Для каждой обратимой матрицы существует только одна обратная матрица,*** которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Матрица B называется ***присоединенной***. Заметим, что в i строке матрицы B расположены алгебраические дополнения элементов j столбца определителя:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Пример: найти матрицу обратную данной $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Проверим, обратима матрица A или нет, т.е. является ли она вырожденной

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\-3&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&5&0\\-1&0&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=-1(-1)^6\begin{vmatrix}7&5\\-1&0\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0$; $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-1$; $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-3&-1\\2&1\end{vmatrix}=-1$;

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=5$; $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}=-7$; $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3$;

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\-1&1\end{vmatrix}=5$; $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&3\\-3&1\end{vmatrix}=-10$; $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\-3&-1\end{vmatrix}=5$.

Запишем обратную матрицу

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&5\\-1&-7&-10\\-1&3&5\end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности решения достаточно проверить равенство (1.6)

$$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&5\\-1&-7&-10\\-1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Задания для решения

Дана матрица *A*. Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

1. $\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$; **3.** $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&6\\5&7&4\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}-1&2&5\\7&4&3\\4&1&5\end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix}10&2&0\\3&1&6\\3&5&2\end{pmatrix}$; **6.** $\begin{pmatrix}4&3&1\\7&6&5\\0&3&8\end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix}1&2&7\\3&8&6\\0&9&4\end{pmatrix}$; **8.** $\begin{pmatrix}1&0&5\\3&3&6\\7&-2&4\end{pmatrix}$; **9.** $\begin{pmatrix}9&7&5\\3&4&5\\4&8&1\end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix}8&1&6\\1&3&6\\7&3&10\end{pmatrix}$; **11.** $\begin{pmatrix}7&1&5\\1&3&6\\20&3&-3\end{pmatrix}$; **12.** $\begin{pmatrix}12&-9&7\\8&2&1\\0&3&13\end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix}11&2&1\\-5&2&6\\7&3&8\end{pmatrix}$; **14.** $\begin{pmatrix}-2&2&3\\4&3&6\\1&-3&11\end{pmatrix}$; **15.** $\begin{pmatrix}2&9&5\\4&0&11\\4&3&7\end{pmatrix}$;

1.5 Ранг матрицы

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в этой матрицы k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этой строки и столбца образуют квадратную матрицу. Определитель данной матрицы называется минором k-ого порядка M_k. Минор M_{k+1} порядка *k+1*, который содержит в себе минор M_k, называется ***окаймляющим минором***.

Если любой минор M_k не равен нулю, а все возможные миноры M_{k+1} равны нулю, то говорят, что ранг матрицы равен *k (rangA=k)*. Отличный от нуля минор M_k матрицы *A,* называют базисным минором матрицы *A*.

Методы нахождения ранга матрицы:

1. ***Метод окаймляющих миноров***

Пример: вычислить ранг матрицы: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.

Выберем минор второго порядка, находящийся в верхнем левом углу,

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 .$$

Минор второго порядка не равен нулю, следовательно, ранг не менее двух.

Составляем миноры третьего порядка, окаймляющие отличный от нуля минор второго порядка. Для этого добавим к M_{12}^{12} третью строку и третий столбец

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$M_{124}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 21 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{vmatrix} = 0 .$$

Все миноры третьего порядка, окаймляющие минор второго порядка, равны нулю. А это значит, что *rangA=2*.

2. *Метод Гаусса*

Другим простым способом вычисления ранга матрицы является метод Гаусса, основанный на элементарных преобразованиях, выполняемых над матрицей. Такими преобразованиями являются:

- вычёркивание строки состоящей из нулей;
- прибавление к элементам одной из строк, соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число;
- перестановку двух строк (двух параллельных рядов);
- все строки заменить столбцами.

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матрицу можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3k} & \dots & b_{3n} \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & b_{kk} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

В этой матрице все диагональные элементы b_{11}, b_{22}, b_{33} и т.д. отличны от нуля, а элементы других строк, расположенные ниже, равны нулю. Т.к. ранг не меняется при элементарных преобразованиях, то ранг исходной матрицы будет равен рангу данной матрицы *B* и равен числу не нулевых строк.

Пример: найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Добьемся, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого были нулями. Первую строку оставим без изменения, затем первую строку умножим на (-2) и прибавим ко второй, первую строку умножим на (-1) и прибавим к третьей, и наконец, первую строку умножим на 2 и прибавим к четвертой строке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Применим теперь элементарные преобразования таким образом, чтобы в матрице все элементы второго столбца кроме первых двух, были нулями. Умножим вторую строку на 2 и прибавим к четвертой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим третью строку на (-1) и сложим с четвертой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая нулевую строку, получим $rangA=3$.

Задания для решения

Найти ранг матрицы двумя способами: а) с помощью элементарных преобразований, б) методом окаймляющих миноров.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; **6.** $\begin{pmatrix} -4 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & 8 & 1 \\ 5 & 15 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; **11.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$; **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 5 & -2 & 4 & -15 \\ 7 & 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$; **14.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; **15.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & -5 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & -19 & 20 & 40 \end{pmatrix}$

1.6 Система линейных уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли

Систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.9)$$

называют ***системой m линейных уравнений с n неизвестными.***

Через $x_1, x_2 ... x_n$ обозначены неизвестные системы, подлежащие определению (их число *n* не предполагается обязательно равным числу уравнений *m*). Величины $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ называются коэффициентами системы, и величины $b_1, b_2 ... b_n$ – свободными членами.

Если все свободные члены $b_1, b_2 ... b_n$ равны нулю, то система называется ***однородной***, если хотя бы один свободный член не равен нулю, то система называется ***неоднородной.*** Решением системы (1.9) называется совокупность таких чисел $c_1, c_2 ... c_n$, которая при подстановке в систему, вместо неизвестных $x_1, x_2 ... x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система уравнений вида (1.9), называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если у нее не существует ни одного решения. Если совместная система имеет единственное решение, то она называется ***определённой***, если совместная система имеет два и более решений, то она называется ***неопределённой.***

Обозначим через *A* матрицу из коэффициентов (1.9), а через *B* – матрицу, полученную из *A* присоединением столбца свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ & ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Матрицу *A* называют ***основной***, а матрицу *B* называют ***расширенной.***

Теорема о совместности системы линейных уравнений (*теорема Кронекера-Капелли*): для того, чтобы система линейных уравнений была совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы *A* был равен рангу расширенной матрицы *B*. Если ранг матрицы *A* равен рангу матрицы *B* и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы *A* равен рангу матрицы *B*, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное количество решений.

Пример: проверить на совместность систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_3 = 4 \end{cases}$.

Решение.

Выпишем расширенную матрицу данной системы и найдем ранги основной и расширенной матриц. Не будем переставлять столбец свободных членов с другими столбцами матрицы, чтобы сразу определить ранги основной и расширенной матриц

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на (-1) и прибавим к первой

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 14 & 8 & -26 & 18 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \end{array}\right).$$

Переставим вторую и третью строки

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \\ 0 & 14 & 8 & -26 & 18 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Получили *rangA=2, rangB=3,* откуда $rangA \neq rangB$. Т.е. система уравнений несовместна.

1.7 Решение систем линейных уравнений

Формулы Крамера.

Для простоты будем рассматривать систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}. \tag{1.10}$$

Из коэффициентов системы составим определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$.

Решение системы запишется в виде

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{1.11}$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получаются из определителя Δ при помощи замены соответственно его первого, второго и, наконец, третьего столбца столбцом свободных членов системы (1.10).

Пример: решить систему с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x-y+z=1. \end{cases}$.

Решение.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1. & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -4-4=-8 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение. Вычислим теперь остальные три определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 8.$$

Следовательно:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{8}{-8} = 1.$$

Матричный метод решения системы линейных уравнений.

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \quad (1.12)$$

Матрица *A* в этом случае будет квадратной:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть определитель этой матрицы $\Delta \neq 0$. Введем матрицы столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix},\ \widetilde{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.12) в матричном виде можно записать: $A\cdot X=\widetilde{B}$. Умножим это выражение слева на обратную матрицу:

$$A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}\widetilde{B},$$

$$(A^{-1}A)\cdot X=A^{-1}\widetilde{B},\ EX=A^{-1}\widetilde{B},$$

откуда

$$X=A^{-1}\widetilde{B}.$$

Следовательно, матрица-решение X находится как произведение A^{-1} и $\widetilde{B}$.

Пример: решить систему средствами матричного исчисления:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\2x_1-x_2+3x_3=9,\\3x_1+4x_2-x_3=8.\end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&3\\3&4&-1\end{vmatrix}=44$$

Найдем алгебраические дополнения и обратную матрицу:

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1&3\\4&-1\end{vmatrix}=-11$; $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\3&-1\end{vmatrix}=11$; $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&-1\\3&4\end{vmatrix}=11$;

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\4&-1\end{vmatrix}=14$; $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&3\\3&-1\end{vmatrix}=-10$; $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2$;

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\-1&3\end{vmatrix}=9$; $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}=3$; $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5$.

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-11&14&9\\11&-10&3\\11&2&-5\end{pmatrix}.$$

Находим:

$$X=A^{-1}\widetilde{B}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-11&14&9\\11&-10&3\\11&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\9\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-11\cdot14+14\cdot9+9\cdot8\\11\cdot14-10\cdot9+3\cdot8\\11\cdot14+2\cdot9-5\cdot8\end{pmatrix}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}44\\88\\132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

т.е. $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ – решение данной системы.

Метод Гаусса

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными (1.12). Исключим из всех уравнений системы, начиная со второго, неизвестную x_1. Для этого первое уравнение нужно умножить на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложить со вторым уравнением, и т.д. В результате получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2m}x_n = b'_2, \\ \qquad ... \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Далее первое и второе уравнения оставим без изменения, а начиная с третьего уравнения, будем избавляться от переменной x_2 и т.д. Продолжая этот процесс, получится система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a''_{22}x_2 + a''_{23}x_3 + ... + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad .... \\ \qquad\qquad a''_{kk}x_k + ... + a''_{kn}x_n = b''_k. \end{cases}$$

Если $k=n$, то система имеет единственное решение, если $k\neq n$, а именно $k<n$, то система имеет бесконечное множество решений.

На практике процесс решения системы уравнений облегчается тем, что указанным преобразованиям подвергают не саму систему, а матрицу, составленную из коэффициентов системы и их свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ & ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Т.е. при помощи элементарных преобразований, мы будем стремиться к тому, чтобы на диагонали были не нулевые элементы, а элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю.

Пример: решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу B и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad x_2 = 1, \\ \quad -2x_3 = -2. \end{cases}$$

Из нее, двигаясь снизу вверх, последовательно находим: $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$.

Пусть дана ***однородная*** система трех линейных уравнений с тремя неизвестными, т.е. все свободные члены равны нулю

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}. \tag{1.13}$$

Такая система всегда имеет решение *x=0, y=0, z=0,* называемое ***нулевым.*** Действительно, если определитель системы (1.13) отличен от нуля, то для решения можно воспользоваться формулами (1.11). Но здесь все определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ равны нулю, т.к. в каждом из них имеется столбец, состоящий из нулей, поэтому

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 0.$$

Когда же система (1.13) может иметь еще и ненулевое решение?

Пусть, по крайней мере, одно из неизвестных, например, *x*, отлично от нуля. Для этого неизвестного можно написать уравнение $x \cdot \Delta = \Delta_x$. Т.к. $\Delta_x = 0$, то $x \cdot \Delta = 0$. Один из сомножителей, а именно *x* не равен нулю, следовательно, должен быть равен нулю второй сомножитель $\Delta = 0$. ***Т.е. ненулевые решения системы* (1.13) *могут быть только в случае*** $\Delta = 0$.

Пример: решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + z = 0, \\ -x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. Система имеет бесконечно много решений, т.к.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Третье уравнение получается, если первое уравнение умножить на (-3) и сложить со вторым. Т.е. мы имеем в действительности не три, а два уравнения с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x и *y* не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x и y и переместим слагаемые с *z* в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -z, \\ 2x + y = -z. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -z & -1 \\ -z & 1 \end{vmatrix} = -z - z = -2z,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -z \end{vmatrix} = -z + 2z = z.$$

Отсюда находим, что $x=\frac{-2z}{3}$, $y=\frac{z}{3}$. Полагая $z=3k$, где k – произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение системы: $x=-6k, y=k, z=3k$.

Задания для решения

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

1.1 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-x_3=10. \end{cases}$ **1.2** $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ x_1-2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$ **1.3** $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+x_2+4x_3=6, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$ **1.5** $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22. \end{cases}$ **1.6** $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1, \\ x_1+5x_2+x_3=-3. \end{cases}$ **1.8** $\begin{cases} -3x_1+5x_2+6x_3=-8, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ x_1-4x_2-2x_3=-9. \end{cases}$ **1.9** $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36, \\ x_1-4x_2-2x_3=-19. \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36, \\ x_1-4x_2-2x_3=-19. \end{cases}$ **1.11** $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=9, \\ 5x_1+x_2+2x_3=11, \\ x_1+2x_2+4x_3=19. \end{cases}$ **1.12** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=13, \\ x_1+2x_2-x_3=9. \end{cases}$

1.13 $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$ **1.14** $\begin{cases} 8x_1+7x_2+3x_3=18, \\ -7x_1-4x_2-4x_3=-11, \\ -6x_1+5x_2-4x_3=-15. \end{cases}$ **1.15** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3=3, \\ 4x_1-x_2+x_3=5. \end{cases}$

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

2.1 $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **2.2** $\begin{cases} 5x_1+x_2-6x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$ **2.3** $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} 7x_1-6x_2-x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3=0. \end{cases}$ **2.5** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$ **2.6** $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1-2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-9x_3=0. \end{cases}$

2 Векторы
2.1 Линейные операции над векторами

Вектором на плоскости (или в пространстве) называется ***направленный отрезок***, для которого указаны начало и конец. Если точка A − начало вектора, B − конец вектора, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или одной буквой $\vec{a}$.

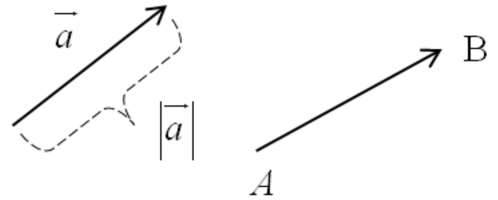


Рисунок 2.1 – Изображения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$.

Длиной вектора $\vec{a}$ называется длина соответствующего ему отрезка и обозначается $|\vec{a}|$. Вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$, если его начало и конец совпадают. ***Единичным*** вектором называется вектор $\vec{a}$, длина которого равна 1, $|\vec{a}|=1$.

Два или более ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если все они лежат на параллельных прямых. Коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ могут быть ***сонаправленными*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ или ***противоположно направленными*** $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Два или более ненулевых вектора называются ***компланарными***, если они лежат на прямых, параллельных одной плоскости.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными*** ($\vec{a} = \vec{b}$), если:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 3) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Рисунок 2.2 – Иллюстрация понятия равенства векторов

На рисунке 2.2 заданы пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} \neq \vec{b}$ так как $\vec{a} \nparallel \vec{b}$; б) $\vec{a} \neq \vec{b}$ так как $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; в) $\vec{a} \neq \vec{b}$ так как $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$;

в) $\vec{a} = \vec{b}$ так как $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Используя понятие равенства векторов, можно откладывать заданный вектор в любой точке плоскости (пространства) путем параллельного переноса.

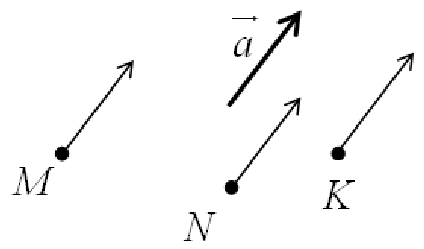


Рисунок 2.3 – Построение вектора вектор $\vec{a}$ в разных точках

Линейные операции над векторами проиллюстрируем на рисунках 2.4-2.6.

Умножение вектора на число

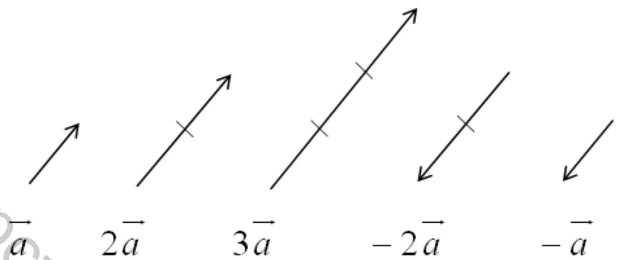


Рисунок 2.4 – Иллюстрация операции умножения вектора на число

На рисунке 2.4

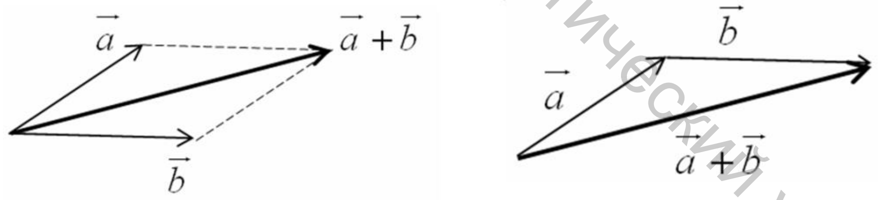
вектор $2\vec{a}$ <u>сонаправлен</u> с $\vec{a}$ и в два раза длиннее, чем $\vec{a}$;

вектор $3\vec{a}$ <u>сонаправлен</u> с $\vec{a}$ и в три раза длиннее, чем $\vec{a}$;

вектор $(-2)\vec{a}$ <u>противоположно направлен</u> к $\vec{a}$ и в два раза длиннее, чем $\vec{a}$;

вектор $(-\vec{a})$ <u>противоположно направлен</u> к вектору $\vec{a}$ и их длины равны.

На рисунке 2.5 показана операция ***сложения векторов***



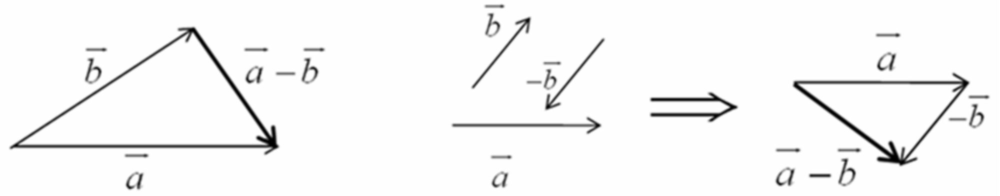
а б

Рисунок 2.5 – Иллюстрация операции сложения векторов:
а – по правилу параллелограмма; б – по правилу треугольника

Сложение векторов по правилу параллелограмма. Заданные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем из одной точки. Построим на них параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма с началом в заданной точке задаёт вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

Сложение векторов по правилу треугольника. Откладываем вектор $\vec{a}$. Из конца вектора $\vec{a}$ откладываем вектор $\vec{b}$. Соединяем начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$. Получим вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

Вычитание векторов



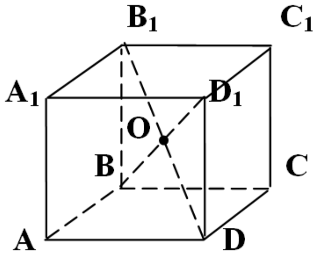
а б

Рисунок 2.6 – Иллюстрация операции вычитания векторов:
а – по правилу треугольника; б – по правилу $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$.

Вычитание векторов по правилу треугольника. Заданные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем из одной точки. Вектор $\vec{a}-\vec{b}$ соединяет концы векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.
Из рисунка 2.6(а) видим, что $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}$.
На рисунке 2.6(б) к вектору $\vec{a}$ прибавлен вектор $(-\vec{b})$.

Пример: задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O − центр куба.
Требуется с помощью точек A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 O записать:
1) пару коллинеарных сонаправлевнных векторов;
2) пару коллинеарных противоположно направлевнных векторов;
3) четверку равных векторов; 4) тройку компланарных векторов;
5) тройку некомпланарных векторов; 6) вектор $2\overrightarrow{BO}$; 7) вектор $-2\overrightarrow{BO}$;
8) вектор $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; 9) вектор $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 10) вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$.

Решение.



1) $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1D}$;
3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{DC}$;
4) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{CD}$ − компланарные;
5) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{BC}$ − некомпланарные;

6) $2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD_1}$; 7) $-2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{D_1B}$; 8) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$;
9) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$; 10) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AB_1}$.

Задания для решения

1. Задан параллелограмм $ABCD$. Точка O − точка пересечения диагоналей. С помощью точек A, B, C, D, O назвать:

а) векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$, вектору $\overrightarrow{AO}$;
б) вектор, равный вектору $\overrightarrow{BC}$; в) вектор $2\cdot\overrightarrow{AO}$; г) вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;
д) вектор $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. е) векторы, равные вектору $(-1)\cdot\overrightarrow{AO}$;

2. На плоскости даны точки $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(3;0)$, $D(4;2)$.
Изобразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$, $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$.

3. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ (см. рис 2.7 (а)).

Изобразить векторы: а) $2\vec{c}-\vec{q}+3\vec{d}$; б) $2\vec{p}+\vec{q}+3\vec{c}-2\vec{d}$.

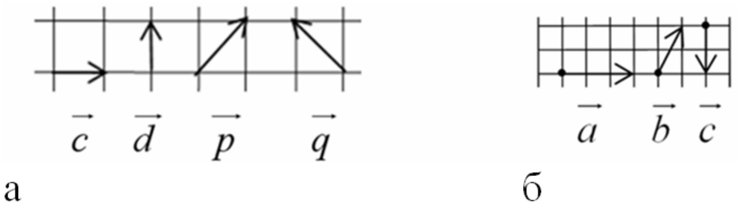


Рисунок 2.7 – Заданные векторы к задачам:
а – к задаче 3; б – к задаче 4

4. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (см.рис. 2.7, (б)).

Изобразить векторы: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{a}$.

5. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O − центр куба. Указать вектор $\vec{p}$ такой, что: а) $\overrightarrow{AB}\ \square\ \vec{p}$; б) $\overrightarrow{A_1D}\ \square\ \vec{p}$; в) $\overrightarrow{CC_1}\ \square\ \vec{p}$; г) $\overrightarrow{OB_1}\ \square\ \vec{p}$.

6. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O − центр куба. Указать вектор $\vec{p}$ такой, что компланарна тройка векторов:

а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\vec{p}$; б) $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1O}$, $\vec{p}$; в) $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\vec{p}$.

7. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Для указанных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назвать векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}$:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{BB_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BD}$; в) $\vec{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DC}$.

2.2 Базис векторов. Координаты вектора в базисе

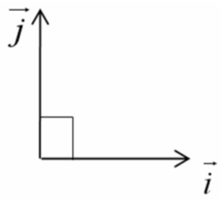
Базис векторов на плоскости (в пространстве) − это такая совокупность векторов, что любой вектор на плоскости (в пространстве) через эти векторы записывается единственным образом (в виде линейной комбинации).

На плоскости любые два неколлинеарные векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ образуют ***базис*** векторов плоскости (см. рис. 2.8).

Рисунок 2.8 – Базис векторов на плоскости

Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости единственным образом можно записать в виде $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v}$. Числа a_1, a_2 называются ***координатами*** вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Это можно записать коротко $\vec{a} = (a_1; a_2)$.

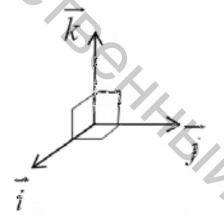
Для решения задач на практике выбирают самый простой базис – ***ортонормированный***. Он составлен из двух единичных взаимно перпендикулярных векторов, которые принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$ (см. рис. 2.9).



$$\vec{i} \perp \vec{j}, \quad |\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1$$

Рисунок 2.9 – Ортонормированный базис векторов на плоскости

В пространстве любые три некомпланарных вектора $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ образуют ***базис*** векторов пространства . ***Ортонормированный*** базис в пространстве образуют векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (см. рисунок 2.10).



$$\vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k},$$
$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1, \quad |\vec{k}| = 1$$

Рисунок 2.10 – Ортонормированный базис векторов в пространстве

Вычисление координат вектора $\overrightarrow{AB}$ в ортонормированном базисе производится по следующим формулам.

На плоскости: $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$ по точкам $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

В пространстве: $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$ по точкам $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Рисунок 2.11 поясняет природу этих формул.

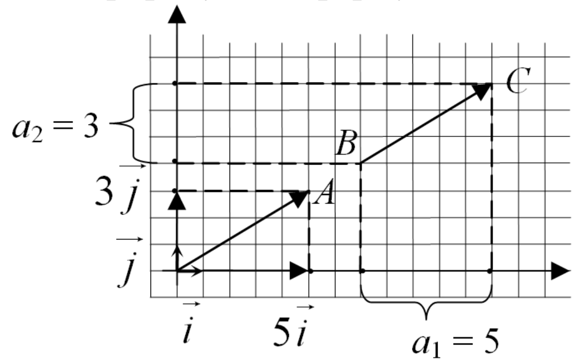


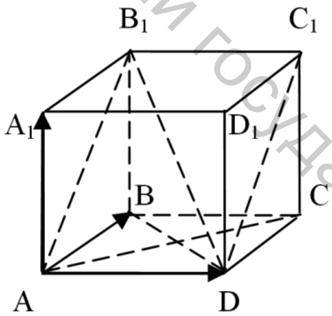
Рисунок 2.11 – Вычисление координат вектора по координатам точек

На рисунке 2.11 задана точка $A(5;\,3)$. Тогда вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=5\vec{i}+3\vec{j}=(5;3)$.

Если вектор $\vec{a}$ отложить в точке $B(7;\,4)$, то получим вектор $\overrightarrow{BC}$, где $C(12;\,7)$. Координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, очевидно, совпадают и равны ***проекциям*** этих векторов на оси Ox и Oy, соответственно, $a_1=\left|5\vec{i}\right|=12-7=5$, $a_2=\left|3\vec{j}\right|=7-4=3$

Пример: задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O − центр куба. Сторона $AB=1$. Зададим базис векторов $\vec{i}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{k}=\overrightarrow{AA_1}$. Найти в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC_1}$.

Решение.



$\overrightarrow{AB}=\vec{j}=0\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(0;1;0)$;

$\overrightarrow{AD}=\vec{i}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(1;0;0)$;

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}=1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(1;1;0)$;

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{j}-\vec{i}=(-1)\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(-1;1;0)$;

$\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{j}+\vec{k}=0\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=(0;1;1)$

Задания для решения

1. $ABCD$ − прямоугольник, O − его центр. Обозначим векторы $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. В базисе $\vec{u}$, $\vec{v}$ написать координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$.

2. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K − середины сторон соответственно AB, BC, CD. Обозначим $\vec{u}=\overrightarrow{AK}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AM}$. Записать в базисе $\vec{u}$, $\vec{v}$ координаты векторов $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$.

3. На кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим векторы $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AA_1}$. Найти в базисе $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$.

4. $ABCDEF$ − правильный шестиугольник. Обозначим $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AF}$. В базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$ написать координаты векторов $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FC}$.

5. На плоскости в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ построить вектор $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Построить вектор $\vec{a}$ с началом в точках $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(0;-4)$.

6. На плоскости построить векторы: а) $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$; б) $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$;
в) $\vec{c}=(3;2)$ с началом в точке $A(1;1)$; г) $\vec{d}=(0;-3)$ с началом в точке $B(-1;-1)$.

7. Даны точки $A(1;2)$, $B(-3;5)$, $C(7;4)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

8. Даны точки $A(-3;2;5)$, $B(0;7;1)$, $C(4;9;5)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.

9. $ABCD$ − параллелограмм, $A(2;-3;5)$, $B(-1;3;2)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{DC}$.

10. Даны точка $A(1;4;7)$ и вектор $\overrightarrow{AB}=(2;3;5)$. Найти координаты точки B.

11. Определить конец вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, если $K(0;7;1)$ − его начало.

12. Дано: $\overrightarrow{AB}=(2;3;5)$, $\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{AB}$, $P(-7;1;4)$. Найти координаты точки K.

2.3 Линейные операции над векторами в координатах

Пусть заданы векторы: $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ и число λ.

Тогда координаты векторов $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ вычисляются по формулам:

1) $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2)$; 2) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$; 3) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$.

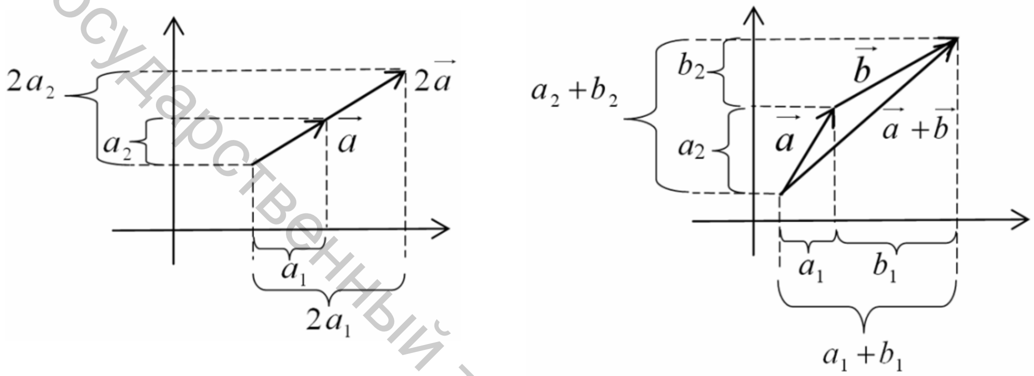


Рисунок 2.12 – Иллюстрация операций над векторами в координатах

Если в пространстве заданы векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, то

1) $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$;

3) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$.

Условие коллинеарности векторов.

Если векторы $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ (оба $\neq\vec{0}$) коллинеарны, то существует число λ такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то есть $(b_1;b_2)=(\lambda a_1;\lambda a_2)$.

Следовательно, $\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ b_1=\lambda a_1,\ b_2=\lambda a_2}$

Для векторов в пространстве $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ b_1=\lambda a_1;\quad b_2=\lambda a_2;\quad b_3=\lambda a_3}$$

Координаты середины отрезка

Если заданы точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и точка $C(x_0, y_0)$ − середина отрезка AB, то $\boxed{x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$

Иллюстрация этой формулы приведена на рисунке 2.13.

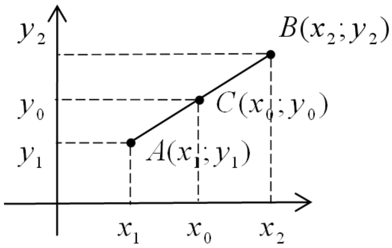


Рисунок 2.13 – Координаты середины отрезка на плоскости

В пространстве равенства аналогичны

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

Пример: заданы точки $A(1;2;-1)$, $B(3;2;6)$, $C(6;7;3)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Найти координаты середины отрезка AB.

Решение.

$\overrightarrow{AB} = \ 3-1;2-2;6-(-1) \ = \ 2;0;7 \ ;$ $\quad \overrightarrow{AC} = \ 6-1;7-2;3-(-1) \ = \ 5;5;4 \ ;$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2;0;7) + (5;5;4) = (2+5;0+5;7+4) = (7;5;11)$;

$\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (2;0;7) - (5;5;4) = (2-5;0-5;7-4) = (-3;-5;3)$;

$\vec{c} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3\cdot\ 2;0;7\ - 2\cdot\ 5;5;4\ = \ 3\cdot 2;3\cdot 0;3\cdot 7\ - \ 2\cdot 5;2\cdot 5;2\cdot 4\ =$

$= \ 6;0;21\ - \ 10;10;8\ = \ -4;-10;13\ .$

Векторы $\vec{a} = (7;5;11)$, $\vec{b} = (-3;-5;3)$ не коллинеарны, так как $\dfrac{7}{-3} \neq \dfrac{5}{-5}$.

Пусть $O(x_0; y_0; z_0)$ − середина отрезка AB. По координатам точек $A(1; 2; -1)$, $B(3; 2; 6)$ находим $x_0 = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $y_0 = \dfrac{2+2}{2} = 2$, $z_0 = \dfrac{-1+6}{2} = 2{,}5$. Следовательно, $O(2; 2; 2{,}5)$.

Задания для решения

1. Заданы координаты векторов на плоскости $\vec{a} = (4;2)$, $\vec{b} = (-1;5)$. Найти координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $4\vec{a}$, $0{,}5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. Заданы векторы $\vec{a} = (6;-3)$, $\vec{b} = (-4;10)$. Найти координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $\dfrac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$, $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

3. В пространстве заданы векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=(-2;1;0)$. Найти координаты векторов $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a}$ = (3; 8; 1), $\vec{b}$ = (−1; 6; 0). Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{a}-2\vec{b}$.

5. Заданы точки *A*(3;1;2), *B*(3;5;3), *C*(4;2;8). Найти координаты векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=2\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}$.

6. Векторы $\vec{a}=(3;x)$, $\vec{b}=(9;30)$ коллинеарны. Найти число *x*.

7. Векторы $\vec{a}=(2;6;y+8)$, $\vec{b}=(1;x;5)$ коллинеарны. Найти числа *x*, *y*.

8. Точки *A*(0;0;2), *B*(4;2;5), *C*(12;6;*p*) лежат на одной прямой. Найти число *p*.

9. Точки *A*(1;0;1), *B*(*x*;2;3), *C*(2;*y*;5) лежат на одной прямой. Найти числа *x*, *y*.

10. Даны точки *A*(1;2;3), *B*(5;6;7). Найти координаты середины отрезка *AB*.

11. Даны вектор $\overrightarrow{AB}=(4;4;4)$ и точка *A*(1;2;3). Найти координаты середины отрезка *AB*.

12. В параллелограмме *ABCD* известны координаты вершин *A*(1;2), *B*(−3;5), *C*(4;8). Найти координаты точки *D*.

13. Заданы координаты вершин *A*(2;2), *C*(14;6) параллелограмма *ABCD*. Найти координаты точки *O* пересечения его диагоналей.

14. Даны координаты вершин *A*(−2; 1), *D*(3; 2) и центра *O*(1; 3) параллелограмма *ABCD*. Найти координаты вершин *B* и *C*.

15. На полоскости заданы точки *A*(3;−2), *B*(6;4). Найти координаты точек *C*, *D*, которые делят отрезок *AB* на три равных части.

16. Точки *C*(2;0;2), *D*(5;−2;0) делят отрезок *AB* на три равных части. Найти координаты точек *A* и *B*.

17. Точки *C*, *D*, *E* делят отрезок *AB* на пять равных частей. Заданы точки *D*(2;4), *E*(3;6). Найти координаты точек *A* и *B*, если расположение точек следующее: A→C→D→E→B.

18. В Δ *ABC* заданы *A*(1;2;3), *B*(5;8;1), *C*(9;4;7). Точки *M*, *N* − середины сторон соответственно *AB* и *BC*. Найти координаты точек *M*, *N* и вектора $\overrightarrow{MN}$.

19. В Δ *ABC* точки *K*(2;−4), *M*(6;1), *N*(−2;3) − середины сторон соответственно *AB*, *BC*. *CA*. Найти координаты точки *C*.

2.4 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,}$$

где φ − угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ **2.** $\lambda\vec{a}\ \ \cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\ \ \lambda\vec{b}\ \ =\lambda\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}$ **3.** $\vec{a}\cdot\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ =\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. Пусть $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

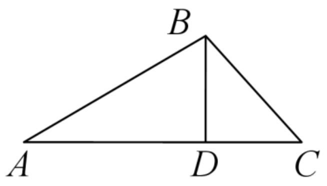
5. Длина вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ равна $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$.

6. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

7. Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов:
$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

8. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна $np_{\vec{b}}\ \vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$.

Пример: заданы вершины $\Delta\,ABC$ − точки $A(2;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(3;3;4)$. BD − высота $\Delta\,ABC$. Найти длины сторон AB, AC, BC, $\angle A$, $\angle B$, длину отрезка AD.



Решение.

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$, $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{AC}=(1;3;3)$, $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+3^2+3^2}=\sqrt{19}$,

$\overrightarrow{BC}=(2;2;3)$, $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)\cdot(1;3;3)=(-1)\cdot1+1\cdot3+0\cdot3=2$,

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{19}}=\frac{2}{\sqrt{38}},\quad \angle A=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right).$$

Векторы $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$ и $\overrightarrow{BC}=(2;2;3)$ перпендикулярны, так как $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(1;-1;0)\cdot(2;2;3)=2-2+0=0$. Следовательно, $\angle B=\angle ABC=90°$.

Отрезок AD равен проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$np_{\overrightarrow{AC}}\ \overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{19}}.$$

Ответ: $\sqrt{2};\ \sqrt{19};\ \sqrt{17};\ \arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{38}}\right);\ 90°;\ \dfrac{2}{\sqrt{19}}$.

Задания для решения

1. Вычислить скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$ и косинус угла между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ равен 0,5.

2. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить скалярные произведения векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $\ 3\vec{a}-2\vec{b}\ \ \cdot\ \ \vec{a}+2\vec{b}\ $.

3. Для базисных векторов $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$ вычислить $\vec{i}\cdot\vec{j}$, $\vec{i}\cdot\vec{k}$, $\vec{k}\cdot\vec{j}$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{i}^{\,2}$, $\vec{j}^{\,2}$, $\vec{k}^{\,2}$

4. Даны векторы $\vec{a}=(0;4;3)$, $\vec{b}=(5;12;0)$ Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и косинус угла между ними.

5. Заданы точки $A(1;1;1)$, $B(5;5;3)$, $C(9;7;1)$. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и косинус угла между ними.

6. Заданы точки $A(2;2;2)$, $B(3;3;2)$ и вектор $\vec{p}=(1;0;1)$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{p}$.

7. Найти проекцию $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$ для векторов $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(3;0;4)$.

8. Заданы точки $A(1;0;2)$, $B(5;-1;5)$, $C(3;-1;4)$. Найти проекцию ï ð $_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$.

9. Заданы точки $A(1;2;-1)$, $B(3;2;6)$, $C(6;7;3)$. В $\Delta\,ABC$ найти длины сторон AB, AC, $\cos\angle A$ и проекцию стороны AB на сторону AC.

10. Заданы точки $A(1;0;2)$, $B(2;1;2)$, $C(2;0;3)$. BD − высота $\Delta\,ABC$. Найти AD.

11. Заданы точки $A(1;2;-1)$, $B(3;2;6)$, $C(6;7;3)$. В $\Delta\,ABC$ найти длину медианы AM.

12. Заданы точки $A(2;3;2)$, $B(6;5;2)$, $C(2;4;9)$. В $\Delta\,ABC$ найти косинус угла между медианами AM и BN.

13. Найти косинус угла между диагоналями AC и BD параллелограмма ABCD, если $A(-2;\ 3;\ 1)$, $B(1;\ 7;\ 1)$, $C(6;\ 5;\ 1)$.

14. Заданы вершины равнобедренного треугольника $A(1;2;2)$, $B(2;1;2)$, $C(0;0;0)$. Найти угол при вершине этого треугольника.

15. Заданы вершины равнобедренного треугольника $A(1;1;1)$, $B(4;5;1)$, $C(4;8;5)$. Найти длину основания этого треугольника.

16. $\vec{a}=(2;x;5)$, $\vec{b}=(-13;8;x)$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найти число x.

17. $\vec{a}=(3;7;x)$, $\vec{b}=(x+1;2;4)$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найти число x.

18. Заданы вершины прямоугольного треугольника $A(3;2;1)$, $B(4;0;5)$, $C(6;3;6)$. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

19. Задан вектор $\vec{a}=(4,2,-4)$. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и имеющий длину 18.

20. $\vec{a}=(2;-1;2)$. Найти единичный вектор $\vec{e}$ такой, что $\vec{e}\uparrow\uparrow\vec{a}$ (сонаправлены).

21. $\vec{a}=(3;0;4)$. Найти единичный вектор $\vec{e}$ такой, что $\vec{e}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

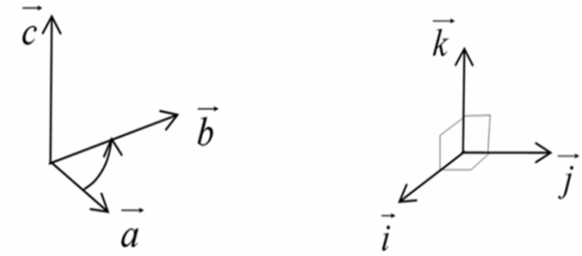
22. Задан вектор $\vec{a}=(2,1,-1)$. Найти вектор $\vec{b}$ такой, что $\vec{a}$ □ $\vec{b}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=24$.

23. $ABCD$ − квадрат, $\overrightarrow{AD}=(2;3;6)$. Найти площадь квадрата.

24. $ABCD$ − квадрат, заданы точки $A(4;5;6)$, $C(8;3;2)$. Найти площадь квадрата.

2.5 Векторное произведение векторов

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется ***правой***, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден ***против часовой стрелки*** (см. рис. 2.14, а). Если указанный поворот ***по часовой стрелке***, то тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется ***левой***.



а б

Рисунок 2.14 – Тройки векторов векторов в пространстве:
а – правая тройка векторов; б – тройка ортонормированных векторов

На рисунке 2.14 а) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образуют правую тройку.

На рисунке 2.14 б) изображены базисные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Легко видеть, что $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ − правая тройка, $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$ − левая тройка, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{i}$ − правая тройка.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов;

3) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ <u>обозначается</u> $\vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ **2.** $\lambda\vec{a}\ \times \vec{b} = \vec{a} \times\ \lambda\vec{b}\ = \lambda\ \vec{a} \times \vec{b}$ **3.** $\vec{a} \times\ \vec{b} + \vec{c}\ = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4. Пусть $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

Тогда $$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

5. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{\vec{a},\vec{b}}$ − площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5а. Пусть $ABCD$ − параллелограмм. Тогда $S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

5б. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ − площадь треугольника ABC.

Пример: найти площадь $\Delta\, ABC$, если $A(1;2;5)$, $B(7;4;1)$, $C(4;3;10)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(6;2;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1;5)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}6 & -4\\ 3 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right)=\ 14;-42;0\ .$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\ 14;-42;0\ \right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14^2+(-42)^2+0^2}=\sqrt{1960}\,.$$

Задания для решения

1. Даны векторы $\vec{a}=(3;5;-2)$, $\vec{b}=(4;1;6)$. Найти координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(1;-3;7)$, $\vec{b}=(0;0;1)$. Найти координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

3. $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(3;1;4)$. Найти $\ \vec{a}+\vec{b}\ \times\ \vec{a}-\vec{b}\ $, $\ 3\vec{a}-\vec{b}\ \times\ \vec{a}+2\vec{b}\ $, $\vec{a}\times\vec{a}$.

4. $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$. Вычислить $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{i}$.

5. $\vec{a}=(2;5;0)$, $\vec{b}=(1;2;6)$. Найти такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$.

6. Даны векторы $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{b}\right|=8$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найти длину вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

7. Даны точки $A(1;0;2)$, $B(3;5;2)$, $C(7;1;3)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

8. Найти площадь $\Delta\, ABC$ с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

9. Найти площадь $\Delta\, ABC$ с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

10. Найти $S_{\Delta\ ABC}$, если $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, где a,b,c − заданные ненулевые числа.

11. В $\Delta\, ABC$ с вершинами $A(0;1;2)$, $B(2;3;3)$, $C(1;3;0)$ найти стороны AB, AC, косинус угла A, площадь $\Delta\, ABC$.

12. $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(0;1;2)$. Найти $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}\ \cdot\overrightarrow{AB}$, $\quad пр_{\vec{b}}\,\vec{a}$

13. $\vec{a}=(1;1;0)$, $\vec{b}=(1;0;1)$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.6 Смешанное произведение векторов

Возьмём любые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Вычислим векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, а затем умножим скалярно вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Получим некоторое число $\ \vec{a}\times\vec{b}\ \cdot\vec{c}$. Аналогично найдём число $\vec{a}\cdot\ \vec{b}\times\vec{c}\ $. Оказывается, что эти два числа $\ \vec{a}\times\vec{b}\ \cdot\vec{c}$ и $\vec{a}\cdot\ \vec{b}\times\vec{c}\ $ всегда равны, то есть для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ верно равенство $\ \vec{a}\times\vec{b}\ \cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\ \vec{b}\times\vec{c}\ $. Это число назвали смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ и равное $\boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\ \cdot\vec{c}}$

Свойства смешанного произведения

Пусть даны векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$.

1. Смешанное произведение вычисляется по формуле $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

2. Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\neq 0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны.
Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.
Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют левую тройку векторов.
Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

3. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов: $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

4. Объем пирамиды *ABCD*, равен $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$

Пример: даны векторы $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;1;0)$.

Требуется:

а) найти смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$;

б) найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

в) выяснить компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

г) если некомпланарны, то выяснить образуют ли они правую тройку или левую;

д) выяснить, образуют ли $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базис в пространстве.

Решение.

а)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(0+1)+0+1\cdot(0-6)=-5;$$

б) так как $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-5$, то по свойству 4 $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|=\left|-5\right|=5$;

в) так как $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-5\neq 0$, то по свойству 2 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны;

г) так как $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-5<0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют левую тройку;

д) так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, то они образуют базис в пространстве.

Задания для решения

1. Заданы векторы $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(-2;2;1)$, $\vec{c}=(3;-2;5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Заданы векторы $\vec{a}=(1;0;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3. Компланарны ли векторы $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(3;1;0)$, $\vec{c}=(2;1;0)$?

4. Компланарны ли векторы $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(4;5;6)$, $\vec{c}=(7;8;9)$?

5. Лежат ли точки в одной плоскости $A(2;-1;0)$, $B(3;0;1)$, $C(5;0;-4)$, $D(4;1;2)$?

6. Лежат ли точки в одной плоскости $A(3;7;6)$, $B(4;7;6)$, $C(3;8;6)$, $D(3;7;7)$?

7. Является ли правой или левой тройка $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-4;1)$, $\vec{c}=(0;2;5)$?

8. Вычислить объём пирамиды с вершинами $A(3;4;2)$, $B(5;5;3)$, $C(3;7;3)$, $D(3;4;7)$.

9. Заданы точки $A(1;1;1)$, $B(2;1;1)$, $C(2;7;1)$, $D(2;2;4)$. Найти объём пирамиды $ABCD$ и длину высоты DE (использовать формулу $V_{\text{ПИР}} = (1/3)\cdot S_{\text{ОСН}}\cdot H$).

10. Заданы вершины $A(1;1;1)$, $B(x+1;1;1)$, $C(1;2;1)$, $D(1;1;2)$ пирамиды $ABCD$. Найти значения x, для которых объем пирамиды равен 2.

11. Заданы вершины $A(2;2;2)$, $B(x+2;2;2)$, $C(2;\,x+2;2)$, $D(2;2;3)$ пирамиды $ABCD$. Найти значения x, для которых объем пирамиды равен 6.

Разные задачи

1. $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;1;1)$. Найти длины отрезков AB, AC, $\cos\angle ABC$, площадь ΔABC, объем пирамиды $ABCD$, высоту BH пирамиды $ABCD$.

2. На плоскости заданы точки $K(2;-4)$, $M(6;1)$, $N(-2;3)$ − середины сторон $\Delta\, ABC$. Найти координаты точек A, B, C.

3. Найти вектор $\vec{d}$ с длиной $\left|\vec{d}\right|=27$, сонаправленный с вектором $\vec{c}=(4;7;-4)$.

4. Найти вектор $\vec{d}$ с длиной $\left|\vec{d}\right|=6$, противоположно направленный к $\vec{c}=(1;2;2)$.

5. Даны векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=6$.

Найти длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

6. $\vec{a}=(2;2;1)$, $\vec{b}=(0;1;1)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\left|\vec{x}\right|=1$, $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$.

7. $\vec{a}=(2;1;-1)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\,\square\,\vec{a}=9$, $\vec{x}\vec{a}=3$

8. Заданы три вершины $A(1;1;1)$, $B(7;2;2)$, $C(1;3;2)$ пирамиды $ABCD$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz, а объем пирамиды равен 10.

3 Предел функций и его применения

3.1 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Определение 1. Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ (зависящее от выбора ε), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Используя логические символы, данное определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Теорема 1. Если $y = f(x) -$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$ $(f(x) \neq 0)$, то $y = 1/f(x) -$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$ и наоборот, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Практическое вычисление пределов основывается на следующей теореме.

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0, то есть

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x), \exists \lim_{x \to x_0} g(x), \text{то}$$

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\mathrm{C} \cdot f(x)\right) = \mathrm{C} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}$;

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

В теореме 2 пункты 2) и 3) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Воспользовавшись теоремами 2, 1 и свойствами бесконечно малых и бесконечно больших функций, можно записать следующие равенства:

1) $C \cdot 0 = 0$; **2**) $C \neq 0 \quad \dfrac{C}{0} = \infty$; **3**) $C \pm 0 = C$; **4**) $C \neq 0 \quad \dfrac{0}{C} = 0$;

5) $\dfrac{C}{\infty} = 0$; **6**) $\dfrac{\infty}{C} = \infty$; **7**) $C \pm \infty = \infty$; **8**) $\infty + \infty = \infty$;

9) $0^n = 0$; **10**)$C \neq 0 \quad C \cdot \infty = \infty$; **11**) $\infty^n = \infty$,

где $C - const$, $n -$натуральное конечное число, а символы 0 и ∞ следует понимать как неограниченно близкое приближение к нулю и удаление в бесконечность соответственно.

При нахождении предела

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

когда $f(x)$ и $g(x) -$ бесконечно малые функции (бесконечно большие функции) при $x \to x_0$ принято говорить, что отношение $f(x)/g(x)$ при $x \to x_0$ представляет собой ***неопределенность вида*** $0/0$ (∞/∞). Аналогично вводятся неопределенности вида $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$, которые встречаются при нахождении соответственно пределов

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right), \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right), \lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}.$$

Отыскание предела в таких случаях называют ***раскрытием неопределенностей.***

Кроме того, будем пользоваться тем фактом, что для всех элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0),$$

которое можно понимать так: вычисление любого предела нужно начинать с непосредственной подстановки предельного значения, и, если нет неопределенностей, то сразу записать ответ.

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства показательной функции:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1; \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1; \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

Примеры. Найти пределы функций.

1. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x + 9}$; б) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 2}{x^2 - 16}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 10x}{3 - x}$

Решение. Подставим вместо x в данные выражения предельные значения аргумента.

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x + 9} = \dfrac{2^2 - 3 \cdot 2 + 5}{2 \cdot 2 + 9} = \dfrac{3}{13}$;

б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+2}{x^2-16}=\dfrac{-4+2}{(-4)^2-16}=\dfrac{-2}{0}=\infty;$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+10x}{3-x}=\dfrac{2\cdot0^2+10\cdot0}{3-0}=\dfrac{0}{3}=0.$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x^2-9}{5x^3+2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-1}{7x^5-2x^3+3x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+3}{9-x}$.

Решение. Непосредственная подстановка в исходные выражения предельного значения аргумента, то есть $x=\infty$ приводит во всех случаях к неопределенность вида ∞/∞, для раскрытия которой необходимо разделить числитель и знаменатель данной дроби на старшую степень x.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x^2-9}{5x^3+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=$$
$$=\frac{6+\frac{4}{\infty}-\frac{9}{\infty}}{5+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{6+0-0}{5+0+0}=\frac{6}{5};$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-1}{7x^5-2x^3+3x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^5}+\frac{3x}{x^5}-\frac{1}{x^5}}{\frac{7x^5}{x^5}-\frac{2x^3}{x^5}+\frac{3x}{x^5}-\frac{5}{x^5}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{7-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{5}{x^5}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{7-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{0+0-0}{7-0+0-0}=\frac{0}{7}=0;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+3}{9-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{1}{x}}=$$
$$=\frac{5-\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{\frac{9}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{5-0+0}{0-0}=\frac{5}{0}=\infty.$$

3. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-x^2-5x+2}{x^3-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+3x+1}$;
г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+11}-\sqrt{21-x}}{2-\sqrt{x-1}}$.

Решение. Непосредственная подстановка в данные выражения предельных значений аргумента приводит во всех случаях к неопределенности вида $0/0$, для раскрытия которой надо в числителе и знаменателе получить множитель $(x-x_0)$, где x_0 – предельное значение, чтобы впоследствии этот множитель сократить.

а) в числителе и знаменателе надо получить множитель $(x-1)$.

Чтобы получить этот множитель в числителе, можно, например, воспользоваться формулой

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Имеем:

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \qquad D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

В знаменателе же воспользуемся формулой сокращенного умножения

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тогда $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}.$$

б) в числителе и знаменателе надо получить множитель $(x + 2)$.

Многочлен в числителе $x^3 - x^2 - 5x + 2$ при $x = -2$ обращается в нуль, следовательно, делится без остатка на $(x + 2)$. Тогда

$$x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(x^2 - 3x + 1).$$

В последнем равенстве множитель $(x^2 - 3x + 1)$ получен делением многочлена $(x^3 - x^2 - 5x + 2)$ на $(x + 2)$ «уголком».

В знаменателе вынесем общий множитель x за скобку, затем к выражению в скобке применим формулу сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Тогда

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

Получим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 - x^2 - 5x + 2}{x^3 - 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2}\frac{(x + 2)(x^2 - 3x + 1)}{x(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{x^2 - 3x + 1}{x(x - 2)} = \frac{(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1}{-2 \cdot (-2 - 2)} = \frac{11}{-2 \cdot (-4)} = \frac{11}{8}.$$

в) в числителе и знаменателе надо получить множитель $(x + 1)$. Для этого умножим числитель, а, значит, и знаменатель (для сохранения знака равенства) на выражение, сопряженное к числителю, то есть на $\left(\sqrt{x + 2} + 1\right)$.

В знаменателе же многочлен $2x^2 + 3x + 1$ при $x = -1$ обращается в нуль, следовательно, делится без остатка на $(x + 1)$. Тогда

$$2x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(2x + 1).$$

Получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x + 2} - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x + 2} - 1\right)\left(\sqrt{x + 2} + 1\right)}{(x + 1)(2x + 1)\left(\sqrt{x + 2} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-1^2}{(x+1)(2x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim_{x\to-1}\frac{x+2-1}{(x+1)(2x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(2x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim_{x\to-1}\frac{1}{(2x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

г) в числителе и знаменателе надо получить множитель $(x-5)$. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражения, к ним сопряженные.

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+11}-\sqrt{21-x}}{2-\sqrt{x-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{21-x}\right)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{x+11}\right)^2-\left(\sqrt{21-x}\right)^2\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(2^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{\left(x+11-(21-x)\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(4-(x-1)\right)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} = \lim_{x\to5}\frac{(2x-10)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(5-x)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{2(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{-(x-5)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} = \lim_{x\to5}\frac{2\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{-\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{21-x}\right)} = \frac{8}{-8} = -1.$$

4. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{2x-5}\right)^{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-1}{2x+3}\right)^{2-7x}$.

Решение. Воспользуемся пунктом б) теоремы 2 и свойствами показательной функции.

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)^{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)} = \left[\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{+\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{5}{x}}\right)^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{2-\frac{5}{x}}\right)^{+\infty} = \left(\frac{1+\frac{4}{+\infty}}{2-\frac{5}{+\infty}}\right)^{+\infty} = \left(\frac{1+0}{2-0}\right)^{+\infty} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-1}{2x+3}\right)^{2-7x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-1}{2x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to-\infty}(2-7x)} = \left[\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)^{+\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}\right)^{+\infty} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}\right)^{+\infty} = \left(\frac{5-\frac{1}{-\infty}}{2+\frac{3}{-\infty}}\right)^{+\infty} = \left(\frac{5-0}{2+0}\right)^{+\infty} =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty} = +\infty.$$

Задания для решения

Найти указанные пределы.

1

1.1 а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x+5}{\sqrt{2+x}+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+x-1}$.

1.2 а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{8x-5}{2x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-10x+25}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{6-x}$.

1.3 а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+8x-5}{2x^2-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x-4}{3x^2+17x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2+3x-6}$.

1.4 а) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2+x-5}{\sqrt{x+3}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+10x+25}{3x^2-14x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+10x+9}{x^2+1}$.

1.5 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-8x-5}{2x^3-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+x-5}{2x^2+11x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+x+7}$.

1.6 а) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{1-2x}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-5}{2x^2-11x+14}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-6x^2-7x}{5x^2+x+7}$.

1.7 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-8x-5}{2x^3-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+x-5}{2x^2+11x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+x+7}$.

1.8 а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-7x-9}{2x^2-11x+9}$; в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{3x^2-19x+6}{2x^2+5x-10}$.

1.9 а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x+6}-5}{x^3-x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2+x-10}{x^3+5x^2+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-10x+9}{x^2-2x+7}$.

1.10 а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}+3}{\sqrt{x-2}+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-2x-2}{5x^2+4x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+9x+14}{2x^2+2x+7}$.

1.11 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x+3}{\sqrt[4]{x}+4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+6x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2+13x+3}{-x^2+x+6}$.

1.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+9}+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2+7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x^2-7x-10}{x^2+2x+3}$.

1.13 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x+5}{4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x-6}{3x^2-2x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{x^2+5x-4}$.

1.14 а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+3}{\sqrt{5-x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-x-2}{x^2-5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-10x+1}{2x^2-2x+1}$.

1.15 а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-x^2-x+3}{\sqrt[3]{x+3}+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+7x-2}{x^3-5x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2-6x+4}$.

2

2.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+7}{3x^4+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{7x^3+3x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{x-5}$.

2.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+x}{x^3-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x-1}{x^5+x^3+9x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-x^2+3x-2}{x^2+9x-3}$.

2.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^2+2x-3}{7x^5+2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-4}{2x^3-7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3x}{4x+3}$.

2.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+2}{5x^2+7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+3x^2-x}{x^9+5x^3+x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+3x+7}{x^2+x+1}$.

2.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+x-5}{5x^3-6x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-9}{5x^5-x^4+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-4}{3x-1}$.

2.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x^2-5x+1}{x^5-x^3+6x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-2}{3x^4-2x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+x-7}{x^2+3x+5}$.

2.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+x^2-1}{8x^3-6x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7}{3x^8+2x^6+11}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2+x+8}{2x^2-3x-6}$.

2.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^3+2x-3}{11x^4+x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-7}{6x^6-2x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x+9}{x^3+3x-1}$.

2.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-5}{2x-13}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x+3}{x^5+3x^4+2x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+8x^3-1}{x^2-3x-1}$.

2.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+x-3}{5x^2-6x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-1}{x^5+x^4+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x+9}{2-3x}$.

2.11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2-x+1}{x^4-x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-10}{x^5+2x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+8x+9}{x^2-x+2}$.

2.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+2x^2-8}{4x^3-9x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+12}{x^3-x^2+6x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x+3}{x+2}$.

2.13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x-3}{-6x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x}{5x^4+2x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-3x^2+x+5}{x^3-1}$.

2.14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+x^2+x}{x^5-6x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{5x^5-3x^2+2x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x+9}{x-4}$.

2.15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x-5}{5x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x-1}{x^5+3x^3-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8+x+9}{x^2-3x}$.

3

3.1 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^3-12x^2-3x+9}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x}{\sqrt{x+9}-3}$;
г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x+6}-2}$.

3.2 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-3x^2-7x-15}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-5x+4}$;
г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+6}-\sqrt{14-x}}$.

3.3 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-4x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{\sqrt{9-x}-2}$;
г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.

3.4 а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{2x^2+7x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-10x+3}{x^2+x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{2x^2-3x+1}$;
г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.

3.5 а) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+13x-7}{x^3-49x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x^2+11x-2}{x^2-7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{2x+3}-3}$;
г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{\sqrt{x-1}-2}$.

3.6 а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^2+6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^3-15x^2+x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2x}{\sqrt{6x+9}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}}$.

3.7 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2-19x-4}{x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^3-2x^2+x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{\sqrt{6-x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x-14}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-2}$.

3.8 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-6x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+5x+6}{x^3+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{10x^2-29x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$.

3.9 а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-6x}{x^3-5x^2-7x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10x+1}-3}{4x^2+3x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

3.10 а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^3-13x^2-4x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x+7}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x+6}-1}{4-\sqrt{6-2x}}$.

3.11 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3x^2-x+2}{x^2-8x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-7x^2+x-6}{x^4-8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{\sqrt{3x+1}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$.

3.12 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2x^2+13x-20}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^3+9x^2-7x-10}{x^2+7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\sqrt{2x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{-5x-1}}{\sqrt{x+10}-3}$.

3.13 а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+9x-18}{x^2-36}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-5x^2+7x-4}{x^3-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{\sqrt{x+12}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+25}-5}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-3x}}$.

3.14 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-6x^2+9x-4}{x^3-64}$; в) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+13x-7}{\sqrt{x+8}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$.

3.15 а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{x^2+5x-24}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{2x^3-6x^2+3x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+10x+9}{2-\sqrt{2x+6}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-4}{\sqrt{x-1}-2}$.

4.

4.1 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{2x+7}\right)^{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8x-3}{x+3}\right)^{x+4}$.

4.2 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{8x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7x+5}{2x+9}\right)^{4-x}$.

4.3 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-5}{5x+3}\right)^{10x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-3}{8x+3}\right)^{x+4}$.

4.4 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{6x+7}\right)^{2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-1}{x-2}\right)^{x+4}$.

4.5 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x-5}{4x+1}\right)^{6x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{4x+1}\right)^{7-2x}$.

4.6 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{4x-7}\right)^{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7x-2}{2x+1}\right)^{1-x}$.

4.7 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x+2}{x+5}\right)^{4-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+2}{4x+9}\right)^{x+5}$.

4.8 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-5}{x-11}\right)^{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6x+3}{3x-1}\right)^{7x}$.

4.9 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x+5}{4x+1}\right)^{6-x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+8}{5x+1}\right)^{2x+9}$.

4.10 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{2x+5}\right)^{x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-1}{x-4}\right)^{2-7x}$.

4.11 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-3}{2x-1}\right)^{4-x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+1}{6x+4}\right)^{2x+3}$.

4.12 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+6}\right)^{4x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7x-1}{8x-4}\right)^{1-x}$.

4.13 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{10x+1}{2x-5}\right)^{6-x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-5}{8x-4}\right)^{3x}$.

4.14 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x+5}\right)^{2x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-1}{2x-9}\right)^{2-3x}$.

4.15 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x}{2x+1}\right)^{5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7x-1}{8x-2}\right)^{5-2x}$.

3.2 Первый и второй замечательные пределы

Пусть $\alpha(x)-$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а $\beta(x)-$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0\,,\ \lim_{x\to x_0} \beta(x) = \infty\ .$$

Первым замечательным пределом называют предел вида

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

который используют при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции в случае наличия неопределенности вида $0/0$.

Вторым замечательным пределом называется предел вида

$$\lim_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$$

или

$$\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)} = e,$$

где $e-$ иррациональное число, причем $e \approx 2{,}72$.

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенности вида 1^{∞}.

Пример 5. Найти пределы функций.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 5x};\ \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5-4x}.$$

Решение.

а) непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $0/0$, для раскрытия которой воспользуемся формулами тригонометрии, теоремой 2 и первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix}\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \\ 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \\ 1-\cos 6x = 2\sin^2 3x\end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 5x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}\right)^2 = 2\cdot\frac{9}{25}\cdot 1 = \frac{18}{25}.$$

б) непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида 1^{∞}, для раскрытия которой воспользуемся теоремой 2 и вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5-4x} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-3-1}{2x+3}\right)^{5-4x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+3)-4}{2x+3}\right)^{5-4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+3}-\frac{4}{2x+3}\right)^{5-4x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{5-4x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{5-4x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot(5-4x)} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{2x+3}\cdot(5-4x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x-20}{2x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16-\frac{20}{x}}{2+\frac{3}{x}}} =$$

$$= e^{\frac{16-\frac{20}{\infty}}{2+\frac{3}{\infty}}} = e^{\frac{16-0}{2+0}} = e^{8}.$$

Задания для решения

5. Найти указанные пределы.

5.1 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cos\,4x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{2x+1}$.

5.2 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos\,5x-cos\,x}{sin^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x-4}\right)^{7x-5}$.

5.3 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\,8x}{x\cdot cos2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x-9}\right)^{4-7x}$.

5.4 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cos^2x}{sin^2 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-4}\right)^{x-5}$.

5.5 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5sin\,3x}{tg\,5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x+1}\right)^{5-3x}$.

5.6 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos\,2x-cos^3 2x}{5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+8}\right)^{7x-1}$.

5.7 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\,9x\cdot tg4x}{7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-1}{6x+1}\right)^{3x}$.

5.8 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\,8x+sin\,2x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{3x+7}$.

5.9 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-cos^2 3x)cos\,4x}{5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{-3x}$.

5.10 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,7x\cdot cos\,x}{sin2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+8}\right)^{2x-5}$.

5.11 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3sin\,7x\cdot cos\,4x}{sin\,2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{2-x}$.

5.12 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\,7x-sin\,x}{sin\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^{2x}$.

5.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-\cos^3 8x}{4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+8}\right)^{2-5x}$.

5.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x-2}\right)^{x-1}$.

5.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 7x}{\sin 3x\cdot\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+8}\right)^{2x-4}$.

3.3 Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — бесконечно малые (бесконечно большие) функции при $x\to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \text{ и } \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty.$$

Определение 3. Если выполняется следующее равенство:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

то $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными*** бесконечно малыми (бесконечно большими) функциями при $x\to x_0$ и записывают

$$f(x)\sim g(x).$$

При раскрытии неопределенностей вида $0/0$ или ∞/∞ в ряде случаев пользуются следующей теоремой.

Теорема 3. Предел отношения двух бесконечно малых (бесконечно больших) функций при $x\to x_0$ не изменится, если каждую из них или только одну заменить другой эквивалентной бесконечно малой (бесконечно большой) функцией, то есть если $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g_1(x)}.$$

Приведем некоторые эквивалентности, которые используются при вычислении пределов:

$$\mathbf{1}.\ \sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \mathbf{2}.\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \mathbf{3}.\ tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \mathbf{4}.\ arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x);$$

$$\mathbf{5}.\ 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\big(\alpha(x)\big)^2;\ \ \mathbf{6}.\ \ln\big(1+\alpha(x)\big)\sim\alpha(x);\ \ \mathbf{7}.\ b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln b.$$

Здесь $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

А для раскрытия неопределенности ∞/∞ можно применять следующую эквивалентность:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0\sim a_nx^n \text{ при } x\to\infty,$$

где $a_i - const, i=\overline{0,n}$, причем $a_n\neq 0$.

Пример 6. Вычислить пределы, используя эквивалентные функции:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4-5x^2+3x-2}{3x^3+4x+6};\ \ б)\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,5x}{xcos2x}.$$

Решение.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4-5x^2+3x-2}{3x^3+4x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}6x^4-5x^2+3x-2\sim 6x^4\\3x^3+4x+6\sim 3x^3\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{3x^3}=\lim_{x\to\infty}(2x)=\infty.$$

$$б)\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,5x}{xcos2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=[arctg\,5x\sim 5x]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{xcos2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{cos2x}=\frac{5}{1}=5.$$

Задания для решения

6. Вычислить пределы из задания 2 и 5 а), используя эквивалентные функции.

3.4 Односторонние пределы. Непрерывность и точки разрыва функций

В определении предела функции $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Встречаются случаи, когда способ приближения аргумента к предельному значению существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят в рассмотрение следующие понятия.

Определение 4. Если $x<x_0$ и $x\to x_0$, то пишут: $x\to x_0-0$; аналогично если $x>x_0$ и $x\to x_0$, то это записывают так: $x\to x_0+0$. При этом числа

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\ \ и\ \ f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

называются соответственно ***пределом слева*** функции $f(x)$ в точке x_0 и ***пределом справа*** функции $f(x)$ в точке x_0, если эти пределы существуют. Пределы слева и справа называются ***односторонними.***

Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)\ =\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства непрерывных функций.

1. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

2. Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

3. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение 6. Точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции $y = f(x)$, если нарушено хотя бы одно из требований:

1) односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют;

2) $f(x_0 - 0) \neq \infty$ и $f(x_0 + 0) \neq \infty$, то есть оба односторонних предела конечны;

3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приведем **классификацию точек разрыва**.

Если в определении 6 нарушены условия 1) , 2), то есть если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***. При нарушении условия 3), то есть в случае, если оба односторонних предела конечны, но не равны, то точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода (точкой конечного скачка)***. При нарушении условия 4), то есть когда оба односторонних предела конечны и равны друг другу, но не равны значению функции в этой точке (значение функции в этой точке может не существовать), то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

Примеры.

7. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, так как на каждом из этих интервалов формулы, задающие функцию, определяют элементарные непрерывные функции. Следовательно, если и существует точка разрыва, то она может быть лишь в точке $x = 1$, в которой меняется аналитическое выражение функции $f(x)$. Найдем односторонние пределы:

$$f(1 - 0) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1,$$
$$f(1 + 0) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (2x + 1) = 3.$$

Так как $f(1 - 0)$, $f(1 + 0)$ конечны и $f(1 - 0) \neq f(1 + 0)$, то в точке $x = 1$ исходная функция имеет точку разрыва первого рода (конечный скачок).

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = 6^{\frac{x}{x-3}} - 5.$$

Решение. Функция $f(x) = 6^{\frac{x}{x-3}} - 5$ является элементарной, следовательно, непрерывной в каждой точке области определения, то есть на всем множестве $(-\infty; +\infty)$, за исключением точки $x = 3$ (свойство 1) непрерывных функций). Значит, $x = 3$ является точкой разрыва данной функции. Выясним характер разрыва, для чего найдем односторонние пределы в этой точке:

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0}\left(6^{\frac{x}{x-3}} - 5\right) = 6^{\frac{3-0}{3-0-3}} - 5 = 6^{\frac{3}{-0}} - 5 = 6^{-\infty} - 5 = 0 - 5 = -5,$$

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0}\left(6^{\frac{x}{x-3}} - 5\right) = 6^{\frac{3+0}{3+0-3}} - 5 = 6^{\frac{3}{+0}} - 5 = 6^{+\infty} - 5 = +\infty - 5 = \\ = +\infty.$$

Так как правосторонний предел в точке $x = 3$ равен бесконечности, то в данной точке функция $f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}$ терпит разрыв второго рода.

Задания для решения

7. Исследовать на непрерывность функции.

$\mathbf{7.1}\ \ f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \le 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$ $\mathbf{7.2}\ \ f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x < -1, \\ 3x + 2, & x \ge -1; \end{cases}$

$\mathbf{7.3}\ \ f(x) = \begin{cases} -x + 6, & x \le 0, \\ 4x^3 - 3, & x > 0. \end{cases}$ $\mathbf{7.4}\ \ f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 1, \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$

$\mathbf{7.5}\ \ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -2, \\ x^3 + 1, & x \ge -2. \end{cases}$ $\mathbf{7.6}\ \ f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & x \le 2, \\ 4 - 3x, & x > 2. \end{cases}$

$\mathbf{7.7}\ \ f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < -3, \\ 4x + 7, & x \ge -3. \end{cases}$ $\mathbf{7.8}\ \ f(x) = \begin{cases} 1 - 5x^2, & x \le 1, \\ 3 - 7\sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$

$\mathbf{7.9}\ \ f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x < 0, \\ x + 4, & x \ge 0. \end{cases}$ $\mathbf{7.10}\ f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \le 4, \\ 3\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$

$\mathbf{7.11}\ \ f(x) = \begin{cases} x, & x \le -1, \\ 3x - 1, & x > -1. \end{cases}$ $\mathbf{7.12}\ f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \le 2, \\ x^2 + 5, & x > 2. \end{cases}$

$\mathbf{7.13}\ \ f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -2, \\ 2 - x, & x > -2. \end{cases}$ $\mathbf{7.14}\ \ f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 1, \\ \sqrt{x} - 1, & x \ge 1. \end{cases}$

$\mathbf{7.15}\ f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \le 3, \\ x^2, & x > 3. \end{cases}$

8

$\mathbf{8.1}\ \ f(x) = 2^{\frac{x+6}{x-6}}.$ $\mathbf{8.2}\ \ f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 5.$ $\mathbf{8.3}\ f(x) = 1 - 7^{\frac{x}{2x+4}}.$

$\mathbf{8.4}\ \ f(x) = 4^{\frac{6}{x+2}} + 3.$ $\mathbf{8.5}\ f(x) = 5^{\frac{2x}{3x+9}} - 1.$ $\mathbf{8.6}\ f(x) = \dfrac{1}{2 + 3^{1/(x-4)}}.$

$\mathbf{8.7}\ \ f(x) = \dfrac{x+3}{4 + 2^{1/x}}.$ $\mathbf{8.8}\ f(x) = \dfrac{6^x - 1}{6^{1/x} + 1}.$ $\mathbf{8.9}\ f(x) = \dfrac{x-3}{2^{1/(x+1)} + 1}.$

8.10 $f(x)=\dfrac{3^x}{x-4}$. **8.11** $f(x)=4^{\frac{x}{x+2}}-1$. **8.12** $f(x)=4^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x-1}{x+1}$.

8.13 $f(x)=\dfrac{5^x}{x+1}$. **8.14** $f(x)=6^{\frac{x+1}{x-3}}+1$. **8.15** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

3.5 Асимптоты графика функции

Определение 7. Прямая L называется ***асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $M(x,y)$ кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от $O(0,0)$ (то есть при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Для нахождения асимптот пользуются следующими утверждениями.

Утверждение 1. Прямая $x=a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

Пусть $D(y)$ – область определения функции $y=f(x)$. Рассмотрим некоторые случаи:

1) если $D(y)=\{(-\infty;+\infty)$ или $[a;+\infty)$ или $(-\infty;b]$ или $[a;b]\}$, то вертикальных асимптот нет;

2) если $D(y)=(-\infty;x_1)\cup(x_1;x_2)\cup\cdots\cup(x_n;+\infty)$, то вертикальными асимптотами могут быть только прямые $x=x_i, i=\overline{1,n}$, причем только в том случае, если

$$\lim_{x\to x_i-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_i-0} f(x)=\infty\,;$$

3) если $D(y)=(a;+\infty)$, то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая $x=a$, если

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty\,;$$

4) если $D(y)=(-\infty;b)$, то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая $x=b$, если

Утверждение 2. ***Невертикальные асимптоты*** кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\;\; b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)),$$

причем в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. В случае, если $k\neq0$, получаем ***наклонную асимптоту***, а при $k=0$ – ***горизонтальную асимптоту***.

Следует отметить, что если в утверждении 2 хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то невертикальных асимптот нет.

Пример 9. Найти асимптоты к графику функции

$$\text{а) } y=\frac{3x^2-5}{x+1};\;\; \text{б) } y=\frac{x}{\sqrt{5-x}}.$$

Решение.

а) Поскольку $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, то вертикальной асимптотой может быть только прямая $x = -1$. Чтобы это выяснить, найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = \frac{3 \cdot (-1 - 0)^2 - 5}{-1 - 0 + 1} = \frac{3 \cdot 1 - 5}{-0} = \frac{-2}{-0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = \frac{3 \cdot (-1 + 0)^2 - 5}{-1 + 0 + 1} = \frac{3 \cdot 1 - 5}{+0} = \frac{-2}{+0} = -\infty.$$

Поскольку односторонние пределы равны бесконечности, то $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Определим, существуют ли невертикальные асимптоты. Воспользуемся формулами из утверждения 2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5}{(x + 1) \cdot x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3 - \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3 = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{x + 1} - 3x)\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5 - 3x(x + 1)}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5 - 3x^2 - 3x}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x - 5}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{3x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-3 - \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{-3 - 0}{1 + 0} = \frac{-3}{1} = -3 = b.$$

Подставляя найденные значения $k = 3$ и $b = -3$ в формулу $y = kx + b$, получим уравнение наклонной асимптоты:

$$y = 3x - 3.$$

Отметим, что других невертикальных асимптот нет, так как при $x \to -\infty$ значения k и b будут такими же.

б) Найдем область определения функции $y = (2x + 1)/\sqrt{5 - x}$:

$$5 - x > 0 \quad -x > -5 \quad x < 5 \quad D(y) = (-\infty; 5).$$

Поскольку $D(y) = (-\infty; 5)$, то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая $x = 5$. Чтобы это выяснить, надо найти только $f(5 - 0)$, так как правее точки $x = 5$ функция не определена.

$$\lim_{x \to 5-0} \frac{2x + 1}{\sqrt{5 - x}} = \frac{2(5 - 0) + 1}{\sqrt{5 - (5 - 0)}} = \frac{10 + 1}{\sqrt{5 - 5 + 0}} = \frac{11}{\sqrt{+0}} = \frac{11}{+0} = +\infty.$$

Поскольку односторонний предел равен бесконечности, то $x = 5$ – вертикальная асимптота.

Выясним вопрос о существовании невертикальных асимптот. Поскольку $D(y) = (-\infty; 5)$, то воспользоваться формулами из утверждения 2 можно только при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x\sqrt{5-x}}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x\sqrt{5-x}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{5-x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{5-x}}=\frac{2-\frac{1}{-\infty}}{\sqrt{5-(-\infty)}}=\frac{2+0}{\sqrt{5+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0=k,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx))=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{\sqrt{5-x}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{5-x}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{5}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x}}}=\frac{2+\frac{1}{-\infty}}{\sqrt{\frac{5}{+\infty}-\frac{1}{-\infty}}}=$$

$$=\frac{2}{+0}=+\infty.$$

Поскольку последний предел равен бесконечности, то невертикальных асимптот нет.

Задания для решения

9. Найти асимптоты к графику функции.

9.1 а) $y=\frac{5x+4}{x-2}$; б) $y=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$.

9.2 а) $y=\frac{3-x^3}{2x-6}$; б) $y=\frac{x-4}{\sqrt{1-x}}$.

9.3 а) $y=\frac{6x+1}{x+3}$; б) $y=\frac{3-x}{\sqrt{x-2}}$.

9.4 а) $y=\frac{2-5x}{2x+1}$; б) $y=\frac{3x}{\sqrt{x+7}}$.

9.5 а) $y=\frac{3x^2+1}{4x-5}$; б) $y=\frac{x-1}{\sqrt{4-2x}}$.

9.6 а) $y=\frac{x^2}{1-x}$; б) $y=\frac{1-5x}{\sqrt{x+3}}$.

9.7 а) $y=\frac{2-x^2}{x+4}$; б) $y=\frac{9x-1}{\sqrt{3-x}}$.

9.8 а) $y=\frac{5x^3+8}{2x-10}$; б) $y=\frac{x-4}{\sqrt{x+6}}$.

9.9 а) $y=\frac{x^2+1}{x^2}$; б) $y=\frac{5x+4}{\sqrt{2x+6}}$.

9.10 а) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\frac{3x+9}{\sqrt{2-x}}$.

9.11 а) $y=\frac{x}{x^2+2}$; б) $y=\frac{2-x}{\sqrt{2+x}}$.

9.12 а) $y=\frac{2x-5}{x^2+1}$; б) $y=\frac{7x}{\sqrt{8-2x}}$.

9.13 а) $y=\frac{4x^4}{x^2+7}$; б) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$.

9.14 а) $y=\frac{x}{6x-3}$; б) $y=\frac{x+5}{\sqrt{x}}$.

9.15 а) $y=\frac{x^2}{x+2}$; б) $y=\frac{2-3x}{\sqrt{x}}$.

4 Производная функции и ее применение

4.1 Определение производной, основные правила дифференцирования. Таблица производных

Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения ее приращения Δy к соответствующему приращению аргумента Δx независимой переменной при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Производная обозначается y', $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$.

Операция вычисления производной функции называется ***дифференцированием***. Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой***.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(c)'=0$,
2. $(x)'=1$,
3. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$,
4. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$,
5. $(e^x)'=e^x$,
6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$,
7. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$,
8. $(\sin x)'=\cos x$,
9. $(\cos x)'=-\sin x$,
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,
11. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$,
15. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то функции $u+v$, $u-v$ $c\cdot u$, $\frac{c}{u}$ (c – const, $u\neq 0$) , $u\cdot v$ и $\frac{u}{v}$ ($v\neq 0$) дифференцируемы в этой точке, причем

$$1.\,(u+v)'=u'+v',\qquad 2.\,(u-v)'=u'-v',\qquad 3.\,(c\cdot u)'=c\cdot u',$$

$$4.\left(\frac{c}{u}\right)'=-\frac{c}{u^2},\quad 5.\,(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\qquad 6.\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Пример: найти производные следующих функций:

в) $y=\frac{x^4+1}{x^4-1}$.

а) $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \dfrac{7}{x^5} + 4$; б) $y = x^3 \cdot \sin x$;

Решение.

а) $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \dfrac{7}{x^5} + 4.$

Воспользовавшись тем, что $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $\dfrac{c}{x^n} = c \cdot x^{-n}$ перепишем функцию y следующим образом: $y = 5x^4 - 3x^{\frac{3}{7}} + 7x^{-5} + 4$. По основным правилам дифференцирования 1-3.

$$y' = \left(5x^4 - 3x^{\frac{3}{7}} + 7x^{-5} + 4\right)' = 5\cdot(x^4)' - 3\cdot\left(x^{\frac{3}{7}}\right)' + 7\cdot(x^{-5})' + (4)' = \begin{bmatrix} (x^n)' = n\cdot x^{n-1}; \\ c' = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 5\cdot 4\cdot x^3 - 3\cdot\frac{3}{7}\cdot x^{-\frac{4}{7}} + 7\cdot(-5)\cdot x^{-6} + 0 = 20x^3 - \frac{9}{7}\cdot x^{-\frac{4}{7}} - 35x^{-6} = 20x^3 - \frac{9}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} - \frac{35}{x^6}.$$

б) $y = x^3 \cdot \sin x$. По основному правилу дифференцирования 5, имеем

$$y' = (x^3\cdot\sin x)' = (x^3)'\cdot\sin x + x^3\cdot(\sin x)' = 3x^2\cdot\sin x + x^3\cdot\cos x.$$

в) $y = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$. По основному правилу дифференцирования 6, имеем

$$y' = \left(\frac{x^4+1}{x^4-1}\right)' = \frac{(x^4+1)'\cdot(x^4-1) - (x^4+1)\cdot(x^4-1)'}{(x^4-1)^2} = \frac{4x^3\cdot(x^4-1) - (x^4+1)\cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} =$$

$$= \frac{4x^7 - 4x^3 - 4x^7 - 4x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{-8x^3}{(x^4-1)^2}.$$

Задания для решения

Продифференцировать заданные функции.

1. $y=3x^4-5x^2+7x-2$;
2. $y=-7x^2+11x^3-2x^5+3$;
3. $y=-7x^2+11x^3-2x^5+3$;
4. $y = 2x^3 + \dfrac{5}{x^2} - 4\cdot\sqrt[3]{x}$;
5. $y = \dfrac{11}{\sqrt{x}} + 5x - \dfrac{12}{x^5}$;
6. $y = 2\cdot\sqrt[4]{x^3} - 6x^7 + \dfrac{3}{x^2}$;
7. $y = 5x^5 - \dfrac{3}{\sqrt[7]{x^8}} + 3\cdot\sqrt[5]{x^3}$;
8. $y = \dfrac{2}{x^4} - 3\cdot\sqrt[5]{x^7} + \dfrac{4}{x^3}$;
9. $y = 8\cdot\sqrt[12]{x} + 3x - \dfrac{2}{x^9}$;
10. $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{x^3} + 12\cdot\sqrt{x}$;
11. $y = 5x^2 + 11\cdot\sqrt[4]{x} + \dfrac{6}{x^2}$;
12. $y = 4\cdot\sqrt[5]{x^2} - 2x^3 + \dfrac{4}{x^2}$;
13. $y=(3x^2+4x-1)\cdot\cos x$;
14. $y=(5x^4-6x+e^x)\cdot\ln x$;
15. $y=(2\log_4 x+6\mathrm{tg}x)\cdot\arcsin x$;
16. $y=(7\mathrm{arctg}\, x+4e^x)\cdot(3-x)$;
17. $y=(2\arccos x-x^3)\cdot 4^x$;
18. $y=(\mathrm{ctg}\, x-2\ln x)\cdot(5x^2+3)$;
19. $y=(3\lg x-4\cdot 9^x)\cdot(5x-4)$;
20. $y=(8\mathrm{arcctg}\, x-5x^2)\cdot e^x$;
21. $y=(\mathrm{tg}\, x+8\cos x)\cdot(7x^4-2)$;

22. $y=\dfrac{6x-4x^2}{2x^3-5}$; **23.** $y=\dfrac{5x^4-4}{2x^2+7x}$; **24.** $y=\dfrac{7-6x^3+7x}{3x^2-2}$;

25. $y=\dfrac{9x-x^2}{\log_2 x-3x}$; **26.** $y=\dfrac{5\sin x+3^x}{x^2+1}$; **27.** $y=\dfrac{3\operatorname{arctg} x+\cos x}{5x^4+11}$;

28. $y=\dfrac{6^x-2\operatorname{tg} x}{2\ln x-5e^2}$; **29.** $y=\dfrac{4\cos x+2\cdot 5^x}{x^2+\arccos x}$; **30.** $y=\dfrac{3e^x+2\operatorname{ctg}x}{7\log_6 x+4}$.

4.2 Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т.е. y зависит от x посредством промежуточного аргумента u, то y называется ***сложной функцией*** от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной.

$$y'=f'(u)\cdot u'(x). \qquad (4.2)$$

Пример: найти производные следующих функций: а) $y=\sin(2x-5)$;

б) $y=(x^5+3x-1)^4$.

Решение.

а) $y=\sin(2x-5)$. Полагая $y=\sin u$, где $u=2x-5$, применив формулу (4.2), имеем:

$$y'=\left(\sin(2x-5)\right)'=\left[u=2x-5\right]=\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'=\cos(2x-5)\cdot(2x-5)'=$$
$$=\cos(2x-5)\cdot 2.$$

б) $y=(x^5+3x-1)^4$ Полагая $y=u^4$, где $u=x^5+3x-1$, применив формулу (4.2), имеем:

$$y'=\left((x^5+3x-1)^4\right)'=\left[u=x^5+3x-1\right]=(u^4)'=4u^3\cdot u'=4(x^5+3x-1)^3\cdot$$
$$\cdot(x^5+3x-1)'=4(x^5+3x-1)\cdot(5x^4+3).$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$y'=\left((x^5+3x-1)^4\right)'=4(x^5+3x-1)^3\cdot(x^5+3x-1)'=4(x^5+3x-1)\cdot(5x^4+3).$$

Второй способ решения без введения промежуточного аргумента u значительно проще и является предпочтительным.

Задания для решения

Продифференцировать заданные функции.

1. $y=\cos(9x+2)-3^{5x^2+4x}-\ln(2x^3-4)$; **2.** $y=\operatorname{tg}(4-5x)-\arcsin\dfrac{x}{2}-e^{\cos x}$;

3. $y=5^{6x+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}-4^{\sin x}$; **4.** $y=\operatorname{ctg}(15x-2)-\arcsin 4x-\cos(2^x)$;

5. $y=\arccos(3-6x)-\sin(5x^2-9)+\mathrm{ctg}(\ln x)$; **6.** $y=\ln(14x+3)+\mathrm{arctg}\dfrac{x}{6}-\cos(\sqrt{x})$;

7. $y=\mathrm{tg}(5x+2)+\log_6\dfrac{x}{4}-\cos(\ln x)$;

8. $y=\sqrt{x^3+3x-7}-\log_4(x^2+6)-5^{2x-5}$;

9. $y=\cos(2^x)\cdot\mathrm{arcctg}(\ln x)$;

10. $y=\mathrm{tg}(e^{3x})\cdot\arcsin x^3$;

11. $y=(9x+2)^5\cdot 6^{5x^2+4x}$;

12. $y=\sqrt{\arcsin x}\cdot 5^{\cos x}$;

13. $y=\dfrac{(2x+5)^3}{\ln(3x-4x^2)}$;

14. $y=\dfrac{\sqrt{x^3+12x+4}}{\mathrm{tg}(4x-9)}$;

15. $y=\dfrac{e^{-\mathrm{ctg}x}}{\sqrt[3]{(5x^4+3x)^2}}$;

16. $y=\dfrac{6^{7x^2+5x}}{(2x+11)^8}$;

17. $y=e^{\arcsin(7x-1)}\cdot\ln(\mathrm{ctg}3x)$;

18. $y=\cos(\sqrt{3x+2})\cdot 2^{4x^5+7}$;

19. $y=\dfrac{\log_9^4(3x+6)}{\cos\sqrt{3x^2+1}}$;

20. $y=\dfrac{\mathrm{arctg}(\sin 4x)}{e^{\log_2(x+5)}}$.

4.3 Производные высших порядков

Если y' есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от y' называется ***второй производной***, или п***роизводной второго порядка*** от функции y, и обозначается $y'', f''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')'=y'''=f'''(x)=\dfrac{d^3y}{dx^3}$;

производная до n-го порядка $(y^{(n-1)})'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Пример: а) найти производную второго порядка для функции $y=\mathrm{arctg}x^2$.

Решение. а) $y'=\dfrac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{1}{1+x^4}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^4}$;

$$y''=\left(\frac{2x}{1+x^4}\right)'=\frac{(2x)'\cdot(1+x^4)-2x\cdot(1+x^4)'}{(1+x^4)^2}=\frac{2(1+x^4)-2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

б) найти $y'''(2)$, если $y=\ln(x-1)$.

$$y'=(\ln(x-1))'=\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'=\frac{1}{x-1}\cdot 1=(x-1)^{-1},$$

$$y''=\left((x-1)^{-1}\right)'=-1\cdot(x-1)^{-2}\cdot(x-1)'=-1\cdot(x-1)^{-2}\cdot 1=-(x-1)^{-2},$$

$$y''' = \left((x-1)^{-2}\right)' = -(-2)\cdot(x-1)^{-3}\cdot(x-1)' = 2\cdot(x-1)^{-3}\cdot 1 = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Тогда $y'''(2) = 2$.

Задания для решения

1. $y=3x^3-2x^2+5x-1$. Найти y''.

2. $y = 2\sqrt{4-3x}$. Найти y^{IV}.

3. $y=\ln(x+1)$. Найти y^{IV}.

4. $y=\text{tg}\, x$. Найти y'''.

5. $y=\ln(\sin x)$. Найти y'''.

6. $y=\cos^2 5x$. Найти y'''.

7. $y=(1+9x^2)\cdot\text{arcctg}\, 3x$. Найти y''.

8. $y=(1-2x^2)\cdot\ln(1-2x^2)$. Найти y''.

9. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$:

9.1 $y=\sin 7x$, $x_0 = \pi$; **9.2** $y=\ln(2+x)$, $x_0=3$; **9.3** $y=(3x-1)^4$, $x_0=1$;

9.4 $y= x\cdot\sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; **9.5** $y= x\cdot\sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; **9.6** $y= x^4\cdot\ln x$, $x_0=1$;

9.7 $y=\ln(x^2-6)$, $x_0=3$; **9.8** $y=\ln^3 x$, $x_0=1$; **9.9** $y = 4^{x^2}$, $x_0=1$.

4.4 Производная функции заданной параметрически

Пусть функция задана параметрическим способом через параметр t $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ Для нахождения первой производной функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (4.3)$$

Тогда вторая производная

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (4.4)$$

Пример: найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y = t^2 - 3t + 1, \\ x = t^2 + 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем производные от y и x по параметру t:

$y'_t = (t^2 - 3t + 1)' = 2t - 3$; $x'_t = (t^2 + 1)' = 2t$. По формуле (4.3)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{2t}.$$

Для нахождения второй производной y''_{xx} найдем сначала $(y'_x)'_t$.

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{2t-3}{2t}\right)'_t = \frac{(2t-3)'\cdot 2t - (2t-3)\cdot(2t)'}{(2t)^2} = \frac{2\cdot 2t - (2t-3)\cdot 2}{(2t)^2} = \frac{6}{(2t)^2},$$

затем по формуле (4.4), имеем:

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{6}{\left(2t\right)^2}}{2t} = \frac{6}{8t^3} = \frac{3}{4t^3}.$$

Задания для решения

Найти y', y'':

1. $\begin{cases} x = e^{-4t}, \\ y = e^{5t}; \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[3]{t^8}; \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = 7\cos 3t, \\ y = 5\sin 3t; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x = 4t^2 - 2, \\ y = 4t^3; \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 6t - 3t^2, \\ y = 2t^3 + 1; \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} x, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

4.5 Производная функции заданной неявно

Пусть функция задана неявно $F(x,y)=0$. Для вычисления производной функции $y=y(x)$ следует тождество $F(x,y)=0$ продифференцировать по x, рассматривая левую часть как сложную функцию x, а затем полученное уравнение разрешить относительно y'_x.

Вторую производную от неявной функции получим, дифференцируя y'_x по переменной x, помня при этом, что y есть функция от x. Из полученного равенства выражаем y''_x, предварительно подставив ранее найденное y'_x.

Пример: найти y'_x для функции, заданной неявно $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$.

Решение. Продифференцируем тождество, считая $y(x)$ сложной функцией:

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y'_x - (x^2)' \cdot y^2 - x^2 \cdot (y^2)' = 0,$$

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y'_x - 2x \cdot y^2 - x^2 \cdot 2y \cdot y'_x = 0.$$

Перенесем в правую часть выражения, не содержащие множитель y'_x,

$$4y^3 \cdot y'_x - 2x^2 y \cdot y'_x = -4x^3 + 2x \cdot y^2,$$

вынесем y'_x за скобки и выразим его значение

$$y'_x \cdot (4y^3 - 2x^2 y) = -4x^3 + 2x \cdot y^2,$$

$$y'_x = \frac{2xy^2 - 4x^3}{4y^3 - 2x^2 y} = \frac{2x(y^2 - 2x^2)}{2y(2y^2 - x^2)} = \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}.$$

Задания для решения

Найти y', y'':

1. $y=5x+4\text{arctg}\, y$, **2.** $\text{tg}\, y=4x-6y$, **3.** $y=e^y+4x$,
4. $3x+\cos y=5y$, **5.** $3y=4+xy^2$, **6.** $3x^2+y^2=6y$,
7. $4x-\cos y=6y$, **8.** $\sin y=xy^2-6$, **9.** $x^2y^2-4x=8y$,
10. $x^3y-xy^2=\text{arctg}\, y$, **11.** $3x+8xe^y=\cos x$, **12.** $x^3-y^2=\arccos 3x+\text{tg}\, y$.

4.6 Логарифмическая производная

Пусть функция $f(x)=u(x)^{v(x)}$, где $v(x)>0$ – некоторая функция.

Прологарифмировав обе части равенства, получим $\ln f(x)= v(x)\cdot\ln u(x)$. Отсюда дифференцируя обе части, находим

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)},$$

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right],$$

т.е.

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \qquad (4.5)$$

Пример: найти y'_x для функции $y=(\text{ctg}x)^{x^4+5}$.

Решение. Прологарифмировав обе части равенства, получим:

$$\ln y=\ln(\text{ctg}x)^{x^4+5},$$

используя свойство логарифмической функции $\ln a^b=b\cdot\ln a$, имеем

$$\ln y=(x^4+5)\cdot\ln(\text{ctg}x).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=(x^4+5)'\cdot\ln(\text{ctg}x)+(x^4+5)\cdot(\ln(\text{ctg}x))'.$$

Тогда

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=4x^3\cdot\ln(\text{ctg}x)+(x^4+5)\cdot\frac{1}{\text{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right),$$

$$y'_x=y\cdot\left[4x^3\cdot\ln(\text{ctg}x)+(x^4+5)\cdot\frac{1}{\text{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right],$$

и окончательно

$$y'_x=(\text{ctg}x)^{x^4+5}\cdot\left[4x^3\cdot\ln(\text{ctg}x)+(x^4+5)\cdot\frac{1}{\text{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right].$$

Задания для решения

Найти производную функции:

1. $y=(\mathrm{tg}(4+2x))^{\sqrt{3-5x}}$; **2.** $y=(\ln(6-8x))^{\arccos 3x}$;

3. $y=(\arccos 3x)^{\ln(9-2x^2)}$; **4.** $y=(\log_2(x^3-1))^{\cos 9x}$;

5. $y=\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^{\mathrm{arctg}12x}$; **6.** $y=(\sin(5x^2-3x))^{\log_2 x}$;

7. $y=(\mathrm{tg}(4+2x))^{\sqrt{3-5x}}$; **8.** $y=(2^{x+4})^{\arcsin 3x}$;

9. $y=(\cos(8x^3+5))^{e^{6x}}$; **10.** $y=(\sqrt[4]{3x^2-6x+1})^{\mathrm{ctg}13x}$.

4.7 Геометрический смысл производной функции

***Геометрический смысл производной функции в точке*:** производная функции в точке равна тангенсу угла между касательной, проведенной в этой точке (рис. 4.1) и положительным направлением оси *Ox*

$$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0). \qquad (4.6)$$

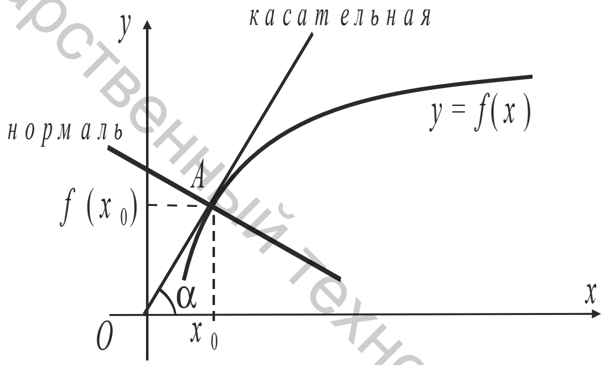


Рисунок 4.1 – Касательная и нормаль к графику функции

Уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0). \qquad (4.7)$$

Прямая перпендикулярная к касательной графика функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ называется ***нормалью*** (рис. 4.1). Т. к. у перпендикулярных прямых угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0). \qquad (4.8)$$

Пример: составить уравнение касательной и нормали к параболе $y=x^2-4x+5$ в точке $x_0=1$.

Решение. Подставляя в уравнение параболы абсциссу точки касания $x_0=1$, найдем $f(x_0)=1^2-4\cdot 1+5=2$.

Для определения углового коэффициента касательной $k=\mathrm{tg}\alpha$ по формуле (4.6), найдем производную $f'(x)$ и вычислим ее значение в точке касания $f'(x_0)$:

$$f'(x)=(x^2-4x+5)'=2x-4; \qquad f'(x_0=1)=2\cdot 1-4=-2.$$

Подставляя найденные значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$ и x_0 в (4.7), (4.8) получим уравнения касательной:

$$y=-2\cdot(x-1)+(-2) \text{ или } y=-2\cdot x,$$

и нормали:

$$y=-\frac{1}{(-2)}\cdot(x-1)+(-2) \text{ или } y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}.$$

Задания для решения

1. Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^3-3x^2-x+5$ в точке $M(3, 2)$.

2. Записать уравнение нормали к кривой $y=x^2-16x+7$ в точке с абсциссой $x=1$.

3. Записать уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x=8$.

4. Записать уравнение нормали к кривой $y=\sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x=-3$.

5. Выяснить в какой точке кривой $y^2=4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x+3y-1=0$.

6. Записать уравнение касательной к кривой $y=4\text{tg}3x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{9}$.

7. Выяснить в каких точках кривой $y=\sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$.

8. Выяснить в какой точке кривой $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-7x+9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

9. Найти точку на кривой $y=3x^2-4x+6$, касательная в которой параллельна прямой $8x-y-5=0$.

10. Выяснить в какой точке кривой $y=7x^2-5x+4$, касательная перпендикулярна к прямой $x+23y-1=0$.

11. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2-y^2+xy-11=0$ в точке (3, 2).

4.8 Механический смысл производной

Пусть точка M движется прямолинейно и $s(t)$ – путь проходимый ее за время t. Тогда отношение изменения пути $s(t+\Delta t)-s(t)$ ко времени Δt есть средняя скорость движения точки за это время, а предел отношения $s'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ есть ***мгновенная скорость движения точки*** в момент времени t.

Механический смысл производной функции в точке: мгновенная скорость есть производная пройденного пути $s(t)$ по времени t

$$v(t) = s'(t), \tag{4.9}$$

а ускорение есть производная от скорости движения точки $v(t)$ или вторая производная от пройденного пути $s(t)$ по времени t:

$$a(t) = v'(t) = s''(t). \tag{4.10}$$

Пример: закон движения материальной точки $s=t^4-3t^2+2t-4$. Найти скорость и ускорение движения точки в момент времени t=2с.

Решение. Для нахождения скорости движения точки найдем производную от пройденного пути $s(t)$ по времени t и вычислим ее значение при t=2с:

$$v(t) = s'(t) = (t^4 - 3t^2 + 2t - 4)' = 4t^3 - 6t + 2,$$

$$v(t = 2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2 = 22 \text{ м/с}.$$

Для нахождения ускорения движения точки найдем производную от скорости $v(t)$ по времени t и вычислим ее значение при t=2с:

$$a(t) = v'(t) = (4t^3 - 6t + 2)' = 12t^2 - 6,$$

$$a(t = 2) = 12 \cdot 2^2 - 6 = 42 \text{ м/с}^2.$$

Задания для решения

1. Закон движения материальной точки $s=t^4-3t^2+2t-4$. Найдите скорость и ускорение движения точки в момент времени t =2с.
2. Закон движения материальной точки $s = 4\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$. Найдите скорость движения точки в момент времени $t = \pi$ с.
3. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени ее скорость будет равна 42 м/с?
4. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $x=t^3+2t^2+5t-8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?
5. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 30t + 18$. В какой момент времени ее скорость будет равна нулю?
6. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x=5t^2+2t+6$ и $x=4t^2+3t+18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

4.9 Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Дифференциалом функции $f(x)$ называется произведение производной функции $f'(x)$ на приращение Δx независимой переменной x

$$df = f'(x)\Delta x. \qquad (4.11)$$

Дифференциалом независимой переменной называется приращение этой переменной $dx = \Delta x$.

Пример: найти дифференциал функции $y = \sin x - x\cos x + 4$.

Решение. Найдем производную функции:

$$y' = \cos x - (x'\cdot\cos x + x\cdot(\cos x)') = \cos x - (1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x)) =$$
$$= \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Тогда согласно формуле (4.11)

$$dy = y'(x)dx = x\sin x dx.$$

С помощью дифференциала можно приближенно вычислять значения функции $f(x)$ для x близких к x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Применив для нахождения дифференциала формулу (4.11), окончательно получим:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \qquad (4.12)$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Пример: вычислить приближенно $y=\sqrt{4x-3}$ при x=0,98.

Решение. Найдем производную функции y:

$$y' = \left((4x-3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(4x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{4x-3}}\cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}.$$

Ближайшей целочисленной точкой к точке x=0,98 является x_0=1. Вычислим значение производной в этой точке

$$y'(1) = \frac{2}{\sqrt{4\cdot 1-3}} = 2.$$

Тогда $\Delta x = x - x_0$=0,98-1= -0,02 и по формуле (4.12)

$$y(0{,}98) \approx y(1) + y'(1)\cdot(-0{,}02) = 1+2\cdot(-0{,}02) = 0{,}96.$$

Пример: найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[4]{x}$ в точке x=17. Ближайшей легко вычисляемой точкой для этой функции к точке x=17 является x_0=16.

Тогда $\Delta x = x - x_0$=17-16=1, а $y(x_0)=\sqrt[4]{16}$ =2. Найдем $y'(x_0)$.
$y' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, тогда $y'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{4 \cdot 2^3} = \frac{1}{32}$. Получили, что по формуле (4.12)

$$\sqrt[4]{17} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{32} \cdot 1 \approx 2 + 0{,}03 = 2{,}03.$$

Задания для решения

1. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

1.1 $y=(3x+1)\cdot \mathrm{tg}^3 x$;   **1.2** $y = \sqrt[4]{\mathrm{arctg}\, x} + (\arccos 2x)^2$;

1.3 $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x^2 - 3} + \ln(\cos 3x)$;   **1.4** $y = 5^{2x^3 - 7x} \cdot \sqrt{2x - 4}$;

1.5 $y = \dfrac{e^{2\cos 4x + 5}}{\log_2(5x - 11)}$;   **1.6** $y = \dfrac{7x^3 - 11x + 4}{\sin(2x + 1)}$.

2. Вычислить приближенное значение функции $y=x^7-3x^4+4x^3-2$ при x=1,002.

3. Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при x=0,98.

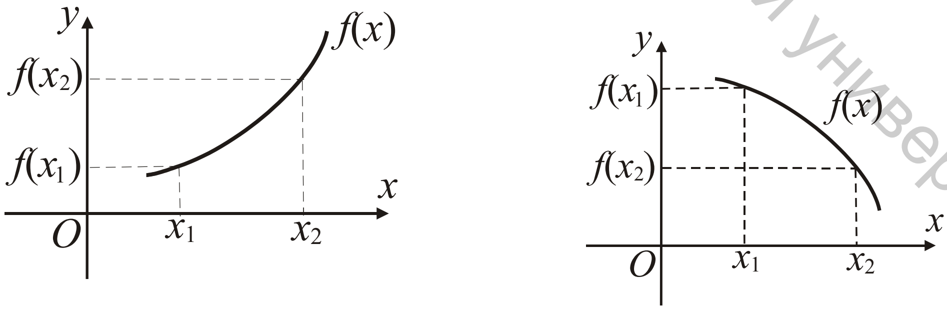
4. С помощью дифференциала вычислить приближенно данные величины:

4.1 $\sqrt[3]{1{,}02}$;   **4.2** $4{,}01^{1{,}5}$;   **4.3** $\sqrt[4]{15{,}8}$;   **4.4** $3{,}03^5$ **4.5** $2{,}01^3+2{,}01^2$.

4.10 Исследование функции на возрастание и убывание

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на (a, b), если для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1<x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 4.2 а).

Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на (a, b), если для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1<x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 4.2 б).



а   б

Рисунок 4.2 – График: а – возрастающей, б – убывающей функции

Возрастающие или убывающие на интервале (a, b) функции называются ***монотонными***.

Теорема 1: ***(достаточное условие монотонности функции)*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на промежутке (a, b).
1. Если $f'(x) < 0$ на промежутке (a, b), то эта функция убывает на (a, b).
2. Если $f'(x) > 0$ на промежутке (a, b), то эта функция возрастает на (a, b).

Точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, называются ***стационарными***.

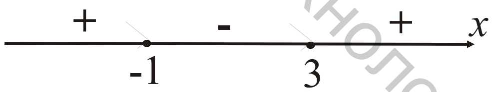
Критическими точками функции f на интервале (a, b) являются точки, в которых производная существует и равна нулю, и точки, где она не существует.

План исследования функции f(x) на монотонность:

1. Найти первую производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки, для этого:
   а) находим действительные корни уравнения $f'(x) = 0$;
   б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.
3. Отмечаем полученные точки на оси Ox, исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки.
4. Применив теорему 1, указываем интервалы возрастания и убывания функции.

Пример: найти интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

Решение. Функция определена на R.
$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$. Производная $y' = 0$ при x_1=-1 и x_2=3. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы
(-∞,-1); (-1,3); (3,+∞).



Т.к. $y' > 0$ на интервалах (-∞,-1) и (3,+∞), то функция возрастает на этих интервалах. Т.к. $y' < 0$ на интервале (-1,3), то функция убывает на этом интервале.

Задания для решения

Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1. $y = -x^4 + 2x^2$; **2.** $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$; **3.** $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$; **4.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

5. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$; **6.** $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$; **7.** $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$; **8.** $y = \ln(1 - x^2)$;

9. $y = \dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$; **10.** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$; **11.** $y = x + \dfrac{1}{x}$; **12.** $y = x + \sqrt{1-x}$;

13. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; **14.** $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

4.11 Исследование функции на экстремум

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется ***максимумом,*** если оно является наибольшим по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется ***минимумом,*** если оно является наименьшим по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0. Максимумы и минимумы функции называют ***экстремумами.***

Теорема 2: (***необходимое условие экстремума***) Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0)=0$.

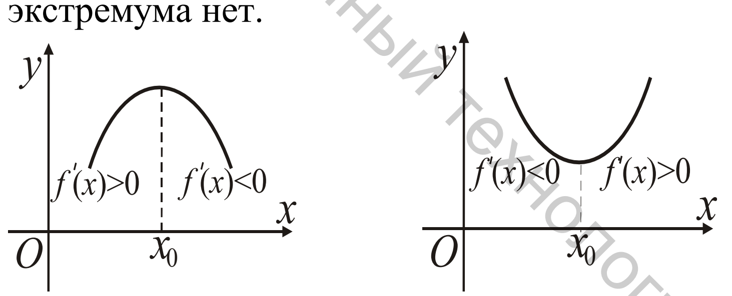
Теорема 3: ***(достаточное условие экстремума)***

Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) за исключением быть может точки $x_0 \in (a, b)$.

1) если при переходе слева направо через т. x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то при $x=x_0$ функция имеет максимум;

2) если при переходе слева направо через т. x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс, то при $x=x_0$ функция имеет минимум;

3) если при переходе слева направо через т. x_0 $f'(x)$ не меняет свой знак, то при $x=x_0$ экстремума нет.



а б

Рисунок 4.3 – Экстремумы функции: а – точка максимума, б – точка минимума

Правило исследования функции на максимум и минимум с помощью первой производной:

1. Найти первую производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки, для этого:

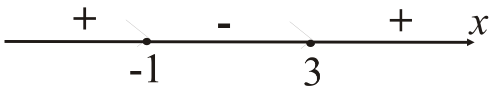
а) находим действительные корни уравнения $f'(x)=0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ не существует, а сама функция непрерывна, и которые принадлежат $D(f)$.

3. Отмечаем полученные точки на оси Ox, исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки.
4. Применив теорему 3, указываем точки экстремума и находим значения функции в этих точка

Пример: найти экстремумы функции $y=x^3-3x^2-9x+7$.

Решение. Функция определена на R. $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$. Производная $y' = 0$ при x_1=-1 и x_2=3.



Т.к. y' меняет свой знак с плюса на минус при переходе через x_1= -1, то эта точка является точкой максимума функции. Т.к. y' меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через точку x_2=3, то эта точка является точкой минимума.

$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 7 = 12,$$

$$y_{\min} = y(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 7 = -20.$$

Задания для решения

Найти экстремумы функций заданий **1.-14.** из пункта **4.10.**

4.12 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [a, b]

Наибольшим значением функции называется самое большее, а ***наименьшим значением*** – самое меньшее из всех ее значений, принимаемых на отрезке $[a, b]$.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a, b]:

1) найти критические точки функции $f(x)$, принадлежащие отрезку $[a, b]$;
2) вычислить значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[a, b]$;
3) выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.

Пример: найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке [-1, 1].

Решение. 1) Т. к. $f'(x) = \left(x + 3\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = 1 + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$, то критической является точка $x_0=0 \in [-1, 1]$, где производная не существует;

2) $f(0)=0$, $f(-1)=-4$ и $f(1)=4$;

3) на отрезке [-1, 1] функция $f(x)$ достигает наибольшего значения равного 4 при x=1 и наименьшего значения равного -4 при x= -1.

Задания для решения

Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках:

1. $y = -3x^4+6x^2-1$, $[-2, 2]$; **2.** $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $[-1, 5]$; **3.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $[0,4]$;

4. $y = \sin 2x - x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; **5.** $y = x^3-3x^2-9x+35$, $[-4, 4]$; **6.** $y = x^2 \cdot \ln x$, $[1, e]$;

7. $y = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$; **8.** $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $[0,5]$; **9.** $y = (x-2) \cdot e^x$, $[-2, 1]$.

4.13 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции

Если на некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то она называется ***выпуклой***, а если выше, то – ***вогнутой*** на этом интервале.

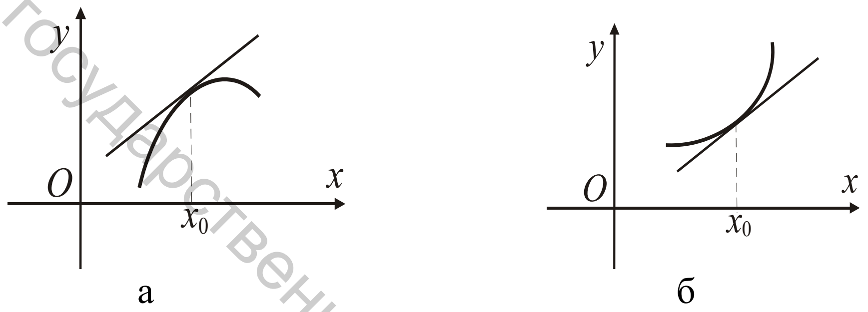


Рисунок 4.4 Графики: а – выпуклой функции, б – вогнутой функции

Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** функции $f(x)$, если в этой точке выпуклость функции сменяется вогнутостью или наоборот.

Теорема 4: (***необходимое условие точки перегиба***) Если функция f имеет непрерывную в точке x_0 производную $f''(x)$ и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 5: (***достаточное условие выпуклости, вогнутости***)

Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b). Если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ вогнута на этом интервале. Если $f''(x) < 0$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале.

Правило исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба с помощью второй производной:

1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти критические точки, для этого:
   а) находим действительные корни уравнения $f''(x) = 0$;
   б) находим значения x, при которых вторая производная $f''(x)$ не существует.
3. Отмечаем полученные точки на оси Ox, исследуем знак второй производной слева и справа от каждой критической точки.
4. Применив теорему 5, указываем интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба функции.

Пример: найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y=\mathrm{arctg}x-x$.

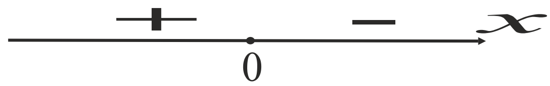
Решение. Функция определена на R.

1. Найдем y', y''.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-1,\ y''=\left((1+x^2)^{-1}-1\right)'=-1\cdot(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

2. $y''=0$ при x=0.

3. Отмечаем полученные точки на оси Ox, исследуем знак второй производной.



4. Т.к. $y''>0$ при x<0 и $y''<0$ при x>0, то по теореме 5 функция вогнута на интервале (-∞,0) и выпукла на интервале (0,+∞). Точка (0, 0) – точка перегиба графика функции.

Задания для решения

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

1. $y=3x^5-5x^4+4$; **2.** $y=x^3-3x^2-9x+9$; **3.** $y=x+36x^2-2x^3-x^4$; **4.** $y=\frac{1}{(x+1)^3}$;

5. $y=\frac{1}{x^2-4}$; **6.** $y=3-\sqrt[5]{(x+2)^7}$; **7.** $y=1-\ln(x^2-4)$; **8.** $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

4.14 Применение производных для вычисления пределов

Теорема Лопиталя: Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, дифференцируемые в окрестности точки $x_0, g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\right)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример: найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$, используя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'}{1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\lim_{x\to 0}(-\mathrm{tg}x)=0.$$

<u>Замечание</u>: Если, в свою очередь, выражение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ есть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$. Теорема верна и при $x_0=\pm\infty$.

Пример: найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, используя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{(\ln\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=1.$$

Задания для решения

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$; **3.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^3-4x^2-4x+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$; **5.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$; **7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$; **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$; **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}7x)}{\ln(\operatorname{tg}2x)}$; **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}}{x^3}$; **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004.– 608 с.
2. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – Москва: Наука, 1984.– 336 с.
3. Гурский, Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский, В. В. Ершова. – Минск: Выш. школа, 1982.–318 с.
4. Гусак, А. А. Высшая математика. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
5. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск: Выш. школа, 2008. – 304 с.
6. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Дрофа, 2004.–288 с.
7. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Физматлит, 2001.–304 с.
8. Денисов, В. С. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Часть 1 / В. С. Денисов, А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск: УО «ВГТУ», 2006. – 65 с.
9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. Т.1 / Н. С. Пискунов. – Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. – 416 с.
10. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – Москва: Наука, 1980. – 336 с.

Содержание