МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



# МЕТРОЛОГИЯ, МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

## *МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

**к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)»**

Витебск
2015

УДК 389.681.2

Метрология, методы и приборы технических измерений: методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)»

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2014.

Составитель: доц., д.т.н. Кузнецов А.А.

В методических указаниях содержится информация, необходимая для выполнения двух расчетно-графических работ по дисциплине «Метрология, методы и приборы технических измерений».

Предназначены для студентов дневной формы обучения специальности 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)»

Одобрено кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств» УО «ВГТУ» «23» октября 2014 г., протокол № 3.

Рецензент: ст. преп., к.т.н. Надёжная Н.Л.
Редактор: ст. преп. Клименкова С.А.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» «27» ноября 2014 г., протокол № 8.

Ответственный за выпуск: Букин Ю.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

_ Подписано к печати 31.12.14. Формат 60х90 1/16. Уч.-изд. л. 2,3.
Печать ризографическая. Тираж 99 экз. Заказ № 367.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/172 от 12.02.2014г.
210035, г. Витебск, Московский пр-т, 72.

## СОДЕРЖАНИЕ

# 1 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

## 1.1 Классификация погрешностей измерений

Измерения не могут быть выполнены абсолютно точно. Всегда имеется некоторая неопределенность в значении измеряемой величины. Эта неопределенность характеризуется *погрешностью* – отклонением измеренного значения величины от ее истинного значения.

*Приборные погрешности* – погрешности, связанные с точностью изготовления прибора, используемого для измерения. Они могут носить как систематический, так и случайный характер. В зависимости от того, каким способом получается значение измеряемой величины, различают погрешности прямых (непосредственных) и косвенных измерений. *Прямыми* называются измерения, в результате которых значение измеряемой величины получается сразу по шкале прибора (например, измерение длины штангенциркулем) или при помощи какого-либо способа сравнения с эталоном (например, взвешивание на рычажных весах). *Косвенные* – это такие измерения, когда для нахождения некоторой физической величины сначала измеряют прямыми измерениями несколько других величин, а затем по их значениям с помощью каких-либо формул вычисляют значение искомой величины. Одну и ту же величину часто можно найти путем как прямых, так и косвенных измерений. Например, скорость автомобиля может быть определена по спидометру (прямое измерение) или найдена делением пройденного расстояния на время движения (косвенное измерение).

Предполагая, что приборные погрешности, имеющие систематический характер, устранены (весы выставлены по отвесу и уравновешены в отсутствие нагрузки, стрелка отключенного электроизмерительного прибора показывает на нуль, часы выверены по сигналам точного времени и т.д.), мы все приборные погрешности будем относить к случайным. Такие погрешности могут возникать при изготовлении приборов или при их градуировке. Обычно довольствуются сведениями о допустимых приборных погрешностях, сообщаемых заводами-изготовителями в паспортах, прилагаемых к приборам. Завод ручается, что погрешности отсчета по прибору не выходят за пределы, указываемые в паспорте. При этом остаются неизвестными ни конкретная величина, ни знак погрешности, получающейся в результате отдельного измерения данным прибором. Поэтому такие погрешности следует относить к случайным погрешностям с достаточно большой доверительной вероятностью (порядка 0,95 и выше). *Допустимые погрешности* обычно включают в себя и те, которые могут возникнуть при приведении приборов в рабочее состояние (установке на нуль и т.п.) при условии выполнения заводской инструкции.

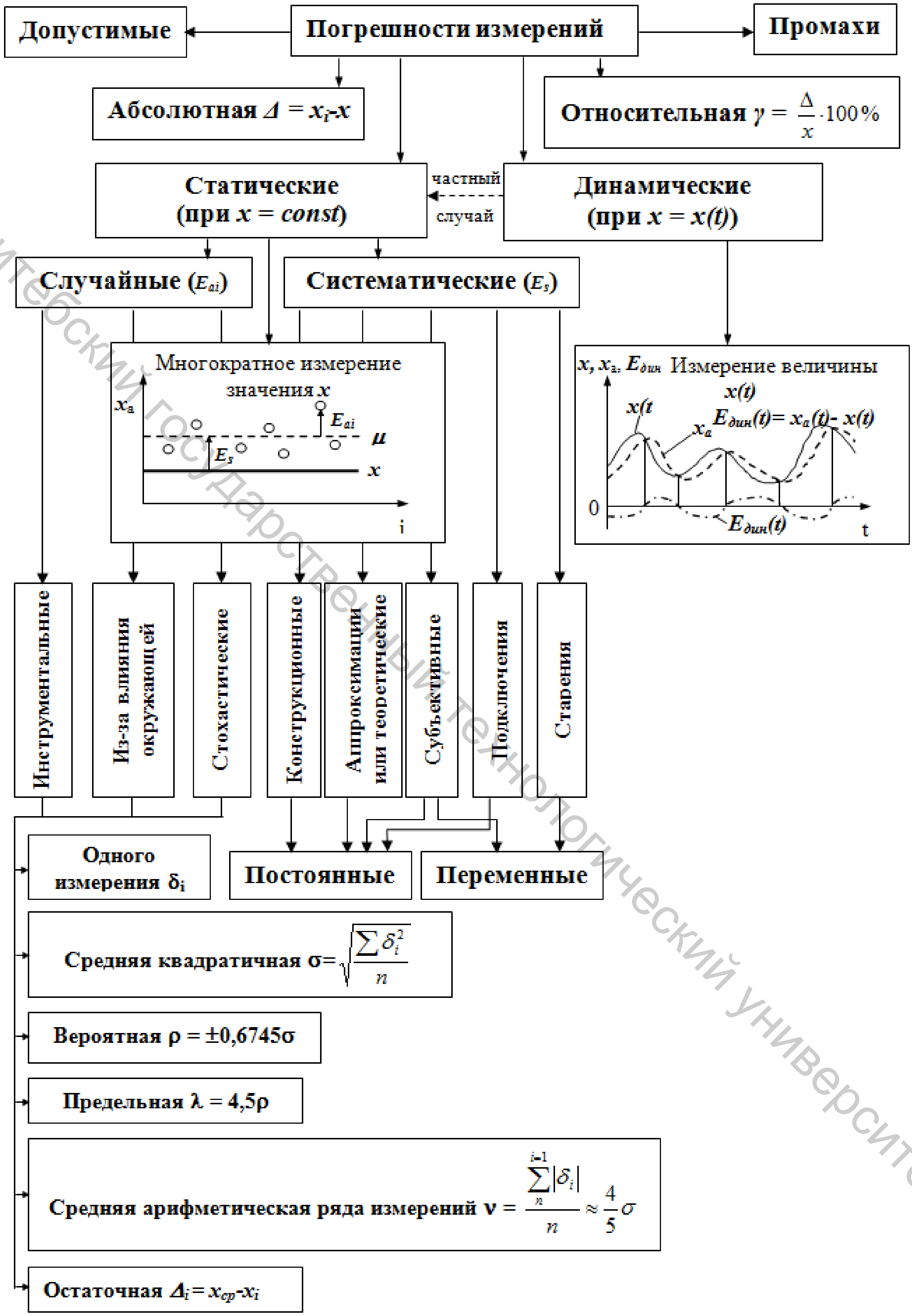



Рисунок 1.1 – Классификация погрешностей измерений

Стрелочные электроизмерительные приборы по величине допустимой погрешности делятся на классы точности, которые обозначаются на шкалах приборов цифрами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 (цифры могут быть помещены в кружок или ромбик).

*Класс точности прибора* $\gamma$ – это отношение абсолютной погрешности прибора $\Delta X_{приб}$ к максимальному значению измеряемой величины $\Delta X_{max}$, которое можно определить с помощью данного прибора (это систематическая относительная погрешность данного прибора, выраженная в процентах от номинала шкалы $X_{max}$).

$$\gamma = \frac{\Delta X_{приб}}{X_{\max}} \cdot 100\% . \qquad (1.1)$$

Тогда абсолютная погрешность $\Delta X_{приб}$ такого прибора определяется соотношением:

$$\Delta X_{приб} = \frac{\gamma \cdot X_{\max}}{100\%} . \qquad (1.2)$$

Класс точности показывает величину допустимой погрешности в процентах от значения измеряемой величины, соответствующего отклонению стрелки до последнего деления шкалы. Например, если у прибора последнее деление шкалы 300*В*, а класс его точности 0,5, то допустимая погрешность равна 0,5% от 300*В*, или 300·0,5/100*В* = 1,5*В*. Такая же допустимая погрешность 1,5*В* будет и для любого другого значения, измеряемого по этой шкале.

В случае многошкального прибора, имеющего разные пределы измерения и дающего возможность измерять различного рода величины (силу тока, напряжение, сопротивление) класс точности обычно не зависит от предела измерения, но может зависеть от рода тока (постоянный или переменный) и от рода измеряемой величины. На шкале такого прибора указывается несколько классов точности с условными обозначениями у каждого из них (**—** – постоянный ток, ~ или ≈ – переменный ток, ∼ – и постоянный и переменный ток, **Ω** – сопротивление, $\mu F$ или $C_x$ – емкость).

Цифровые электроизмерительные и прочие приборы имеют, как правило, допустимую погрешность, составляющую 1-2 единицы последнего индицируемого разряда.

Если сведений о допустимой приборной погрешности не имеется, то в качестве нее можно принять половину наименьшего деления шкалы прибора или половину наименьшего значения измеряемой величины, которое еще можно найти при помощи этого прибора. Например, при измерении длины линейкой с миллиметровыми делениями за допустимую погрешность принимается 0,5*мм*.

*Абсолютная погрешность* $\Delta$ – погрешность средства измерения, выраженная в единицах измеряемой физической величины:

$$\Delta = X_{изм} - X_Д . \tag{1.3}$$

Абсолютная погрешность показывает, на сколько мы ошибаемся при измерении некоторой величины $X$.

*Относительная погрешность* – погрешность СИ, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к результату измерений или к действительному значению измеренной физической величины. Относительную погрешность выражают в процентах:

$$\gamma_{отн} = \frac{\Delta}{X_Д} \cdot 100\% . \tag{1.4}$$

Для измерительного прибора $\gamma_{отн}$ характеризует погрешность в данной точке шкалы, зависит от значения измеряемой величины и имеет наименьшее значение в конце шкалы прибора. Относительная погрешность показывает, на какую долю от истинного значения величины $X$ мы ошибаемся.

*Приведенная погрешность* - отношение абсолютной погрешности СИ к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Приведенную погрешность также выражают в процентах:

$$\gamma_{прив} = \frac{\Delta}{X_{норм}} \cdot 100\% , \tag{1.5}$$

где $X_{норм}$ – нормирующее значение, т.е. некоторое установленное значение, по отношению к которому рассчитывается погрешность.

*Статическая погрешность измерений* – погрешность результата измерений, свойственная условиям статического измерения, то есть при измерении постоянных величин после завершения переходных процессов в элементах приборов и преобразователей.

*Динамическая погрешность измерений* – погрешность результата измерений, свойственная условиям динамического измерения. Динамическая погрешность появляется при измерении переменных величин и обусловлена инерционными свойствами средств измерений.

## 1.2 Систематические погрешности. Классификация. Способы обнаружения и устранения

*Систематические погрешности* – такие погрешности, которые соответствуют отклонению измеряемой величины от ее истинного значения всегда в одну сторону – либо в сторону завышения, либо в сторону занижения. При повторных измерениях в тех же условиях величина погрешности остается неизменной. При закономерных изменениях условий погрешность также меняется закономерно.

Систематические погрешности могут возникать по ряду причин:

1. Несоответствие прибора эталону (например, пластмассовые линейки с течением времени обычно укорачиваются на несколько миллиметров, секундомер может иметь неправильный ход – спешить или отставать на несколько секунд в сутки).

2. Неправильное использование прибора (например, перед взвешиванием не установлено равновесие ненагруженных весов).

3. Пренебрежение поправками, которые нужно ввести в результаты измерения для достижения требуемой точности (например, не учтена зависимость температуры кипения воды от атмосферного давления).

Конструкционные погрешности обусловлены технологией производства на заводе-изготовителе и связаны с допустимыми разбросами в размерах деталей и значениях электрических компонентов, используемых в данном приборе.

Погрешности аппроксимации возникают из-за сделанных предположений относительно зависимостей между величинами. Например, линейная зависимость между двумя величинами часто только предполагается, а на практике это предположение может оказаться только аппроксимацией к истинной зависимости.

Погрешности старения вызываются процессами старения приборов, так как детали изнашиваются и их характеристики изменяются, например, из-за слоев грязи, окислов, скопившихся на поверхности деталей, изменяются сопротивление контактов и их изоляционные свойства.

Погрешности подключения возникают, если включение приборов в измерительную цепь приводит к изменению значения самой измеряемой величины. Например, включение амперметра в электрическую цепь для измерения тока в ней приводит к изменению тока в этой цепи из-за сопротивления самого амперметра.

Субъективные систематические погрешности являются следствием индивидуальных свойств человека, обусловленных особенностями его организма или укоренившимися неправильными навыками выполнения измерений (заболел, закапаны глаза).

Классификация систематических погрешностей по характеру их проявления при измерениях:

1. Постоянные систематические погрешности – погрешности, которые в течение всего времени измерений сохраняют свой знак и свое значение (погрешности большинства мер, например гирь, концевых мер длины, катушек и магазинов сопротивления, а также погрешности градуировки шкал измерительных приборов, отношения плеч электроизмерительных мостов).

2. Переменные погрешности при повторных измерениях могут принимать различные значения и в зависимости от характера изменения эти погрешности делят на:

– Прогрессивные погрешности – погрешности, которые в процессе измерений возрастают или убывают. Пример: погрешности, возникающие вследствие износа контактирующих деталей средств измерения, постепенное падение напряжения источника тока, питающего измерительную цепь.

– Периодические погрешности – погрешности, значения которых являются периодической функцией времени или функцией перемещения указателя измерительного прибора. Пример: средства измерений с круговой шкалой, стрелка которых при измерении совершает несколько оборотов (секундомеры, индикаторы часового типа). Периодическая погрешность в показаниях таких устройств возникает в тех случаях, когда ось вращения стрелки не совпадает с центром окружности шкалы.

– Систематические погрешности могут изменяться также по сложному закону за счет совместного действия нескольких систематических погрешностей.

При проведении измерений стараются в максимальной степени исключить или учесть влияние систематических погрешностей. Для того чтобы исключить систематические погрешности при измерении, необходимо проанализировать всю совокупность опытных данных. Поскольку приемы измерения различных величин разнообразны, постольку различны и приемы исключения систематических погрешностей. Дать исчерпывающие правила для отыскания и исключения систематических погрешностей невозможно.

Наиболее распространенные способы исключения систематических погрешностей из результатов измерений следующие:

1. Устранение источников погрешностей до начала измерения.

Этот способ исключения систематических погрешностей является наиболее рациональным, так как он полностью или частично освобождает от необходимости устранять погрешности в процессе измерения или вычислять результат с учетом поправок. Под устранением источника погрешностей следует понимать как непосредственное его удаление (например, удаление источника тепла), так и защиту измерительной аппаратуры и объекта измерения от влияния этих источников.

Устранение влияния температуры осуществляется применением термостатирования, т.е. обеспечением определенной температуры окружающей среды. Термостатируют большие помещения (цеха, лаборатории), небольшие помещения (комнаты, камеры), средства измерений в целом или их отдельные части (катушки сопротивления, нормальные элементы, свободные концы термопар, кварцевые стабилизаторы частоты). В настоящее время термостатирование во многих случаях заменяют кондиционированием воздуха. При кондиционировании обеспечивается поддержание на требуемом уровне не только температуры, но и других параметров окружающего воздуха и в первую очередь влажности.

Устранение влияния магнитных полей достигается устройством замкнутых и непрерывных экранов из магнитомягких материалов. Магнитные силовые линии должны огибать экранируемое пространство.

Устранение вредных вибраций и сотрясений достигается путем амортизации средства измерений и его деталей. Для амортизации используют различного рода поглотители колебаний, например, губчатую резину в сочетании с различного рода эластичными подвесами (струны, пружины).

Устранение других видов вредных влияний. Влияние таких факторов, как изменение атмосферного давления, простыми средствами не устранить. В тех случаях, когда соблюдение определенных требований является обязательным, приходится применять барокамеры с регулируемым давлением. Обычно в этих камерах можно одновременно регулировать влажность и температуру.

2. Исключение систематических погрешностей в процессе измерения.

Исключению таким путем поддаются в основном инструментальные погрешности, погрешности от установки и погрешности от внешних влияний.

Характерным для рассматриваемых ниже способов устранения погрешностей в процессе измерения является необходимость проведения повторных измерений, поэтому они применимы в основном при измерениях стабильных параметров и явлений.

Способ замещения заключается в том, что измеряемый объект заменяют известной мерой, находящейся при этом в тех же условиях, в каких находился он сам.

Пример: объект, электрическое сопротивление, индуктивность или емкость которого требуется измерить, включают в измерительную цепь. В большинстве случаев при этом пользуются нулевыми методами (мостовые, компенсационные и др.), при которых производится электрическое уравновешивание цепи. После уравновешивания вместо измеряемого объекта, не изменяя схемы, включают меру переменного значения: магазин сопротивления, емкости, индуктивности, переменный конденсатор или индуктивность. Изменяя их значение, добиваются восстановления равновесия цепи. В этом случае способ замещения позволяет исключить остаточную неуравновешенность мостовых цепей, влияние на цепь магнитных и электрических полей, взаимные влияния отдельных элементов цепи, а также утечек и других паразитных явлений.

Способ компенсации погрешности по знаку заключается в том, что измерения следует проводить таким образом, чтобы погрешность в результате измерений вошла один раз с одним знаком, другой раз – с противоположным. Погрешность исключается при вычислении среднего значения.

Способ противопоставления заключается в том, что измерения проводят два раза, причем так, чтобы причина, вызывающая погрешность, при первом измерении оказала противоположное действие на результат второго.

Способ введения поправок основан на знании систематической погрешности и закономерности ее изменения. В этом случае в результат измерения, содержащий систематические погрешности, или в показания прибора вносят поправки, равные этим погрешностям, но с обратным знаком.

Специальные статистические способы обнаружения систематических погрешностей:

1. Способ последовательных разностей (критерий Аббе) применяется для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности и состоит в следующем.

Отношение

$$\nu = \frac{Q^2(n)}{\sigma^2(n)} \tag{1.6}$$

является критерием для обнаружения систематических погрешностей, где

$$Q^2(n) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2, \tag{1.7}$$

$$\sigma^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{1.8}$$

Это две оценки дисперсии (среднего квадратического отклонения) результатов наблюдений: обычным способом и вычислением суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_i - x_{i-1})$. Отсюда и название метода.

Критическая область для критерия Аббе определяется как:

$$P(\nu < \nu_q) = q, \tag{1.9}$$

где $q$=1-$P$ – уровень значимости;

$P$ – доверительная вероятность;

$\nu_q$ – табличное значение критерия Аббе.

Если полученное значение критерия Аббе меньше $\nu_q$, то обнаруживается систематическая погрешность результатов измерений.

2. Дисперсионный анализ (критерий Фишера) позволяет выяснить наличие систематической погрешности результатов наблюдений, обусловленной влиянием какого-либо постоянно действующего фактора, или определить, вызывают ли изменения этого фактора систематическую погрешность.

В данном случае проводят многократные измерения, состоящие из достаточного числа серий, каждая из которых соответствует различным значениям влияющего фактора. Влияющими факторами, по которым производится объединение результатов наблюдений по сериям, могут быть внешние условия (температура, давление), временная последовательность проведения измерений и т.п.

После проведения $N$ измерений их разбивают на $s$ серий $(s>3)$ по $n_j$ результатов наблюдений в каждой серии и затем устанавливают, имеется или отсутствует систематическое расхождение между результатами наблюдений в различных сериях.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей в данном случае является дисперсионный критерий Фишера:

$$F = \frac{\sigma^2_{мс}}{\sigma^2_{вс}}, \qquad (1.10)$$

где $\sigma^2_{мс}$ – межсерийная дисперсия, выражает силу действия фактора, вызывающего систематические различия между сериями;

$\sigma^2_{вс}$ – внутрисерийная дисперсия, характеризует случайные погрешности измерений, обуславливающие различия (отклонения результатов наблюдений) внутри серии.

Критическая область для критерия Фишера соответствует $P(F > F_q) = q$. ($F_q$ – табличное значение критерия Фишера для уровня значимости $q$, числа измерений $N$ и числа серий $s$).

Для определения $F_q$ необходимо вычислить $f_2 = N\text{-}s$ и $f_1 = s\text{-}1$. Причем, $f_2$ – это число степеней свободы большей дисперсии, $f_1$ – число степеней свободы меньшей дисперсии.

Если полученное значение критерия Фишера больше $F_q$, то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов наблюдений по сериям отвергается, т.е. обнаруживается систематическая погрешность, вызываемая тем фактором, по которому группировались результаты наблюдений.

Дисперсионный анализ (критерий Фишера) является наиболее эффективным и достоверным, так как позволяет не только установить факт наличия погрешности, но и дает возможность проанализировать источники ее возникновения.

## 1.3 Случайные погрешности. Вероятностное описание случайных погрешностей

*Случайные погрешности* – это погрешности, которые могут меняться произвольным образом при последовательном измерении одной и той же величины.

Случайные погрешности вызываются большим числом неконтролируемых причин, влияющих на процесс измерения. Такие причины могут быть объективными (неровности на поверхности измеряемого предмета; дуновение воздуха, ведущее к изменению температуры; скачкообразное изменение напряжения электрической сети и т.п.) и субъективными (разная сила зажима предмета между ножками штангенциркуля, неодинаковое расположение глаза по отношению к шкале прибора, различное запаздывание при включении секундомера и т.п.).

1. Инструментальные погрешности проявляются во многих случаях, например, при считывании показания по шкале, если шкала и стрелка не находятся в одной плоскости; в свою очередь, полученные данные зависят от угла, под которым человек смотрит на шкалу (так называемые погрешности параллакса). Также такие погрешности появляются из-за неопределенности, которая существует при оценке показаний прибора, когда стрелка находится между маркерами шкалы.

2. Погрешности из-за влияния окружающей среды возрастают в результате изменения окружающих условий (температура, электромагнитное воздействие).

3. Стохастические погрешности появляются в результате стохастических процессов, таких как шум.

Закономерности, описывающие поведение случайных величин, изучаются теорией вероятностей. Под *вероятностью* подразумевается отношение числа случаев, удовлетворяющих какому-либо условию, к общему числу случаев, если общее число случаев очень велико (стремится к бесконечности). Максимальное значение вероятности равно единице (все случаи удовлетворяют заданному условию). При описании случайных погрешностей обычно используются следующие предположения.

1. Погрешности могут принимать непрерывный ряд значений.

2. Большие отклонения измеренных значений от истинного значения измеряемой величины встречаются реже (менее вероятны), чем малые.

3. Отклонения в обе стороны от истинного значения равновероятны.

Эти предположения справедливы не всегда. Опыт, однако, показывает, что все же в подавляющем большинстве случаев они выполняются достаточно хорошо.

Случайные погрешности рассчитываются с помощью формул математической статики и бывают:

1. *Погрешности отдельных измерений*.

За меру погрешности значения $y_i$, полученного при отдельном измерении, принимают разность между этим значением и истинным значением $y$. Но, так как истинное значение $y$ неизвестно, то вместо него берут среднее арифметическое $\bar{y}$ серии измерений. Разности:

$$\begin{gathered} \Delta y_1 = y_1 - \bar{y}, \\ \Delta y_2 = y_2 - \bar{y} \\ \dots \\ \Delta y_n = y_n - \bar{y}, \end{gathered} \tag{1.11}$$

будем называть абсолютными погрешностями отдельных измерений.

Среди погрешностей $\Delta y_1$, $\Delta y_2$, ..., $\Delta y_n$ встречаются как положительные, так и отрицательные.

2. *Средняя квадратичная* – это сумма квадратов погрешностей, деленная на количество рассматриваемых измерений n

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2}{n}}. \qquad (1.12)$$

Здесь $n$ – число измеренных значений. Заметим, что для случая, когда проведено лишь одно измерение ($n$ = 1), формула неприменима, и для оценки погрешности следует пользоваться другими соображениями. Одним измерением ограничиваются, если заведомо известно, что приборная погрешность значительно превышает случайную.

Стандартное отклонение имеет следующий смысл. При большом числе измерений вероятность того, что модуль значения $\Delta y_i$ не превышает $\sigma_i$ или, что то же самое, что значение $y_i$ лежит в пределах от $\bar{y} - \sigma_i$ до $\bar{y} + \sigma_i$, составляет 0,67≈2/3. Иначе говоря, если величина $y$ измерена, например, 100 раз, то около 67 случаев будет таких, что $\bar{y} - \sigma_i < y_i < \bar{y} + \sigma_i$.

3. *Вероятная погрешность*:

$$\rho = \pm 0{,}6745\sigma. \qquad (1.13)$$

4. *Мода* – это наиболее часто получаемое значение измеряемой величины. Если частотное распределение симметрично, то мода и среднее значение будут равны. В случае несимметричности распределения эти величины будут различны.

5. *Медиана* – это значение, которое делит частотное распределение на две равные площади. В случае симметричности распределения медиана будет равна среднему значению.

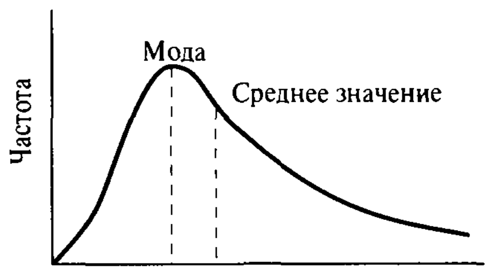



Рисунок 1.2 – Среднее значение и мода

6. *Среднее арифметическое* – это сумма всех результатов измерений, деленная на количество рассматриваемых измерений $n$:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \qquad (1.14)$$

Пусть при измерении физической величины $y$ получено $n$ значений: $y_1$, $y_2$, ..., $y_i$, ..., $y_n$ . Предполагается, что среднее арифметическое этих значений стремится к истинному значению измеряемой величины, если $n$ стремится к бесконечности. При конечном числе измерений среднее арифметическое представляет собой *наиболее вероятное значение* измеряемой величины.

Теория вероятностей позволяет оценить возможное отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины.

### 1.4 Доверительная вероятность и доверительный интервал. Грубые погрешности и методы их исключения

Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит внутри некоторого интервала, называется *доверительной вероятностью*, или *коэффициентом надежности*, а сам интервал – *доверительным интервалом*.

Каждой доверительной вероятности соответствует свой доверительный интервал. В частности, доверительной вероятности 0,67 соответствует доверительный интервал от $y - \sigma_{\bar{y}}$ до $y + \sigma_{\bar{y}}$. Однако это утверждение справедливо только при достаточно большом числе измерений (более 10), да и вероятность 0,67 не представляется достаточно надежной – примерно в каждой из трех серий измерений $y$ может оказаться за пределами доверительного интервала. Для получения большей уверенности в том, что значение измеряемой величины лежат внутри доверительного интервала, обычно задаются доверительной вероятностью 0,95 – 0,99. Доверительный интервал для заданной доверительной вероятности $y$ с учетом влияния числа измерений $n$ можно найти, умножив стандартное отклонение среднего арифметического на так называемый коэффициент Стьюдента. Коэффициенты Стьюдента $t_{an}$ для ряда значений $y$ и $n$ приведены в таблице.

Окончательно, для измеряемой величины $y$ при заданной доверительной вероятности $\alpha$ и числе измерений $n$ получается условие

$$\bar{y} - t_{an}\sigma_{\bar{y}} < y < \bar{y} + t_{an}\sigma_{\bar{y}}. \qquad (1.15)$$

Величину $\Delta y_{сл} = t_{an}\sigma_{\bar{y}}$ мы будем называть *случайной погрешностью* величины $y$.

*Промахи (грубая погрешность)* – грубые погрешности, связанные с ошибками оператора или неучтенными внешними воздействиями. Их обычно исключают из результатов измерений. Промахи, как правило, вызываются невнимательностью (например, при измерении диаметра отверстия штангенциркулем часто забывают учесть толщину его ножек). Они могут возникать также вследствие неисправности прибора. От промахов не застрахован никто, однако по мере приобретения экспериментальных навыков вероятность промахов заметно уменьшается.

Источником грубых погрешностей нередко бывают резкие изменения условий измерения и ошибки, допущенные оператором. К ним можно отнести:

– неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;

– неправильная запись результата наблюдений, значений отдельных мер использованного набора, например гирь;

– хаотические изменения параметров напряжения, питающего средство измерения, например, его амплитуды или частоты.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез.

Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения $x_i$ не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью $q$ (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений. Обычно проверяют наибольшее и наименьшее значения результатов измерений. Для проверки гипотез используются следующие критерии.

*Критерий «трех сигм»* применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. Данный критерий надежен при числе измерений $n > 20... 50$.

По этому критерию считается, что результат маловероятен и его можно считать промахом, если:

$$|\bar{x} - x_i| > 3\sigma , \qquad (1.16)$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое отдельных результатов измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (1.17)$$

где $n$ – число измерений;

$x_i$ – результат $i$-го измерения;

$\sigma$ – среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} . \qquad (1.18)$$

Величины $\bar{x}$ и $\sigma$ вычисляют без учета экстремальных (вызывающих подозрение) значений $x_i$.

*Критерий Романовского* применяется, если число измерений $n < 20$.

При этом вычисляется отношение:

$$\frac{|\bar{x} - x_i|}{\sigma} = \beta . \tag{1.19}$$

и сравнивается с критерием $\beta_m$, выбранным по таблице.

Величины $\bar{x}$ и $\sigma$ вычисляют без учета экстремальных (вызывающих подозрение) значений $x_i$.

Если $\beta > \beta_m$, то результат $x_i$ считается промахом и отбрасывается.

*Вариационный критерий Диксона* удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок).

При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный (упорядоченный по возрастанию) ряд $x_1$, $x_2$, …, $x_n$. Причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Критерий Диксона определяется как:

$$K_Д = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} . \tag{1.20}$$

Критическое условие для этого критерия: $K_Д > z_q$.

*Критерии Шовине.* Этот критерий может быть использован, если число измерений $n < 10$.

В этом случае грубой ошибкой (промахом) считается результат $x_i$, если разность $|\bar{x} - x_i|$ превышает значения $\sigma$, определяемые в зависимости от числа измерений:

$$|\bar{x} - x_i| > \begin{cases} 1{,}6\sigma \; при \; n = 3 \\ 1{,}7\sigma \; при \; n = 6 \\ 1{,}9\sigma \; при \; n = 8 \\ 2{,}0\sigma \; при \; n = 10. \end{cases} \tag{1.21}$$

## 1.5 Генеральная и выборочная совокупность. Статистический ряд. Статистический закон распределения случайной величины. Эмпирическая функция распределения

Пусть для исследования закономерностей случайного явления произведено $n$ опытов, в результате которых получен ряд наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется обработать этот ряд статистически. Для обработки экспериментальных данных статистически необходимо построить математическую модель ряда наблюдений с указанием случайности (не случайности), зависимости (независимости) и т. д. величин.

Для оценки основных статистических особенностей данного ряда наблюдений необходимо оценить функцию распределения $F(x)$ исследуемой случайной величины $X$, то есть построить уточненную вероятностную модель ряда наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Наиболее точные сведения о случайной величине $X$ можно получить, производя максимально возможное количество измерений этой случайной величины.

*Генеральной совокупностью* называется совокупность всех наблюдений, которые могли бы быть сделаны при данном реальном комплексе условий измерений. Число членов, входящих в генеральную совокупность, называют *объемом генеральной совокупности.*

Метод, состоящий в том, что на основании характеристик и свойств выборки $x_1$ $x_2, \ldots, x_n$ делаются заключения о числовых характеристиках и законе распределения случайной величины $X$, называется *выборочным методом.*

Для обеспечения объёктивности закона распределения случайной величины $X$ необходимо обеспечить репрезентативность (представительность) выборки.

Предположим, что изучается дискретная или непрерывная случайная величина, закон распределения которой неизвестен. Для оценки закона распределения этой случайной величины и его числовых характеристик производится ряд независимых измерений $x_1$ $x_2, \ldots, x_n$. Статистический материал представляют в виде таблицы, состоящей из двух строк, в первой из которых представлены номера измерений, а во второй – результаты измерений (таблица 1.1).

Представление экспериментальных данных в виде таблицы 1 называют *простым статистическим рядом*.

Таблица 1.1 – Простой статистический ряд

| $i$ – номер измерения | 1 | 2 | 3 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ – результат измерений | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |

Для объективной оценки закона распределения случайной величины $X$ производят группировку данных. Измеренные значения дискретной случайной величины $X$ располагают в порядке возрастания и подсчитывают частоты $m_i$ или частости $m_i/n$ появления одинаковых значений случайной величины $X$.

Сгруппированные статистические ряды представляются в виде таблиц 1.2, 1.3.

Таблица 1.2 – Сгруппированный статистический ряд

<table>
<tr><td>$x_i$ – результат измерений</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>$x_3$</td><td>…</td><td>$x_n$</td><td rowspan="2">$\sum_{i=1}^{n} m_i = n$</td></tr>
<tr><td>$m_i$ – частота</td><td>$m_1$</td><td>$m_2$</td><td>$m_3$</td><td>…</td><td>$m_n$</td></tr>
</table>

Таблица 1.3 – Сгруппированный статистический ряд

<table>
<tr><td>$x_i$ – результат измерений</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>$x_3$</td><td>…</td><td>$x_n$</td><td rowspan="2">$\sum_{i=1}^{n} m_i / n = 1$</td></tr>
<tr><td>$m_i/n$ – частости</td><td>$m_1/n$</td><td>$m_2/n$</td><td>$m_3/n$</td><td>…</td><td>$m_k/n$</td></tr>
</table>

Если изучается непрерывная случайная величина, то группировка заключается в разбиении интервала наблюденных значений случайной величины на $k$ частичных интервалов равной длины $[x_0; x_1[, [x_1; x_2[, [x_2; x_3[, ....... [x_{k-1}; x_k]$ и подсчете частоты или частости $m_i/n$ попадания наблюденных значений в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно в диапазоне *[5;15]*.

Длины $h$, середины $z_i$ и концы интервалов $x_i$ определяются на основе использования следующих соотношений:

$$h = \frac{x_k - x_0}{k}, \quad x_i = x_0 + (i-1)h, \quad z_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \qquad (1.22)$$

В результате составляется интервальный статистический ряд следующего вида:

Таблица 1.4 – Интервальный статистический ряд

| $[x_{i-1}; x_i]$ – частные интервалы измерений | $[x_0; x_1[$ | $[x_1; x_2[$ | $[x_2; x_3[$ | … | $[x_{k-1}; x_k]$ | $\sum_{i=1}^{k} m_i / n = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i/n$ – частости | $m_1/n$ | $m_2/n$ | $m_3/n$ | … | $m_k/n$ | |

Перечень измеренных значений дискретной случайной величины $X$ (или интервалов наблюденных значений) и соответствующих им частостей $m_i/n$ называется *статистическим законом распределения случайной величины.*

Статистические законы позволяют визуально произвести оценку закона распределения исследуемой случайной величины.

Для наглядности сгруппированные статистические ряды представляют в виде графиков и диаграмм. Наиболее распространенными графиками являются полигон и гистограмма. Полигон применяется для изображения как дискретных, так и интервальных статистических рядов, гистограмма – для изображения только интервальных рядов.

Гистограмма частости стоится следующим образом. На оси абсцисс откладываются частичные интервалы измеренных значений дискретной случайной величины $X$, на каждом из которых строится прямоугольник, площадь которого равна частости $m_i/n$ данного частичного интервала. Высота элементарного прямоугольника равна $m_i / nh$.

Если на гистограмме частостей соединить середины верхних сторон прямоугольников, то полученная замкнутая ломаная линия образует полигон распределения частостей.

*Эмпирической функцией распределения* случайной величины $X$ называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения $x$ частость события $(X < x)$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (1.23)$$

где $n_x$ – число $x_i$, меньших $x$;

$n$ – объем выборки.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ обладает следующими свойствами:

1. Значения эмпирической функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0; 1]$.

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если $x_1$ – наименьшее, а $x_n$ – наибольшее наблюденное значение, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$.

Основное значение эмпирической функции распределения заключается в том, что она используется в качестве оценки функции распределения $F(x) = P(X < x)$.

## 1.6 Нормальное распределение случайных величин. Точечные оценки параметров нормального распределения

Нормальная модель распределения вероятностей играет исключительно важную роль. Главная особенность нормального распределения состоит в том, что оно является предельным, к которому приближаются другие распределения при соблюдении некоторых условий.

Нормальные распределения часто встречаются на практике в самых различных областях. Принято считать, что практически все результаты и ошибки измерений при представлении их в виде случайных величин имеют нормальное распределение.

Нормальное распределение задается функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.24)$$

где $a$ – математическое ожидание случайной величины $X$, т.е. $M(X) = a$; $\sigma$ – среднее квадратичное отклонение случайной величины $X$, т.е. $\sqrt{D(X)} = \sigma$;

$D(X)$ – дисперсия случайной величины.

Нормальная модель распределения вероятностей зависит от двух параметров $a$ и σ, поэтому ее называют двухпараметрической моделью распределения.

Если случайная величина $X$ имеет нормальное распределение с параметрами $a$ и σ, то этот факт кратко записывают следующим образом: СВ $X \in N(a,\sigma)$.

График функции плотности вероятности называют нормальной кривой или кривой Гаусса. Она обладает следующими свойствами:

1. Функция $f(x)$ определена при всех $X \in R$.

2. Кривая нормального распределения симметрична относительно прямой $x = a$.

3. Кривая Гаусса имеет максимум в точке $x = a$:

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (1.25)$$

4. Кривая Гаусса имеет две точки перегиба: $x_1 = a - \sigma$ и $x_2 = a + \sigma$.

5. Площадь, заключенная между кривой Гаусса и осью абсцисс, равна 1; между осью абсцисс, кривой Гаусса и прямыми $a \pm 2\sigma$ – около 0,95.

6. При увеличении (уменьшении) параметра $\sigma$ максимальная ордината уменьшается (увеличивается). Другими словами, параметр $\sigma$ характеризует форму кривой, при неизменном положении центра кривой: если $\sigma$ увеличивается, то кривая становится плоско – вершинной, если σ уменьшается – кривая Гаусса вытягивается вверх. Параметр $\sigma$ иногда называют параметром масштаба (рисунок 1.3).

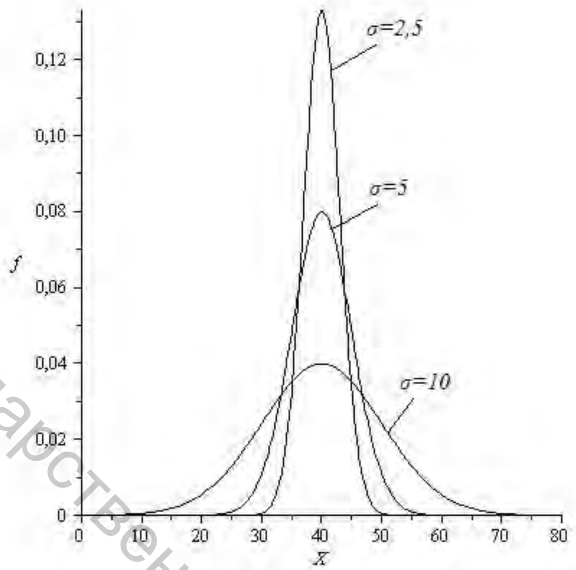



Рисунок 1.3 – Нормальное распределение случайной величины $X$ при различных значениях параметра σ и постоянном значении параметра $a$

7. Если изменять параметр $\boldsymbol{a}$ при неизменном $\boldsymbol{\sigma}$, то кривая Гаусса будет смещаться вдоль оси абсцисс, то есть параметр $\boldsymbol{a}$ характеризует положение кривой при неизменной форме. Иногда параметр $\boldsymbol{a}$ называют параметром сдвига (рисунок 1.3).

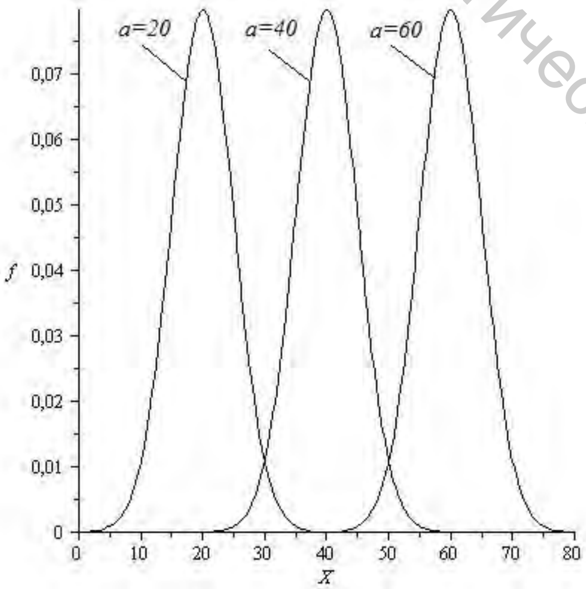



Рисунок 1.4 – Нормальное распределение случайной величины $X$ при различных значениях параметра а и постоянном значении параметра $\sigma$

Если *СВ* $X \in N(a,\sigma)$, то случайная величина $U = \dfrac{x-a}{\sigma}$ имеет нормальное распределение с параметром $a = 0$ и $\sigma = 1$, то есть $U \in N\,(0,1)$.

Поэтому случайную величину $U = \dfrac{x-a}{\sigma}$ называют *нормированной или стандартизованной нормальной величиной*. Плотность распределения вероятностей нормированной случайной величины $U$ имеет вид:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}. \qquad (1.26)$$

Функция распределения *СВ* $X \in N\,(a,\sigma)$ имеет следующий вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx. \qquad (1.27)$$

Функция распределения нормализованной случайной величины $U$:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (1.28)$$

Для облегчения вычислений вводится функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \qquad (1.29)$$

Вероятность попадания *СВ* $X \in N(a,\sigma)$ в интервал $]\alpha,\ \beta[$ определяется следующими выражениями:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \to P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right). \qquad (1.30)$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ находятся по таблице.

Пусть *СВ* $X$ распределена по нормальному закону: $X \in N(a,\sigma)$. Параметры $a$ и $\sigma$ неизвестны. С целью их определения производится эксперимент, в результате которого фиксируется $n$ значений случайной величины $X$: $x_1\, x_2, \ldots, x_n$.

По результатам выборки, какого бы большого размера она ни была, нельзя определить точные значения неизвестных параметров $a$ и $\sigma$, но можно найти их приближенные значения $\hat{a}, \hat{\sigma}$, которые называются *оценками*.

Для нахождения приближенных значений $\hat{a}, \hat{\sigma}$, неизвестных параметров $a$ и σ нормального закона рассматриваются функции вида: $\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые называются *выборочными функциями или статистиками*.

Задача оценки неизвестных параметров $a$ и $\sigma$ сводится к нахождению таких статистик $\hat{a}=\hat{a}(x_1,x_2,...,x_n)$, $\hat{\sigma}=\hat{\sigma}(x_1,x_2,...,x_n)$, которые могут быть использованы для приближенного определения значений неизвестных параметров $a$ и $\sigma$.

Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные. Точечная оценка параметра $\theta$ (где под $\theta$ будем понимать либо $a$, либо $\sigma$) определяется одним числом $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,...,x_n)$, интервальная оценка – двумя числами $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ – концами интервала, накрывающего оцениваемый параметр $\theta$.

Точечные оценки СВ $X \in N(a,\sigma)$, неизвестных параметров $a$ и σ находятся по следующим формулам:

$$\hat{a}=M(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}\,;\;\hat{\sigma}=S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\,. \qquad (1.31)$$

Эти оценки обладают свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности.

## 1.7 Критерий согласия $\chi^2$

Пусть выдвинута гипотеза о множестве функций определенного вида (нормальных, показательных, биномиальных и т. п.), к которому может принадлежать функция распределения исследуемой случайной величины $X$. Критерий $\chi^2$ Пирсона позволяет производить проверку согласия эмпирической функции распределения $F^*(x)$ с гипотетической функцией распределения $F(x)$.

Проверка осуществляются следующим образом:

1. На основании гипотетической функции $F(x)$ вычисляют вероятность попадания *СВ X* в частичные интервалы $[x_{i-1};\, x_i[$:

$$p_i=P(x_{i-1}\le X<x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})=\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{S}\right)-\Phi\left(\frac{x_{i-1}-\bar{x}}{S}\right);\; i=1,2,\dots,k. \qquad (1.32)$$

2. Умножая полученные вероятности $p_i$ на объем выборки $n$, получают теоретические частоты $np_i$ частичных интервалов $[x_{i-1};\, x_i[$, т. е. частоты, которые следует ожидать, если гипотеза справедлива.

3. Вычисляют выборочную статистику (критерий) $\chi^2$:

$$\chi^2_{набл.}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}. \qquad (1.33)$$

4. По таблицам квантилей $\chi^2$-распределения по заданному уровню значимости $\alpha$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ ($k$ – число частичных интервалов, $r$ – число параметров гипотетической функции $F(x)$, оцениваемых по данным выборки (для нормального закона распределения $r$ = 2) находят

критическое значение $\chi^2_{a,v}$ .

Если $\chi^2_{набл.} \geq \chi^2_{\alpha,v}$ то считается, что гипотетическая функция *F(x)* не согласуется с результатами эксперимента. Если $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{\alpha,v}$, то считается, что гипотетическая функция *F(x)* согласуется с результатами эксперимента.

<u>Замечание.</u> При применении критерия $\chi^2$ необходимо, чтобы в каждом частичном интервале было не менее 5 элементов. Если число элементов (частота) меньше 5, то рекомендуется объединять такие частичные интервалы с соседними.

## ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №1

Прибором было 30 раз измерено одно и то же значение величины *x*. Каждому студенту в соответствии со своим номером варианта требуется:

1. Выявить наличие систематических погрешностей результатов измерений.
2. Найти наиболее вероятное значение измеряемой величины, абсолютную и относительную погрешности каждого измерения, среднюю квадратичную, вероятную и предельную погрешности.
3. Проверить гипотезу о нормальном распределении результатов наблюдений.
4. Выявить грубые погрешности (промахи).
5. Определить доверительные интервал.

При выполнении работы принять уровень значимости $a$ = 0,05, отрезок *[24,5; 54,5]*, число интервалов $k$ = 10. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 1.5. $i$-му варианту соответствуют элементы выборки, расположенные в 3-х следующих строчках таблицы, начиная с $i$-й (объем выборки при этом $n$ = 30).

Таблица 1.5 – Варианты заданий

| № строки | Элементы выборки | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | | | | |
| 1 | 48 | 39 | 43 | 44 | 34 | 34 | 32 | 43 | 40 | 46 |
| 2 | 25 | 31 | 34 | 49 | 39 | 37 | 45 | 49 | 31 | 49 |
| 3 | 43 | 46 | 34 | 35 | 42 | 32 | 41 | 34 | 42 | 42 |
| 4 | 38 | 40 | 46 | 47 | 34 | 42 | 38 | 40 | 38 | 36 |
| 5 | 30 | 43 | 41 | 40 | 40 | 35 | 35 | 41 | 38 | 45 |
| 6 | 37 | 42 | 38 | 36 | 44 | 39 | 32 | 48 | 43 | 39 |
| 7 | 43 | 30 | 32 | 36 | 42 | 34 | 49 | 48 | 49 | 50 |
| 8 | 37 | 30 | 44 | 48 | 44 | 35 | 45 | 34 | 33 | 41 |
| 9 | 43 | 45 | 50 | 34 | 33 | 39 | 41 | 39 | 46 | 31 |
| 10 | 40 | 52 | 44 | 39 | 35 | 45 | 33 | 42 | 42 | 36 |
| 11 | 44 | 51 | 45 | 39 | 34 | 44 | 40 | 37 | 43 | 32 |

Окончание таблицы 1.5

| 1 | 2 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 33 | 42 | 40 | 35 | 37 | 43 | 48 | 48 | 50 | 32 |
| 13 | 40 | 48 | 45 | 43 | 36 | 36 | 42 | 40 | 37 | 30 |
| 14 | 44 | 50 | 46 | 39 | 41 | 48 | 44 | 42 | 36 | 51 |
| 15 | 44 | 50 | 47 | 37 | 33 | 34 | 42 | 43 | 43 | 47 |
| 16 | 33 | 48 | 38 | 42 | 45 | 32 | 34 | 44 | 39 | 45 |
| 17 | 48 | 26 | 31 | 34 | 38 | 36 | 46 | 49 | 40 | 48 |
| 18 | 42 | 47 | 35 | 34 | 41 | 33 | 41 | 35 | 43 | 42 |
| 19 | 39 | 37 | 47 | 47 | 33 | 42 | 37 | 39 | 39 | 37 |
| 20 | 43 | 41 | 30 | 39 | 38 | 36 | 36 | 34 | 42 | 46 |
| 21 | 39 | 44 | 37 | 35 | 43 | 38 | 33 | 47 | 45 | 38 |
| 22 | 37 | 48 | 38 | 52 | 40 | 45 | 44 | 42 | 38 | 40 |
| 23 | 44 | 46 | 37 | 34 | 41 | 37 | 41 | 39 | 30 | 38 |
| 24 | 32 | 41 | 48 | 36 | 51 | 36 | 33 | 39 | 45 | 40 |
| 25 | 34 | 41 | 38 | 34 | 33 | 27 | 51 | 45 | 27 | 38 |
| 26 | 42 | 37 | 46 | 41 | 47 | 36 | 30 | 45 | 41 | 40 |
| 27 | 37 | 37 | 39 | 42 | 48 | 41 | 36 | 39 | 33 | 47 |
| 28 | 43 | 49 | 27 | 31 | 41 | 46 | 40 | 36 | 36 | 42 |
| 29 | 41 | 46 | 33 | 37 | 47 | 35 | 31 | 29 | 30 | 36 |
| 30 | 48 | 38 | 37 | 34 | 40 | 34 | 36 | 50 | 48 | 39 |
| 31 | 30 | 38 | 43 | 41 | 44 | 45 | 38 | 37 | 46 | 50 |
| 32 | 41 | 48 | 41 | 43 | 47 | 37 | 42 | 34 | 32 | 44 |
| 33 | 37 | 48 | 46 | 41 | 41 | 37 | 37 | 48 | 49 | 46 |

## 2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### 2.1 Общие сведения и характеристики измерительных преобразователей

Измерительный преобразователь (ИП) можно определить как техническое устройство, построенное на определенном физическом принципе действия, выполняющее одно частное измерительное преобразование.

*Измерительное преобразование* представляет собой отражение размера одной физической величины размером другой физической величины, функционально с ней связанной.

Характеристики измерительных преобразователей можно в общем случае разделить на статические и динамические.

*Статические характеристики* определяют поведение ИП в таких условиях, когда входная величина не подвергается изменениям в процессе преобразования. К ним относятся функция преобразования, чувствительность, статическая погрешность и др.

Ф*ункция (характеристика) преобразования* – функциональная зависимость выходной величины от входной, которая может быть задана аналитической зависимостью, графиком или таблицей. Обычно стремятся получить линейную функцию преобразования.

В реальных условиях функция преобразования любого ИП не остается строго неизменной, так как она зависит от режима работы преобразователя, влияния внешних условий, условий нагрузки и ряда случайных факторов. Поэтому различают номинальную и реальную функции преобразования ИП.

*Номинальная функция преобразования* ИП – $y_н = f_н(x)$ – функция, которую должен иметь ИП согласно государственным стандартам, ТУ или другим нормативным документам. Часто в качестве номинальной принимается средняя характеристика, полученная по результатам градуировки серии ИП. Эта характеристика (функция) указывается в паспорте на ИП.

При градуировке серии однотипных преобразователей функции преобразования каждого ИП могут отличаться от паспортной (номинальной), образуя полосу неопределенности.

*Реальная функция преобразования* $y_р = f_р(x)$ – функция, которую имеет ИП в действительности.

*Погрешность ИП* – это разность между номинальной и реальной характеристикой преобразования ИП.

*Чувствительность преобразователя* – это показатель относительного наклона характеристики преобразования. Для линейной функции чувствительность $S = \Delta Y/\Delta X$ ($\Delta Y$ и $\Delta X$ – изменение выходной величины $Y$ и вызвавшее его изменение входной величины $X$). Для нелинейной функции преобразования $Y = f(X)$ чувствительность может быть определена для данного значения входной величины $S = dY/dX$. От чувствительности следует отличать *порог чувствительности*, который характеризует минимальное значение входной величины, уверенно обнаруживаемое с помощью данного ИП.

*Динамические характеристики* – характеристики инерционных СИ, которые определяют зависимость входного сигнала СИ от меняющихся во времени величин: параметров входного сигнала, внешних влияющих величин, нагрузки.

Динамические нагрузки определяют динамическую погрешность. Динамический учет всех факторов затруднен.

К динамическим характеристикам относятся: передаточная характеристика (передаточная функция), переходная характеристика, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), фазочастотная характеристика (ФЧХ).

## 2.2 Реостатные преобразователи

Реостатные преобразователи представляют собой регулируемые омические сопротивления специального изготовления. Естественной входной величиной реостатного ИП является перемещение (линейное или угловое), выходной – сопротивление.

По конструкции реостатные ИП можно разбить на три группы:

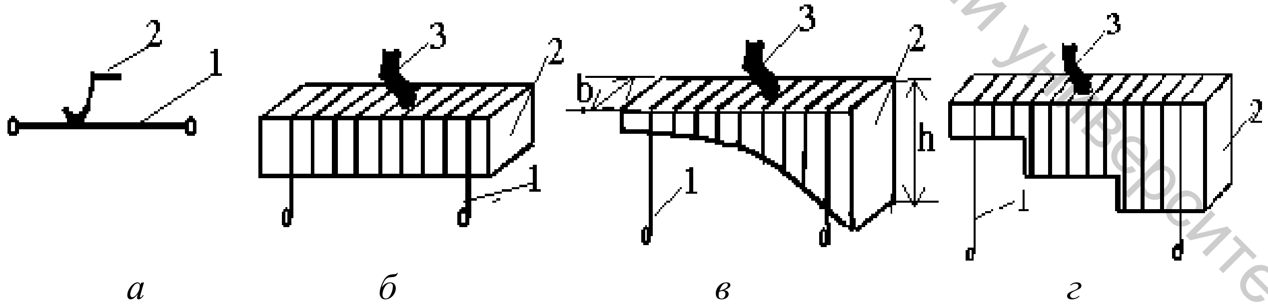
1) реохордные ИП;

2) ИП со ступенчатой характеристикой;

3) нелинейные ИП.

Реохордные преобразователи (рисунок 2.1 а) представляют собой натянутую проволоку 1, по которой перемещается движок 2. Характеристика преобразования такого ИП линейная.

Реостатные ИП со ступенчатой характеристикой выполняются из провода 1 диаметром 0,02 – 0,1 мм, намотанного с равномерным шагом на каркас 2, по которому перемещается подвижная токосъемная щетка 3 (движок) (рисунок 2.1 б).




*а* *б* *в* *г*

Рисунок 2.1 – Реостатные преобразователи

Число витков реостатного ИП обычно не менее 100.

Каракасы могут выполняться в виде пластин, цилиндра, кольца и др.

Изменение сопротивления реостатного преобразователя при перемещении подвижного контакта достигает 90 % от номинального сопротивления.

Выходное сопротивление R реостатного преобразователя в зависимости от перемещения движка X может быть определено из выражения:

$$R = \int R_1 n_0 p dx, \qquad (2.1)$$

где $R_1$ – сопротивление одного метра провода;

$n_0$ – число витков на единицу длины преобразователя;

p – периметр каркаса.

Нелинейные реостатные ИП можно получить, выбирая соответствующую форму каркаса (рисунок 2.1 в). Например, для получения определенной нелинейной зависимости можно применить фигурные каркасы, сечение которых изменяется по длине, а толщина b каркаса остается постоянной. Для заданной характеристики f(x) переменная высота намотки h этого преобразователя находится по формуле:

$$h = \frac{q}{2\rho n_0} \frac{df(x)}{dx} \cdot b, \qquad (2.2)$$

где $q$ – сечение провода;

$\rho$ – удельное сопротивление материала провода.

Нелинейную зависимость позволяют получить преобразователи со ступенчатым каркасом (рисунок 2.1 г). Такое выполнение каркаса обеспечивает кусочно-линейную аппроксимацию требуемой зависимости.

Для изготовления реостатных ИП используются провода из манганина, константана, нихрома, фехраля. Использование микропровода позволяет получить реостатные ИП размером 5 х 5*мм*. В ответственных случаях используются провода из сплава платины с иридием (90% Pt + 10% Ir). Каркасы выполняются из текстолита, пластмассы, алюминия. Движок (щетка) выполняется либо из двух-трех проволочек из сплава платины с иридием или с бериллием, или в виде пластинчатых щеток из серебра или фосфористой бронзы.

Погрешности реостатных преобразователей:

1. Погрешность дискретности (квантования).

Сопротивление большинства реостатных ИП изменяется ступенчато (кроме реохордных), что приводит к погрешности дискретности (квантования). Погрешность дискретности определяется по формуле:

$$\gamma = \frac{R_1}{2R} = \frac{1}{2n}, \qquad (2.3)$$

где $R_1$ – сопротивление одного витка;

$R$ – полное сопротивление ИП;

$n$ – число витков.

Реально полоса неопределенности реостатного ИП определяется не только погрешностью квантования, но и шумом, «генерируемым» движком при его движении (вариации контактного сопротивления, временное разъединение движка и контактной дорожки, ЭДС трения и т. д.). В целом погрешность нуля реостатных ИП равна ± (2/$n$ - 1/$n$).

2. Температурная погрешность

При изменении температуры преобразователя изменяется его сопротивление. Величина температурной погрешности определяется, прежде всего, температурным коэффициентом сопротивления материала чувствительного элемента. Обычно ТКС материалов провода реостатного ИП не превышает 0,1 % на $10^{O}C$.

Области применения реостатных ИП

Реостатные преобразователи применяются для измерения линейных и угловых перемещений и величин с ними связанных (давлений, сил, уровней и т.д., а также в качестве обратных преобразователей автоматических мостов и компенсаторов).

## 2.3 Измерительные цепи резистивных ИП

Для измерения выходного параметра резистивных ИП может быть использована любая цепь, предназначенная для измерения сопротивления. Питание измерительной цепи может осуществляться как на постоянном, так и на переменном токе.

Цепь последовательного включения состоит из РИП $R_X$ и сопротивления нагрузки $R_H$ (например, амперметра) и показана на рисунке 2.2. В общем случае сопротивление резистивного ИП является функцией измеряемой величины $X$ и может быть записано в виде

$$R_X = R_0 \pm \Delta R_X. \tag{2.4}$$

Уравнение преобразования цепи (рисунок 2.2) будет

$$I_X = E/[R_H + R_0 \pm \Delta R_X]. \tag{2.5}$$

Измерительная цепь последовательного включения характеризуется нелинейной зависимостью между $\Delta I_X$ и $\Delta R(X)$. Погрешность линейности может быть уменьшена при работе на начальном участке характеристики $I_X = F(\Delta R)$.

Цепь резистивного делителя напряжения показана на рисунке 2.3 а. Уравнение преобразования цепи имеет вид

$$U_{вых} = \frac{E R_H (R_0 \pm \Delta R_X)}{(R_0 \pm \Delta R_X)(R_{0Г} + R_H) + R_{0Г} R_H}, \tag{2.6}$$

где $R_{ОГ}$ – сопротивление, ограничивающее ток в цепи.

В качестве нагрузки $R_H$ может быть использован вольтметр. Если сопротивление вольтметра $R_Н = R_В >> R_X$, получим

$$U_{ВЫХ} = \frac{E(R_0 \pm \Delta R_X)}{R_{0Г} + R_0 \pm \Delta R_X}. \qquad (2.7)$$

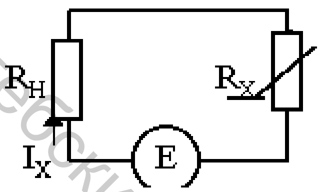
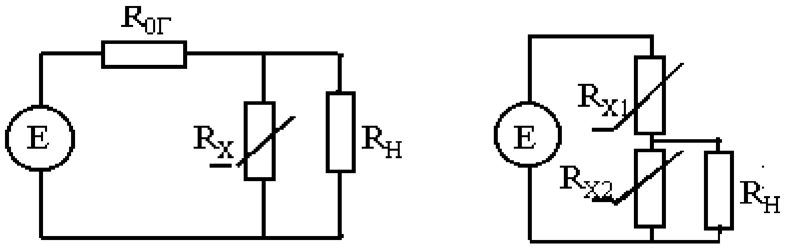



Рисунок 2.2 – Цепь последовательного включения




а б

Рисунок 2.3 – Цепь резистивного делителя напряжения

Измерительные цепи последовательного включения и резистивного делителя напряжения характеризуются нелинейной зависимостью между выходной величиной ($\Delta I_X$, $\Delta U_X$) и изменением $\Delta R_X$. Погрешность линейности уменьшается при работе на начальном участке характеристики преобразования. Эта погрешность также может быть уменьшена при включении в цепь делителя напряжения дифференциального преобразователя (рисунок 2.3 б).

Полагая, что $R_{X1} = R_0/2 - \Delta R_X$; $R_{X2} = R_0/2 + \Delta R_X$ и $R_H >> R_{X2}$, для цепи с дифференциальным преобразователем получим линейную зависимость $U_{ВЫХ}$ от $\Delta R_X$:

$$U_{ВЫХ} = \frac{E(R_0 + 2\Delta R_X)}{2R_0}. \qquad (2.8)$$

Недостатком рассмотренных измерительных цепей является то, что нулевому значению измеряемой величины ($X = 0$) соответствует ненулевое значение выходной величины ($I_X \neq 0$; $U_{ВЫХ} \neq 0$). При измерении переменных величин этот недостаток устраняется использованием разделительных конденсаторов. Результирующие погрешности цепей последовательного включения и делителя напряжения зависят от погрешности ИП, погрешности от нестабильности параметров источника питания и нагрузки.

Рассмотренные измерительные цепи могут работать как на постоянном, так и на переменном токе.

*Мостовые измерительные цепи* выполняются в виде неравновесных и равновесных мостов. В неравновесных мостах (рисунок 2.4) в исходном состоянии осуществляется компенсация начального значения выходного сигнала так, чтобы при $X = 0$ он был равен нулю. При отклонении измеряемой величины X от нуля изменяется сопротивление $R_X = R_0 + \Delta R_X$ и мост выходит из состояния равновесия.

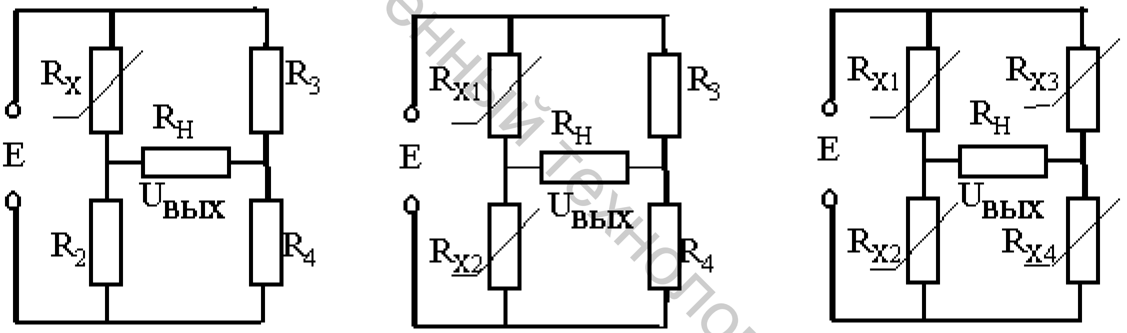
Выходное напряжение мостовой цепи (рисунок 2.4 а) определяется как

$$U_{ВЫХ} = \frac{(R_X R_4 - R_2 R_3) R_H}{R_H (R_X + R_2)(R_3 + R_4) + R_X R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_X + R_2)} \qquad (2.9)$$

Измерительные преобразователи могут быть включены в одно (рисунок 2.4 а), два (рисунок 2.4 б) и четыре (рисунок 2.4 в) плеча моста. Выходное напряжение моста при заданном напряжении питания $E$ в общем случае нелинейно зависит от $\Delta R_X$ для всех вариантов включения ИП.

При включении дифференциального ИП (рисунок 2.4 б), равенстве в состоянии равновесия сопротивлений всех плеч моста $R_{X1} = R_{X2} = R_3 = R_4 = R_0$ и $R_Н >> R_0$ уравнение преобразования мостовой цепи будет линейным.

Выходное напряжение для равноплечего моста при $R_H >> R_0$ определяется следующими формулами: $U_{ВЫХ1} = E\, \Delta R_X / 4R_0$ (рисунок 2.4 а); $U_{ВЫХ2} = E\, \Delta R_X / 2R_0$ (рисунок 2.4 б); $U_{ВЫХ4} = E\, \Delta R_X / R_0$ (рисунок 2.4 в), то есть выходное напряжение линейно зависит от изменения сопротивления $\Delta R_X$.




а б в

Рисунок 2.4 – Равновесные мостовые измерительные цепи

К достоинствам мостовой цепи можно отнести возможность получения нулевого выходного сигнала при значении измеряемой величины равной нулю.

Мостовые цепи работают как на постоянном, так и на переменном токе, причем питание может осуществляться как от источника напряжения, так и от источника тока.

Основными причинами погрешностей мостовых цепей являются: временная и температурная нестабильность нерабочих плеч моста; нестабильность источника питания; погрешности ИП.

Измерительные цепи в виде равновесных мостов отличаются от неравновесных мостов тем, что в них независимо от значения измеряемого сопротивления условие равновесия поддерживается постоянно, причем уравновешивание моста может осуществляться оператором или автоматически.

На рисунке 2.5 приведен пример схемы автоматически уравновешиваемого моста. При отсутствии входного сигнала мост уравновешен и движок реохорда $R_P$ находится в начальном положении. При изменении входного сигнала мостовая цепь выходит из равновесия. На выходе моста появляется напряжение $U_M$, которое усиливается усилителем Ус и подается на реверсив-двигатель Д, который перемещает движок реохорда $R_P$ до тех пор, пока не наступит новое состояние равновесия в мостовой цепи. Шкала указателя на валу двигателя и реохорда градуируется в единицах входной величины.

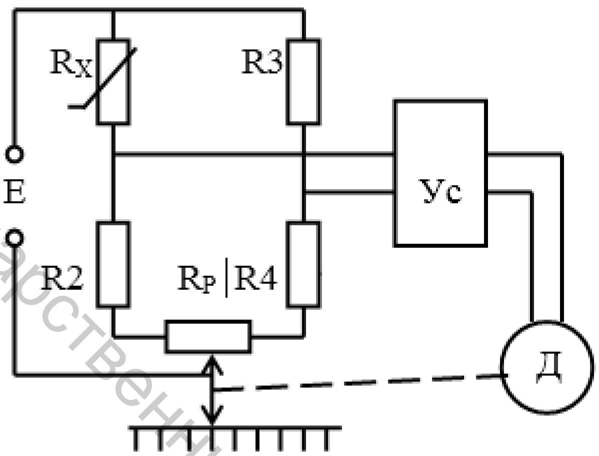
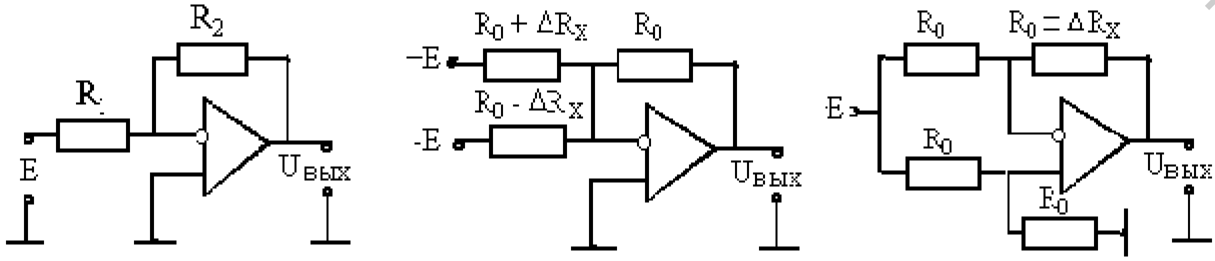



Рисунок 2.5 – Автоматически уравновешиваемый мост

Самоуравновешивающиеся (автоматические) мосты относятся к измерительным цепям астатического следящего уравновешивания, в которых превалирует аддитивная погрешность, обусловленная наличием порога чувствительности нуль органа и двигателя.

Измерительные цепи РИП с операционными усилителями обладают достаточно высокими характеристиками и находят широкое применение при и построении измерительных приборов с резистивными первичными преобразователями. На рисунке 2.6 приведены примеры схем преобразователей сопротивления в напряжение. Схема с двухпроводной линией связи (рисунок 2.6 а) применяется в тех случаях, когда измеряются большие сопротивления или когда РИП находится в непосредственной близости от измерительной схемы. Уравнение преобразования имеет вид $U_{ВЫХ} = -E\ R_2/R_1$. Датчик может быть включен вместо любого из сопротивлений схемы.



*а* *б* *в*

Рисунок 2.6 – Измерительные цепи с операционными усилителями

Измерительная цепь, показанная на рисунке 2.6 б, может быть использована для дифференциальных резистивных датчиков. Уравнение преобразования этой цепи имеет вид $U_{ВЫХ} = 2E\,\Delta R_X/R_0$.

На рисунке 2.6 в показана схема моста с ОУ. Уравнение преобразования имеет вид $U_{ВЫХ} = -2\,\Delta R_X/(2R_0)$.

## 2.4 Емкостные ИП

Емкостные ИП (ЕИП) относятся к группе электростатических преобразователей, у которых входная измеряемая величина связана с изменением емкости системы или с величиной электрического заряда.

Действие емкостных преобразователей основано на преобразовании входной величины в изменение емкости конденсатора, которая является функцией расстояния h между электродами, площади электродов Q и диэлектрической проницаемости ε диэлектрика между электродами $C = F(h, Q, \varepsilon)$. Емкостные ИП могут быть использованы для измерения любых физических величин, которые функционально связаны $C$, $h$, $Q$ и $\varepsilon$ (перемещений, силы, геометрических размеров – толщины, уровня и др.).

Самое большое применение получили преобразователи перемещения.

ЕИП в общем случае состоит из диэлектрика, электродов, между которыми располагается диэлектрический материал, выводов и различных конструктивных элементов. Диэлектрик может находиться в жидком, твердом и газообразном состоянии. Электроды могут выполняться в виде плоскопараллельных пластин, коаксиальных цилиндров и других конструкций и форм. Конструктивные элементы – различные электроизоляционные материалы и элементы защиты конденсатора от внешних факторов.

Наиболее часто используются две конструкции емкостных ИП. Первая представляет собой конденсатор с плоскими параллельными пластинами (рисунки 2.7 а и 2.7 б), емкость которого, если пренебречь краевыми эффектами:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon Q}{h}. \qquad (2.10)$$

Вторая – цилиндрический конденсатор (рисунок 2.7 г), емкость которого находится как

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon x}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}. \qquad (2.11)$$

В основу принципа действия могут быть положены:

1) изменение расстояния между обкладками;

2) изменение площади перекрытия обкладок;

3) изменение ε диэлектрика или части его.

Уравнение преобразования ЕИП перемещения, основанного на изменении расстояния между электродами, имеет нелинейную (гиперболическую) функцию преобразования (рисунок 2.7 а):

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon Q}{h + x}. \tag{2.12}$$

Преобразователь с изменяющейся площадью пластин может быть выполнен в виде плоского конденсатора (рисунок 2.7 б), уравнение преобразования которого

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon b x}{h}. \tag{2.13}$$

Реально линейная зависимость искажается из-за краевого эффекта.

Обычно этот тип преобразователя реализуется или в виде конденсатора с цилиндрическими электродами (рисунок 2.7 в), или в виде поворотного конденсатора (рисунок 2.7 г) для измерения угловых перемещений.

Уравнение преобразования ЕИП линейных перемещений цилиндрического типа приведено выше

Функция преобразования ЕИП угловых перемещений (рисунок 2.7 г) имеет линейную зависимость от α:

$$C(\alpha) = C_0 + \frac{k \varepsilon_0 \alpha}{h}. \tag{2.14}$$

где $k$ – коэффициент, определяемый размерами электродов.

На рисунок 2.7 д представлен вид характеристики преобразования ЕИП с переменной площадью перекрытия пластин.

ЕИП с изменением положения диэлектрика (рисунок 2.7 е) имеет функцию преобразования:

$$C(x) = C_0\left(1 + \frac{(\varepsilon_r - 1)x}{a}\right), \tag{2.15}$$

где $C_0 = C(0) = +\varepsilon_0\ \alpha b/h$.

Этот преобразователь имеет линейную функцию преобразования. Чаще всего он выполняется с цилиндрическими электродами и используется для измерения уровня неэлектропроводной жидкости в резервуаре.

Емкостные ИП могут выполняться по дифференциальной схеме. Примеры выполнения дифференциальных ЕИП показаны на рисунке 2.7 ж, з.

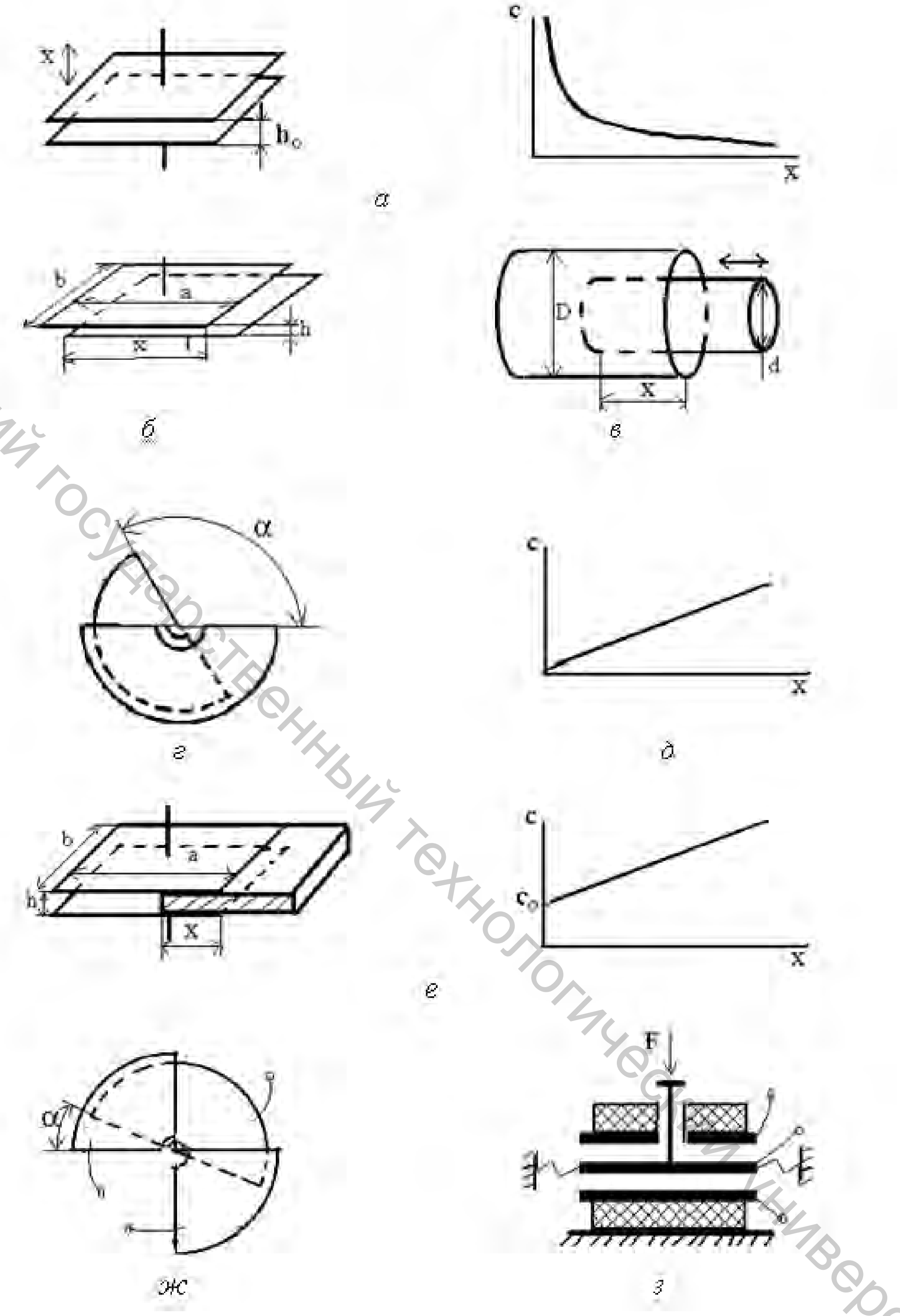



Рисунок 2.7 – Конструкции емкостных ИП

## 2.5 Области применения, достоинства и недостатки ЕИП

В качестве входной величины могут использоваться:
1) перемещение (линейное и угловое);
2) давление;

3) температура;

4) концентрация растворов и смесей;

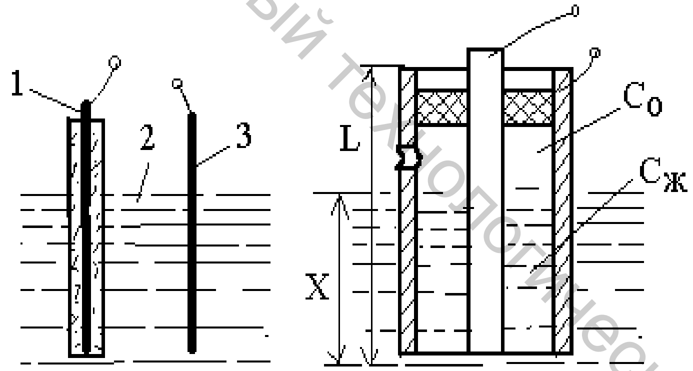
5) деформация.

Применение ЕИП с изменяющимся расстоянием между электродами целесообразно в том случае, когда диапазон изменения входной величины мал. Как правило, ЕИП применяются при измерении перемещений меньше 1 мм (10-6 – 10-3 м) и максимальное перемещение при этом (0,1 – 0,2).h0.

Увеличение чувствительности преобразователя достигается уменьшением расстояния между электродами, предельное значение которого определяется технологическими соображениями и приложенным напряжением. При малых *h* возможен пробой.

Преобразователи с изменяющейся площадью используются для измерения относительно больших перемещений: линейных – более 1 мм и угловых до $270^0$. Конструкция с поворотным конденсатором применяется также в качестве выходного преобразователя для измерения электрических напряжений (емкостной вольтметр).

ЕИП, основанные на изменении диэлектрической проницаемости, применяются для измерения уровня. На рисунке 2.8 схематически изображены конструкции емкостных преобразователей для измерения уровня электропроводной (рисунок 2.8 а) и неэлектропроводной (рисунок 2.8 б) жидкостей.




*а* *б*

Рисунок 2.8 – Конструкции емкостных преобразователей для измерения уровня

Уравнение преобразования ИП, изображенного на рисунке 2.8 б имеет вид:

$$C = C_0 + C_1 = \frac{2\pi\left(\varepsilon_{ж}X + (L - X)\right)\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}. \qquad (2.16)$$

В преобразователе уровня электропроводящей жидкости один из электродов 1 может представлять собой цилиндрический электрод, покрытый слоем электроизоляционного материала. Вместо специального электрода может быть использован кусок провода, покрытого изоляцией. Вторым электродом 2 является сама проводящая жидкость. Для соединения этого электрода с измерительной цепью используется электрод 3. При выполнении электрода 1 цилиндрическим уравнение преобразования может быть представлено в виде:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_{ж}\varepsilon_0 X}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}, \qquad (2.17)$$

где $D$ и $d$ – внешний и внутренний диаметры покрытия электрода 1.

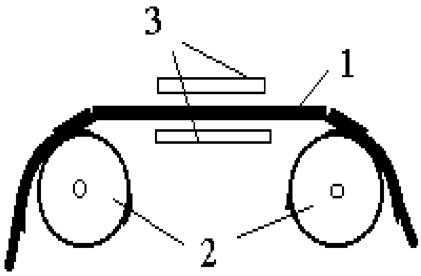



Рисунок 2.9 – Конструкция емкостного преобразователей для измерения толщины диэлектрической ленты

ЕИП применяются также для измерения толщины диэлектрической ленты (рисунок 2.9). Лента 1 протягивается с ,помощью роликов 2 между обкладками конденсатора 3. Уравнение преобразования записывается как

$$C = Q/[(h - x)/\varepsilon_0 + x)/\varepsilon_Л], \qquad (2.18)$$

где $Q$ – площадь обкладок;

$h$ – зазор между обкладками;

$\varepsilon_Л$ – диэлектрическая проницаемость материала ленты.

Как отмечалось ранее, ЕИП могут использоваться при измерении давления, деформации, температуры, концентрации растворов и смесей и других величин.

При воздействии гидростатического давления на диэлектрик емкостного ИП изменяется ε диэлектрика преобразователя и соответственно его емкость

$$C = \kappa\varepsilon_H (1+\alpha_{\varepsilon,P}\Delta P) \qquad (2.19)$$

где $\kappa$ – коэффициент, учитывающий размеры ЕИП;

$\Delta P$ – изменение давления;

$\varepsilon_H$ – диэлектрическая проницаемость при атмосферном давлении;

$\alpha_{\varepsilon P}$ – механический (барический) коэффициент $\varepsilon$.

В качестве диэлектрика подобных ЕИП используются твердые, жидкие, газообразные диэлектрики. Для жидких: $\alpha_{\varepsilon,P} \approx 5\cdot10^{-6}Па^{-1}$; для газообразных $\alpha_{\varepsilon,P} \approx 5\cdot10^{-4}Па^{-1}$; Твердые – сегнетоэлектрики (турмалин, титанат бария) используются для измерения средних и больших давлений (до тысяч атмосфер).

При изменении температуры изменяется диэлектрическая проницаемость, что приводит к изменению емкости конденсатора

$$C = \kappa\varepsilon_H (1 + \alpha_{\varepsilon,T}\Delta T) \tag{2.20}$$

где $\varepsilon_H$ – диэлектрическая проницаемость при начальной температуре;

$\alpha_{\varepsilon,T}$ – температурный коэффициент $\varepsilon$.

Для построения ЕИП, работающих в диапазоне от -100 до $+100^0C$, находят применение диэлектрики из титановых соединений (тиконд и др.), которые имеют $\alpha_{\varepsilon,T} \approx -(10 - 15)\cdot10^{-4}\%/^0C$. Значительно большей чувствительностью к температуре обладают сегнетоэлектрики. Температурный коэффициент диэлектрической проницаемости для сегнетоэлектриков составляет величину 8,5 – 30 % / $^0C$.

Диэлектрическая проницаемость также зависит от концентрации и состава смесей.

К достоинствам ЕИП можно отнести:

1) принципиальное отсутствие шумов, в отличие от резистивных и индуктивных ИП;

2) отсутствие самонагрева;

3) простоту конструкции, малую массу и габариты;

4) возможность соответствующим выбором формы подвижного и неподвижного электродов получить заданную функциональную зависимость между изменением емкости и входным линейным или угловым перемещением (в преобразователях с переменной площадью перекрытия электродов);

5) малую силу притяжения электродов;

6) возможность применения как для статических, так и для динамических измерений.

Недостатками емкостных преобразователей являются:

1) малая емкость и высокое выходное сопротивление преобразователя;

2) зависимость результата измерения от изменения емкости кабеля.

## 2.6 Погрешности ЕИП

1. Погрешности, обусловленные зависимостью емкости преобразователя от внешних условий.

Изменение температуры приводит к изменению ε диэлектрика. Разные конструктивные элементы преобразователя имеют различные температурные коэффициенты линейного расширения (у металлов $\alpha_l = (15 - 30)\cdot10^{-4}K^{-1}$; кварц имеет $\alpha_l = 0,5\cdot10^{-6}K^{-1}$, органические диэлектрики $\alpha_l = (50 - 100)10^{-4}K^{-1}$), что приводит к изменению площади электродов и расстояния между ними при изменении температуры.

Площадь Q для большинства ЕИП определяется линейными размерами 10 – 100*мм*, и изменение этих размеров дает пренебрежимо малую погрешность.

Расстояние между электродами обычно составляет 10*мкм* – 1*мм* и его изменение под действием температуры может привести к большой погрешности. Эта погрешность может быть уменьшена применением дифференциальных преобразователей.

2. Погрешность, обусловленная паразитными токами утечки.

Номинальная емкость ЕИП обычно составляет единицы – сотни пикофарад. На низких частотах сопротивление преобразователя достигает больших значений, что приводит к возникновению погрешности, обусловленной паразитными токами утечки. Для уменьшения этой погрешности увеличивают частоту напряжения питания до нескольких килогерц, и даже мегагерц.

3. Погрешность, обусловленная влиянием паразитных емкостей между электродами и заземленными деталями конструкции, между жилой соединительного кабеля и его заземленным экраном. Причем параметры кабеля могут изменяться. Для уменьшения этой погрешности измерительную цепь и вторичный прибор располагают вблизи преобразователя.

## 2.7 Измерительные цепи ЕИП

Существует множество различных измерительных цепей ЕИП. При построении измерительной цепи необходимо учитывать линейность зависимости выходного параметра цепи от измеряемой величины. Одной из трудностей построения измерительных цепей является их защита от наводок и исключение влияния паразитных емкостей. Кроме того, так как выходные мощности емкостных преобразователей малы, в измерительных цепях необходимо применять усилители**.** Наиболее распространенными являются измерительные цепи: в виде делителя напряжения, измерительные мосты, емкостно-диодные цепи, контурные цепи.

Цепь в виде делителя напряжения представлена на рисунке 2.10. Одинарный емкостный ИП может быть включен в качестве $C_1$ или $C_2$. В случае дифференциального ИП его емкости образуют оба плеча делителя. При равенстве произведений $R_1C_1 = R_2C_2$, где $R_1$ и $R_2$ – сопротивления изоляции преобразователя, напряжение на выходе делителя в широком частотном диапазоне питающего напряжения определяется выражением

$$U_{ВЫХ} = U_{\sim} C_1 / (C_1 + C_2). \qquad (2.21)$$

Погрешность такой цепи зависит от погрешностей ЕИП, погрешностей из-за нестабильности напряжения питания и погрешности указателя.

На рисунке 2.11 показана схема с использованием операционного усилителя (ОУ), построенная по принципу делителя напряжения. Выходное напряжение $U_{ВЫХ} = U_{\sim}C_1 / C_2$. Емкостный преобразователь может быть включен вместо $C_1$ или $C_2$ в зависимости от того, на каком принципе построен ЕИП, и какую функцию преобразования измерительной цепи необходимо реализовать. В данной схеме паразитные емкости $C_{П1} – C_{П2}$ практически не влияют на работу измерительного устройства. Емкости $C_{П1}$ и $C_{П3}$ шунтируются низкими выходными сопротивлениями источника напряжения $U_{\sim}$ и усилителя. Емкость $C_{П2}$ включена между входами ОУ и напряжение на ней близко к нулю.

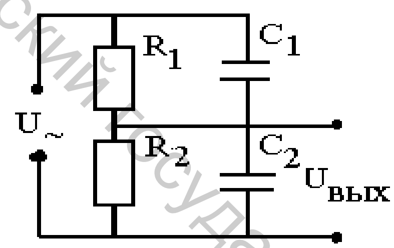


Рисунок 2.10 – Цепь в виде делителя напряжения

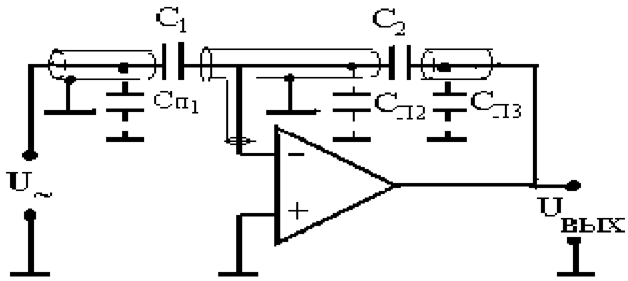
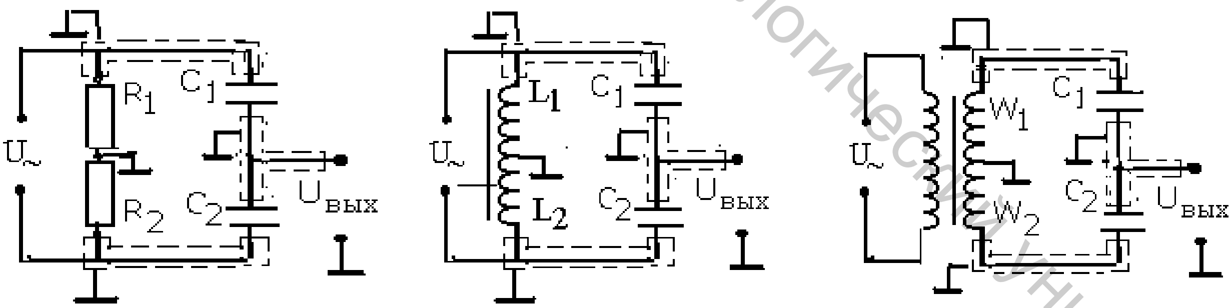


Рисунок 2.11 – Измерительная цепь с использованием ОУ

Мостовые измерительные цепи используются преимущественно с дифференциальными преобразователями. На рисунке 2.12 показаны некоторые варианты выполнения мостовых цепей. ЕИП включается в соседние плечи моста, в другие плечи моста включаются низкоомные резисторы (рисунок 2.12 а), взаимосвязанные индуктивности (рисунок 2.12 б), полуобмотки питающего трансформатора (рисунок 2.12 в).



*а* *б* *в*

Рисунок 2.12 – Мостовые измерительные цепи

Две паразитные емкости между жилами и экранами кабелей шунтируются малыми сопротивлениями (низкоомными резисторами, сопротивлениями индуктивностей, сопротивлениями обмоток трансформатора) нерабочих плеч моста и практически не влияют на работу мостовой схемы. Третья включается параллельно выходной диагонали моста. Обычно выходной сигнал цепи подается на усилитель и для уменьшения влияния емкости экранированного провода, соединяющего ЕИП с усилителем, применяется схема эквипотенциальной защиты. Для этой цели используются провода с двойным экраном.

При подсоединении выхода моста к инвертирующему входу ОУ (рисунок 2.13) необходимость в двух экранах отпадает. Выходное напряжение:

$$U_{вых} = U_{\sim} (C_1 - C_2)/C_3\,. \qquad (2.22)$$

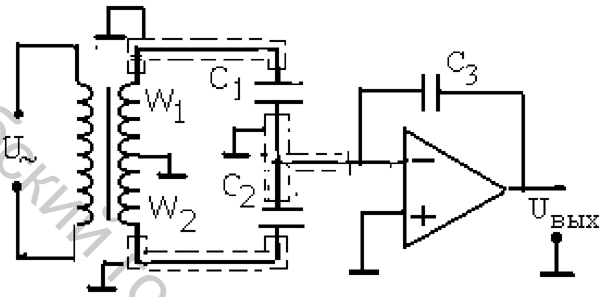



Рисунок 2.13 – Схема с подключением моста к инвертирующему входу ОУ

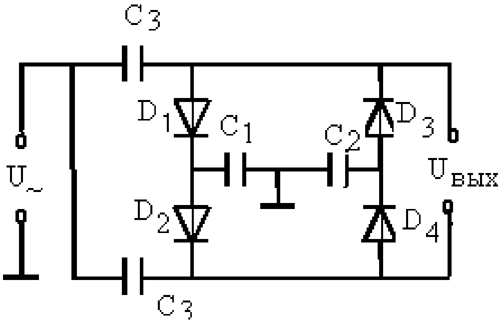



Рисунок 2.14 – Емкостно-диодная измерительная цепь

Недостатком рассмотренных схем является то, что они могут использоваться для ЕИП, у которых все пластины изолированы от корпуса. При заземлении одной из пластин (обычно общей подвижной пластины) желательно элементы измерительной цепи располагать в одном корпусе с датчиком. При работе дифференциального преобразователя с заземленной пластиной может использоваться емкостно-диодная измерительная цепь, показанная на рисунке 2.14. Если пренебречь падением напряжения на диодах, то

$$U_{вых} \approx U_{\sim} (C_1 - C_2)/(C_1+C_2+2C_1C_2/C_3). \qquad (2.23)$$

Если не предъявляется высоких требований к линейности характеристики преобразования, то в качестве измерительных цепей ЕИП могут быть использованы цепи резонансного *LC*-контура (рисунок 2.15), питаемого от генератора со стабильной частотой. При изменении емкости преобразователя сопротивление контура изменяется, при этом изменяется выходное напряжение, которое достигает максимума при частоте $\omega_0 = \sqrt{LC}$.

При измерении физических величин с помощью емкостных ИП широко используются измерительные цепи с преобразованием емкости в частотно-временные сигналы. На рисунке 2.16 показана одна из подобных цепей с использованием ОУ. Функция преобразования схемы, представленной на рисунке 2.16, имеет следующий вид:

$$f_X = R_3/(4R_1R_2C_1). \qquad (2.24)$$

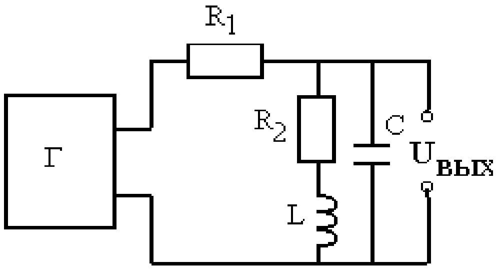



Рисунок 2.15 – Измерительная цепь резонансного $LC$-контура

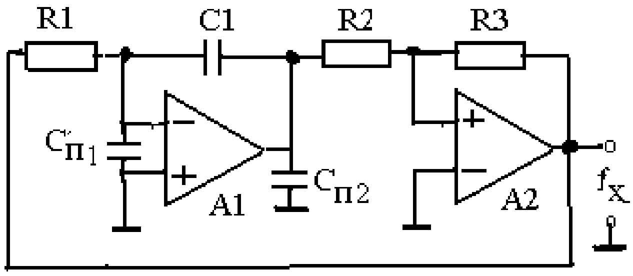



Рисунок 2.16 – Измерительная цепь с преобразованием емкости в частотно-временные сигналы

Для линейного преобразования емкости $C_1$ в качестве выходной величины необходимо принять период $T_X$.

Влияние паразитных емкостей $C_{П1}$ и $C_{П2}$ в этой схеме мало.

## ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №2

1. Произвести расчет основных параметров реостатного преобразователя для измерения заданного параметра и разработать измерительную цепь к нему. Определить погрешность измерения, чувствительность, построить градировочную характеристику.

Таблица 2.1 – Варианты заданий

| Вари-ант | Измеряемый параметр | Нижний предел измерения | Верхний предел измерения | Унифицированный выходной сигнал |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | Линейное перемещение, мм | 0 | 300 | 4 – 20 мА |
| 2 | Линейное перемещение, мм | 0 | 200 | 0 – 10 В |
| 3 | Линейное перемещение, мм | 0 | 100 | 4 – 20 мА |
| 4 | Линейное перемещение, мм | 0 | 50 | 0 – 10 В |
| 5 | Линейное перемещение, мм | 0 | 25 | 4 – 20 мА |
| 6 | Линейное перемещение, мм | 0 | 10 | 0 – 10 В |
| 7 | Линейное перемещение, мм | 0 | 40 | 4 – 20 мА |
| 8 | Линейное перемещение, мм | 0 | 70 | 0 – 10 В |
| 9 | Линейное перемещение, мм | 0 | 20 | 4 – 20 мА |
| 10 | Линейное перемещение, мм | 0 | 250 | 0 – 10 В |
| 11 | Линейное перемещение, мм | 0 | 30 | 4 – 20 мА |
| 12 | Линейное перемещение, мм | 0 | 150 | 0 – 10 В |
| 13 | Линейное перемещение, мм | 0 | 80 | 4 – 20 мА |
| 14 | Линейное перемещение, мм | 0 | 400 | 0 – 10 В |
| 15 | Линейное перемещение, мм | 0 | 60 | 4 – 20 мА |
| 16 | Угловое перемещение, град | 0 | 270 | 0 – 10 В |
| 17 | Угловое перемещение, град | 0 | 210 | 4 – 20 мА |

Окончание таблицы 2.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 18 | Угловое перемещение, град | 0 | 180 | 0 – 10 В |
| 19 | Угловое перемещение, град | 0 | 90 | 4 – 20 мА |
| 20 | Угловое перемещение, град | 0 | 120 | 0 – 10 В |
| 21 | Угловое перемещение, град | 0 | 240 | 4 – 20 мА |
| 22 | Угловое перемещение, град | 0 | 150 | 0 – 10 В |
| 23 | Угловое перемещение, град | 0 | 300 | 4 – 20 мА |
| 24 | Угловое перемещение, град | 0 | 90 | 0 – 10 В |
| 25 | Угловое перемещение, град | 0 | 180 | 4 – 20 мА |
| 26 | Угловое перемещение, град | 0 | 45 | 0 – 10 В |
| 27 | Угловое перемещение, град | 0 | 270 | 4 – 20 мА |
| 28 | Угловое перемещение, град | 0 | 90 | 0 – 10 В |
| 29 | Угловое перемещение, град | 0 | 150 | 4 – 20 мА |
| 30 | Угловое перемещение, град | 0 | 240 | 0 – 10 В |

2. Обосновать выбор конструкции емкостного преобразователя для измерения заданного параметра, произвести расчёт основных параметров и разработать измерительную цепь к нему. Определить погрешность измерения, чувствительность, построить градировочную характеристику.

Таблица 2.2 – Варианты заданий

| Вари-ант | Измеряемый параметр | Нижний предел измерения | Верхний предел измерения |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Толщина листа картона, мм | 0 | 5 |
| 2 | Толщина стекла, мм | 0 | 10 |
| 3 | Толщина искусственной кожи, мм | 0 | 5 |
| 4 | Толщина бумаги, мм | 0 | 1 |
| 5 | Толщина льда, мм | 0 | 20 |
| 6 | Температура, °С | 0 | 100 |
| 7 | Температура, °С | -50 | 50 |
| 8 | Температура, °С | 20 | 70 |
| 9 | Температура, °С | -100 | 100 |
| 10 | Температура, °С | 0 | 50 |
| 11 | Угловое перемещение, град | 0 | 90 |
| 12 | Угловое перемещение, град | 0 | 210 |
| 13 | Угловое перемещение, град | 0 | 180 |
| 14 | Угловое перемещение, град | 0 | 270 |
| 15 | Угловое перемещение, град | 0 | 150 |
| 16 | Уровень масла, м | 0 | 3 |
| 17 | Уровень воды, м | 0 | 2 |
| 18 | Уровень топлива, м | 0 | 5 |
| 19 | Уровень масла, м | 0 | 0,3 |

Окончание таблицы 2.2

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 20 | Уровень топлива, м | 0 | 0,7 |
| 21 | Линейное перемещение, мм | 0 | 20 |
| 22 | Линейное перемещение, мм | 0 | 5 |
| 23 | Линейное перемещение, мм | 0 | 10 |
| 24 | Линейное перемещение, мм | 0 | 25 |
| 25 | Линейное перемещение, мм | 0 | 2 |
| 26 | Гидростатическое давление, м вод. ст. | 0 | 0,4 |
| 27 | Гидростатическое давление, м вод. ст. | 0 | 5 |
| 28 | Гидростатическое давление, м вод. ст. | 0 | 1 |
| 29 | Гидростатическое давление, м вод. ст. | 0 | 20 |
| 30 | Гидростатическое давление, м вод. ст. | 0 | 100 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

Нормальное распределение. Значение функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$

| Целые и десятичные доли $Ui$ | Сотые доли $Ui$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,0000 | 0,0080 | 0,0160 | 0,0239 | 0,0319 | 0,3999 | 0,0478 | 0,0558 | 0,0638 | 0,0717 |
| 0,1 | 0797 | 0876 | 0955 | 1034 | 1113 | 1192 | 1271 | 1350 | 1428 | 1507 |
| 0,2 | 1585 | 1663 | 1741 | 1819 | 1897 | 1974 | 2051 | 2128 | 2205 | 2282 |
| 0,3 | 2358 | 2434 | 2510 | 2586 | 2661 | 2737 | 2812 | 2886 | 2960 | 3035 |
| 0,4 | 3108 | 3182 | 3255 | 3328 | 3401 | 3473 | 3545 | 3616 | 3688 | 3759 |
| 0,5 | 3829 | 3899 | 3969 | 4039 | 4108 | 4177 | 4245 | 4313 | 4381 | 4448 |
| 0,6 | 4515 | 4581 | 4647 | 4713 | 4778 | 4843 | 4907 | 4971 | 5035 | 5098 |
| 0,7 | 5161 | 5223 | 5285 | 5346 | 5407 | 5467 | 5527 | 5587 | 5646 | 5705 |
| 0,8 | 5763 | 5821 | 5878 | 5935 | 5991 | 6047 | 6102 | 6157 | 6211 | 6265 |
| 0,9 | 6319 | 6372 | 6424 | 6476 | 6528 | 6579 | 6629 | 6679 | 6729 | 6778 |
| 1,0 | 0,6827 | 0,6875 | 0,6923 | 0,6970 | 0,7017 | 0,7063 | 0,7109 | 0,7154 | 0,7199 | 0,7243 |
| 1,1 | 7287 | 7330 | 7373 | 7415 | 7457 | 7499 | 7540 | 7580 | 7620 | 7660 |
| 1,2 | 7699 | 7737 | 7775 | 7813 | 7850 | 7887 | 7923 | 7959 | 7994 | 8029 |
| 1,3 | 8064 | 8098 | 8132 | 8165 | 8198 | 8230 | 8262 | 8293 | 8324 | 8355 |
| 1,4 | 8385 | 8415 | 8444 | 8473 | 8501 | 8529 | 8557 | 8584 | 8611 | 8638 |
| 1,5 | 8664 | 8690 | 8715 | 8740 | 8764 | 8789 | 8812 | 8836 | 8859 | 8882 |
| 1,6 | 8904 | 8926 | 8948 | 8969 | 8990 | 9011 | 9031 | 9051 | 9070 | 9090 |
| 1,7 | 9109 | 9127 | 9146 | 9164 | 9181 | 9199 | 9216 | 9233 | 9249 | 9265 |
| 1,8 | 9281 | 9297 | 9312 | 9327 | 9342 | 9357 | 9371 | 9385 | 9399 | 9412 |
| 1,9 | 9426 | 9439 | 9451 | 9464 | 9476 | 9488 | 9500 | 9512 | 9523 | 9534 |
| 2,0 | 0,9545 | 0,9556 | 0,9566 | 0,9576 | 0,9586 | 0,9596 | 0,9606 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9634 |
| 2,1 | 9643 | 9651 | 9660 | 9668 | 9676 | 9684 | 9692 | 9700 | 9707 | 9715 |
| 2,2 | 9722 | 9729 | 9736 | 9743 | 9749 | 9756 | 9762 | 9768 | 9774 | 9780 |
| 2,3 | 9786 | 9791 | 9797 | 9802 | 9807 | 9812 | 9817 | 9822 | 9827 | 9832 |
| 2,4 | 9836 | 9841 | 9845 | 9849 | 9853 | 9857 | 9861 | 9865 | 9869 | 9872 |
| 2,5 | 9876 | 9879 | 9883 | 9886 | 9889 | 9892 | 9895 | 9898 | 9901 | 9904 |
| 2,6 | 9907 | 9910 | 9912 | 9915 | 9917 | 9920 | 9922 | 9924 | 9926 | 9928 |
| 2,7 | 9931 | 9933 | 9935 | 9937 | 9939 | 9940 | 9942 | 9944 | 9946 | 9947 |
| 2,8 | 9949 | 9951 | 9952 | 9953 | 9955 | 9956 | 9958 | 9959 | 9960 | 9961 |
| 2,9 | 9963 | 9964 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 |
| 3,0 | 0,9973 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 |
| 3,1 | 9981 | 9981 | 9984 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 |
| 3,2 | 9986 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |
| 3,3 | 9990 | 9991 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 |
| 3,4 | 9993 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9995 | 9995 | 9995 | 9995 |
| 3,5 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 | 9997 |
| 3,6 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 |
| 3,7 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 |
| 3,8 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 3,9 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 4,0 | 0,999936 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 4,5 | 0,999994 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 5,0 | 0,99999994 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

$\chi^2$-распределение. Значения квантилей $\chi^2_{a,v}$, в зависимости от числа степеней свободы $v$ и уровня значимости $a$

| $v$ \ $a$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,210 | 13815 |
| 3 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,277 | 18,467 |
| 5 | 7,289 | 9,236 | 11,070 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,090 | 26,125 |
| 9 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,725 | 31,264 |
| 12 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 26,217 | 32,909 |
| 13 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,783 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 29,633 | 32,000 | 39,252 |
| 17 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 33,409 | 40,790 |
| 18 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 32,346 | 34,805 | 42,312 |
| 19 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 33,687 | 36,191 | 43,820 |
| 20 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 35,020 | 37,556 | 45,315 |
| 21 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 36,343 | 38,932 | 46,797 |
| 22 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 37,659 | 40,289 | 48,268 |
| 23 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,968 | 41,638 | 49,728 |
| 24 | 29,559 | 33,196 | 36,415 | 40,270 | 42,980 | 51,179 |
| 25 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 41,556 | 44,314 | 52,620 |
| 26 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 42,856 | 45,642 | 54,052 |
| 27 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 44,140 | 46,963 | 55,476 |
| 28 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 45,419 | 48,278 | 56,893 |
| 29 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 46,693 | 49,588 | 58,302 |
| 30 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 47,962 | 50,892 | 59,703 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

***F***-распределение. Значения критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ (верхняя строка при всех $n_2$) и $\alpha = 0{,}01$ (нижняя строка при тех же $n_2$)

| $f_1=n_1$ / $f_2=n_2$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 199,5 | 215,7 | 224,0 | 234,0 | 241,0 | 244,9 | 249,0 | 254,3 |
| | 4999 | 5403 | 5625 | 5859 | 6022 | 6106 | 6235 | 6366 |
| 2 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,33 | 19,38 | 19,41 | 19,55 | 19,50 |
| | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,33 | 99,39 | 99,42 | 99,46 | 99,50 |
| 3 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 8,94 | 8,81 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 27,99 | 27,34 | 27,05 | 26,60 | 26,12 |
| 4 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,16 | 6,00 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,21 | 14,66 | 14,37 | 13,93 | 13,46 |
| 5 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 4,95 | 4,77 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,67 | 10,16 | 9,89 | 9,47 | 9,02 |
| 6 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,28 | 4,10 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| | 10,52 | 9,78 | 9,15 | 8,47 | 7,98 | 7,72 | 7,31 | 6,88 |
| 7 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,87 | 3,68 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,19 | 6,72 | 6,49 | 6,07 | 6,65 |
| 8 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,58 | 3,39 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,37 | 5,91 | 5,67 | 5,28 | 4,86 |
| 9 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,37 | 3,18 | 3,07 | 2,90 | 2,71 |
| | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 5,80 | 5,35 | 5,11 | 4,73 | 4,31 |
| 10 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,22 | 3,02 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,39 | 4,94 | 4,71 | 4,33 | 3,91 |
| 11 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,09 | 2,90 | 2,79 | 2,51 | 2,40 |
| | 7,21 | 6,22 | 5,76 | 5,07 | 4,63 | 4,40 | 4,02 | 3,60 |
| 12 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,00 | 2,80 | 2,69 | 2,50 | 2,30 |
| | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 4,82 | 4,39 | 4,16 | 3,78 | 3,36 |
| 13 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 2,92 | 2,71 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,62 | 4,19 | 3,96 | 3,59 | 3,17 |
| 14 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,85 | 2,65 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,46 | 4,03 | 3,80 | 3,43 | 3,00 |
| 16 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,74 | 2,54 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,20 | 3,78 | 3,55 | 3,18 | 2,75 |
| 18 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,66 | 2,46 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,01 | 3,60 | 3,37 | 3,00 | 2,57 |
| 20 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,60 | 2,39 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 3,87 | 3,46 | 3,23 | 2,86 | 2,42 |
| 24 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,51 | 2,30 | 2,18 | 1,98 | 1,37 |
| | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,67 | 3,26 | 3,03 | 2,66 | 2,21 |
| 32 | 3,29 | 2,90 | 2,67 | 2,40 | 2,19 | 2,07 | 1,86 | 1,59 |
| | 5,34 | 4,46 | 3,97 | 3,43 | 3,02 | 2,80 | 2,42 | 1,96 |
| 48 | 3,19 | 2,80 | 2,57 | 2,30 | 2,08 | 1,96 | 1,75 | 1,45 |
| | 5,08 | 4,22 | 3,74 | 3,20 | 2,80 | 2,58 | 2,20 | 1,70 |
| | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,09 | 1,88 | 1,75 | 1,52 | 1,00 |
| | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 2,80 | 2,41 | 2,18 | 1,79 | 1,00 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Значение критерия Аббе $\nu_q$

| *n* | | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *q* | 0,01 | 0,31 | 0,28 | 0,33 | 0,37 | 0,41 | 0,45 | 0,47 | 0,50 | 0,52 | 0,60 | 0,65 | 0,68 |
| | 0,05 | 0,39 | 0,44 | 0,49 | 0,53 | 0,56 | 0,59 | 0,61 | 0,63 | 0,65 | 0,71 | 0,75 | 0,77 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

*t*-распределение. Значения критерия Стьюдента при различной доверительной вероятности α для разного числа измерений *n*

| *n* \ *α* | 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,80 | 0,50 | 0,20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63,657 | 12,706 | 6,314 | 3,078 | 0,727 | 0,325 |
| 2 | 9,935 | 4,303 | 2,920 | 1,886 | 0,617 | 0,289 |
| 3 | 5,841 | 3,182 | 2,353 | 1,638 | 0,584 | 0,277 |
| 4 | 4,604 | 2,776 | 2,132 | 1,533 | 0,569 | 0,271 |
| 5 | 4,032 | 2,571 | 2,015 | 1,476 | 0,559 | 0,267 |
| 6 | 3,707 | 2,447 | 1,943 | 1,440 | 0,553 | 0,265 |
| 7 | 3,499 | 2,365 | 1,895 | 1,415 | 0,549 | 0,263 |
| 8 | 3,355 | 2,306 | 1,860 | 1,397 | 0,546 | 0,262 |
| 9 | 3,250 | 2,262 | 1,833 | 1,383 | 0,543 | 0,261 |
| 10 | 3,169 | 2,228 | 1,812 | 1,372 | 0,542 | 0,260 |
| 11 | 3,106 | 2,201 | 1,796 | 1,363 | 0,540 | 0,260 |
| 12 | 3,055 | 2,119 | 1,782 | 1,356 | 0,539 | 0,259 |
| 13 | 3,012 | 2,160 | 1,771 | 1,350 | 0,538 | 0,259 |
| 14 | 2,977 | 2,145 | 1,761 | 1,345 | 0,537 | 0,258 |
| 15 | 2,947 | 2,131 | 1,753 | 1,341 | 0,536 | 0,258 |
| 16 | 2,921 | 2,120 | 1,746 | 1,337 | 0,535 | 0,258 |
| 18 | 2,878 | 2,101 | 1,734 | 1,330 | 0,534 | 0,257 |
| 20 | 2,845 | 2,086 | 1,725 | 1,325 | 0,533 | 0,257 |
| 23 | 2,807 | 2,069 | 1,714 | 1,319 | 0,532 | 0,256 |
| 25 | 2,787 | 2,060 | 1,708 | 1,316 | 0,531 | 0,256 |
| 30 | 2,750 | 2,042 | 1,697 | 1,310 | 0,530 | 0,256 |
| 40 | 2,704 | 2,021 | 1,684 | 1,303 | 0,529 | 0,255 |
| 60 | 2,660 | 2,000 | 1,671 | 1,296 | 0,527 | 0,254 |
| 100 | 2,617 | 1,980 | 1,658 | 1,289 | 0,526 | 0,254 |
| | 2,576 | 1,960 | 1,645 | 1,282 | 0,524 | 0,253 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фрайден, Дж. Современные датчики. Справочник : пер. с англ. / Дж. Фрайден ; под ред. Е. Л. Свинцова. – Москва : Техносфера, 2005. – 592 с.

2. Айзенберг, П. Г. Технологические измерения и контрольно-измерительные приборы / Л. Г. Айзенберг, А. В. Кипнис, Ю. И. Стороженко. – Москва : Легпромиздат, 1990. – 355 с.

3. Карташова, А. Н. Технологические измерения и приборы в текстильной и легкой промышленности / А. Н. Карташова, И. В. Дунин-Барковский. – Москва : Легпромиздат, 1984. –340 с.

4. Болтон, У. Карманный справочник инженера-метролога / У. Болтон. – Москва : Издательский дом «Додэка-XXI», 2002. – 384 с.

5. Измерения в промышленности : справочник. В 3-х книгах : пер. с нем. / под ред. П. Профоса. – Москва. : Металлургия, 1990. – 492, 384, 344 с.

6. Морозов, П. В. Автоматические системы управления и обслуживания приборов и оборудования / П. В. Морозов. – Москва : Стандарт, 1989.

7. Автоматизация измерений и контроля электрических и неэлектрических величин / под ред. А. А. Сазонова. – Москва : Из-во стандартов, 1987. – 280 с.

8. Электрические измерения неэлектрических величин / под ред. П. В. Новицкого. – Ленинград : Энергия, 1979.

9. Левшина, Е. С. Электрические измерения физических величин. Измерительные преобразователи : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. «Информационно-измерительная техника» / Е. С. Левшина, П. В. Новицкий. – Ленинград : Энергоатомиздат, 1983. – 320 с.

10. Цербс, М. Контрольно-измерительная техника / М. Цербс. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 320с.

11. Ким, К. К. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника: учебное пособие / К. К. Ким, Г. Н. Анисимов, В. Ю. Барбарович. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 367 с.

12. Измерение электрических и неэлектрических величин : учеб. пособие для вузов / Я. А. Купершмидт [и др.] ; под ред. Н. Н. Евтихеева. – Москва : Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.