

А.В. ЛОКТИОНОВ, Л.Г. КРЫГИНА

Теоретическая механика

Статика и кинематика

**Учебное пособие для студентов
технических специальностей
высших учебных заведений**

***Допущено Министерством образования Республики
Беларусь в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования***

**Витебск
2005**

УДК 531
ББК 22.2
Л73

Авторы:

А.В. Локтионов (главы 6, 7, 10, 13, 14)

Л.Г. Крыгина (главы 1-5, 8, 9, 11, 12)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики учреждения образования «Белорусский национальный технический университет» (г. Минск) А.В. Чигарев;

доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики государственного учреждения высшего профессионального образования «Белорусско-Российский университет», заслуженный деятель науки Республики Беларусь (г. Могилев) Р.М. Игнатищев

Л73 **Теоретическая механика, статика и кинематика:** учебное пособие / Локтионов, А.В., Крыгина, Л.Г.; УО «ВГТУ». – Витебск, 2005. – 171 с.
ISBN 985-481-012-7

Учебное пособие по теоретической механике содержит краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач статики и кинематики. В пособии изложены методические указания к решению задач, приведены примеры их выполнения как для студентов дневного, так и заочного отделений. Оно составлено в полном соответствии с типовой программой, разработанной Белорусским национальным техническим университетом, и предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 531
ББК 22.2

ISBN 985-481-012-7

© А.В. Локтионов
Л.Г. Крыгина, 2005

Введение.....	7
---------------	---

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА

Глава I. Основные понятия статики. Система сходящихся сил

1.1. Основные понятия статики	8
1.2. Аксиомы статики. Теорема о трех непараллельных силах	9
1.3. Связи. Реакции связей	11
1.4. Проекция силы на ось и на плоскость	13
1.5. Система сходящихся сил. Методы сложения сил.....	15
1.6. Равновесие системы сходящихся сил. Уравнения равновесия системы сходящихся сил.....	17

Глава II . Момент силы относительно центра и оси. Пара сил

2.1. Момент силы относительно центра	22
2.2. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментом силы относительно центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр.....	23
2.3. Пара сил. Момент пары сил. Равновесие системы пар сил	24

Глава III. Плоская система сил

3.1. Приведение плоской системы сил к данному центру Главный вектор и главный момент плоской системы сил.....	28
3.2. Частные случаи приведения произвольной плоской системы сил Равновесие произвольной плоской системы сил	29
3.3. Статически определенные и статически неопределенные задачи Равновесие системы твердых тел.....	34
3.4. Равновесие твердого тела при наличии трения.....	39
3.4.1. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения.....	39
3.4.2. Равновесие твердого тела при наличии трения качения.....	42
3.4.3. Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность.....	45

Глава IV. Произвольная пространственная система сил

4.1. Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру....	46
--	----

4.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду	48
4.3. Равновесие пространственной системы сил.....	52
Глава V. Центр тяжести твердого тела	
5.1. Центр тяжести однородного твердого тела.....	59
5.2. Методы определения координат центра тяжести твердого тела	60
5.3. Центры тяжести некоторых линий, плоских фигур, твердых тел	61
РАЗДЕЛ ВТОРОЙ	
КИНЕМАТИКА	
Глава VI. Кинематика точки	
6.1. Введение в кинематику. Траектория и уравнения движения точки	66
6.2. Скорость и ускорение точки при различных способах задания движения	69
6.2.1. Скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения.....	69
6.2.2. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения.....	69
6.2.3. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения.....	70
Глава VII. Кинематика роботов	
7.1. Расчёт кинематических параметров трехзвенного робота- манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения	74
7.2. Расчёт кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом	76
7.3. Расчёт кинематических параметров в сферических координатах матричным методом	81
7.4. Расчёт кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом	85
7.5. Кинематический анализ методов расчета пространственных исполнительных механизмов.....	89
Глава VIII. Простейшие виды движений твердого тела	
8.1. Поступательное движение твердого тела.....	95

8.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение	95
8.3. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	97
Глава IX. Плоское движение твердого тела	
9.1. Уравнения плоского движения твердого тела.....	102
9.2. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей	103
9.3. Ускорение точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений	109
Глава X. Сложное движение точки	
10.1. Абсолютное, переносное и относительное движение точки	115
10.2. Скорость точки в абсолютном, относительном и переносном движениях	116
10.3. Ускорение точки в абсолютном, относительном и переносном движениях. Ускорение Кориолиса.....	117
10.4. Методика решения задач.....	119
Глава XI. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки	
11.1. Кинематические уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки	127
11.2. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при вращении вокруг неподвижной точки	128
11.3. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки	130
Глава XII. Составное движение твердого тела	
12.1. Общие замечания.....	134
12.2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей	136
12.3. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей.....	140
РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ	
ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ ПО СТАТИКЕ И КИНЕМАТИКЕ	
Глава XIII. Примеры выполнения заданий по статике	
13.1. Равновесие произвольной плоской системы сил.....	146
13.1.1. Задача С1.....	147

13.2. Равновесие системы тел, находящихся под действием произвольной	
плоской системы сил	149
13.2.1. Задача С2.....	151
13.3. Равновесие пространственной системы сходящихся сил	155
13.3.1. Задача С3.....	155
13.4. Равновесие тела под действием произвольной пространственной	
системы сил	157
13.4.1. Задача С4.....	157
Глава XIV. Примеры выполнения заданий по кинематике	
14.1 Кинематика точки.....	159
14.1.1. Задача К1.....	159
14.2. Исследование вращательного движения твердого тела	
вокруг неподвижной оси	161
14.2.1. Задача К2.....	162
14.3. Исследование плоскопараллельного движения твердого тела.....	164
14.3.1. Задача К3.....	164
14.4. Сложное движение точки.....	167
14.4.1. Основные понятия и последовательность решения задач	
на сложное движение точки	167
14.4.2. Задача К4.....	170
Литература	173

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей при изучении курса теоретической механики является самостоятельная работа студентов. Особую актуальность она приобретает в последнее время в связи с сокращением для ряда специальностей числа аудиторных часов, отводимых на теоретическую механику, и переходом на двухступенчатую подготовку специалистов: бакалавров и магистров.

Для успешного изучения теоретической механики, кроме изучения теории, необходимы навыки в решении задач. Практика показывает, что курс теоретической механики является одним из труднейших и что способы решения задач студентами усваиваются значительно труднее, чем теория предмета. Эти трудности состоят в неумении облекать конкретные физические задачи в абстрактную математическую форму. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретических разделов курса и помогли бы им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Предлагаемая работа, как полагают авторы, должна оказать помощь в более быстром приобретении навыков самостоятельного решения задач по статике и кинематике курса теоретической механики. В работе приведены краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач статике и кинематики. Разумеется, предлагаемое учебное пособие не исключает необходимости глубокого изучения теории. В соответствующих местах пособия даются методические указания к решению задач, приведены примеры их выполнения как для студентов дневного, так и заочного отделений. Учитывая значительные трудности при выполнении контрольных заданий, главы XIII и XIV содержат примеры выполнения задач по статике и кинематике для студентов-заочников машиностроительных специальностей [19]. Пособие составлено в полном соответствии с программой курса теоретической механики, предназначено для студентов всех специальностей вузов с объемом программ от 90-190 часов. Подразделы 7.1, 7.4 и 7.5 пособия подготовлены при участии ассистента кафедры теоретической механики и ТММ УО «ВГТУ» А.В. Гусакова. Подготовка пособия к изданию выполнена профессором А.В. Локтионовым. Учебным пособием также могут пользоваться инженеры, аспиранты и научные работники.

Авторы надеются, что пособие может оказать существенную помощь и начинающим преподавателям теоретической механики.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ. СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1.1. Основные понятия статики

Теоретическая механика изучает наиболее общие законы механического движения, т. е. изменения положения твердого тела в пространстве, происходящие с течением времени. В основе теоретической механики лежат законы Ньютона, которые справедливы в инерциальной системе отсчета. Эту систему отсчета можно условно считать неподвижной.

Теоретическую механику принято делить на статику, кинематику и динамику.

Статика изучает методы преобразования сил, приложенных к материальной точке и абсолютно твердому телу, а также условия их равновесия.

Кинематика изучает механическое движение точки или твердого тела без учета причин, вызывающих это движение.

Динамика изучает механическое движение материальной точки, механической системы и абсолютно твердого тела с учетом действующих сил.

Приведем определения, характеризующие равновесие сил, действующих на материальную точку, механическую систему и абсолютно твердое тело.

1. Материальное тело, размерами которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь, называют материальной точкой.
2. Системой материальных точек, или механической системой, называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения других точек.
3. Абсолютно твердым телом будем называть такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается постоянным.
4. Система сил, приложенных к абсолютно твердому телу, находится в равновесии, если она своим действием не изменяет состояния этого тела. В статике не делают различия между равновесием твердого тела и равновесием системы сил, действующих на это тело.
5. Две системы сил, действующие на абсолютно твердое тело, называются эквивалентными, если под действием каждой из них твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии.
6. Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется равнодействующей. Уравновешивающая сила по величине равна равнодействующей, но направлена по той же прямой в противоположную сторону.

7. Система сил, которая, будучи приложена к твердому телу, находившемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется системой взаимно уравнивающих сил.

Силы, действующие на механическую систему, делят на две группы: внешние и внутренние силы.

Внешними называют силы, действующие на материальные точки данной механической системы со стороны материальных точек, не принадлежащих этой системе.

Внутренними называют силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемой системы.

Основной задачей статики является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

1.2. Аксиомы статики. Теорема о трех непараллельных силах

В аксиомах статики формулируются те простейшие и общие законы, которым подчиняются силы, действующие на абсолютно твердое тело.

1. Аксиома инерции.

Изолированная материальная точка находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно.

2. Аксиома равновесия двух сил.

Две силы, приложенные к твердому телу, уравниваются только в том случае, если они равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

3. Аксиома.

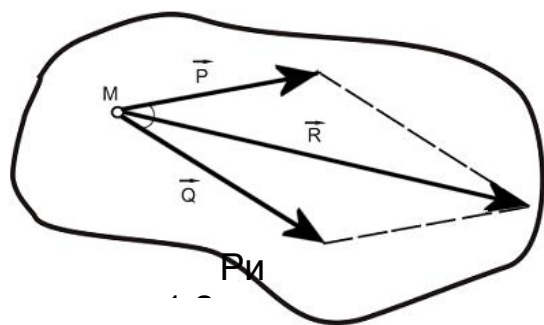
Не нарушая кинематического состояния твердого тела, к нему можно

добавлять или исключать систему уравнивающих сил.

Следствие.

Не изменяя кинематического состояния твердого тела силу можно переносить вдоль линии её действия, сохраняя ее модуль и направление. В статике твердого тела сила рассматривается как скользящий вектор.

4. Аксиома параллелограмма сил.



Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

Равнодействующая $\vec{R}$ выражается геометрически равенством

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} + \dot{\vec{Q}} . \quad (1.1)$$

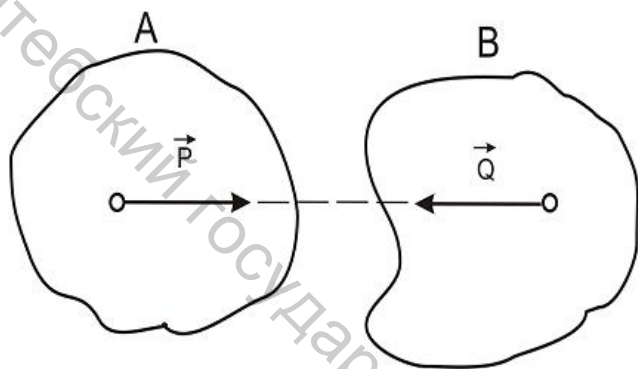
Модуль равнодействующей определяется равенством

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos j} . \quad (1.2)$$

5. Аксиома равенства действия и противодействия.

Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Следует иметь в виду, что силы взаимодействия не составляют систему уравновешенных сил, т. к. они приложены к разным телам. Если тело А действует на тело В с силой $\dot{\vec{P}}$, а тело В действует на тело А с силой $\dot{\vec{Q}}$, то эти силы равны по модулю ($P=Q$) и направлены по одной прямой в противоположные стороны, т. е. $\dot{\vec{P}} = -\dot{\vec{Q}}$.



6. Аксиома отвердевания.

Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, сохраняется при затвердевании.

Условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для твердого тела, являются необходимыми, но недостаточными для соответствующего нетвердого тела. Например, абсолютно твердый стержень АВ мо-

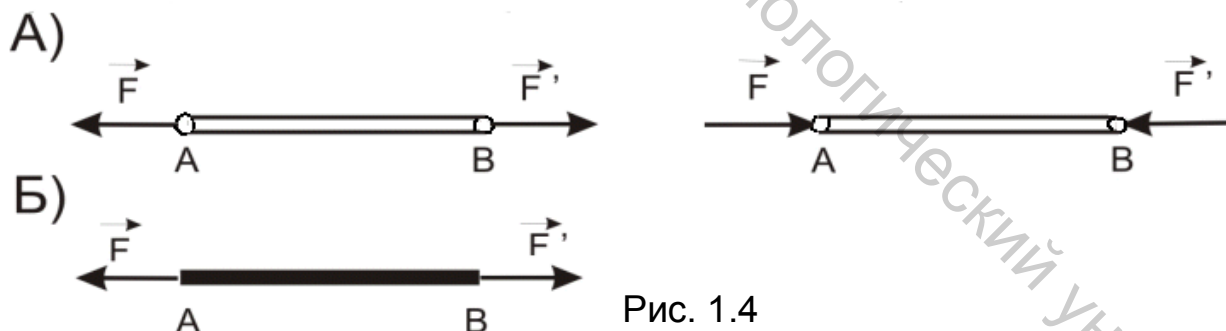


Рис. 1.4

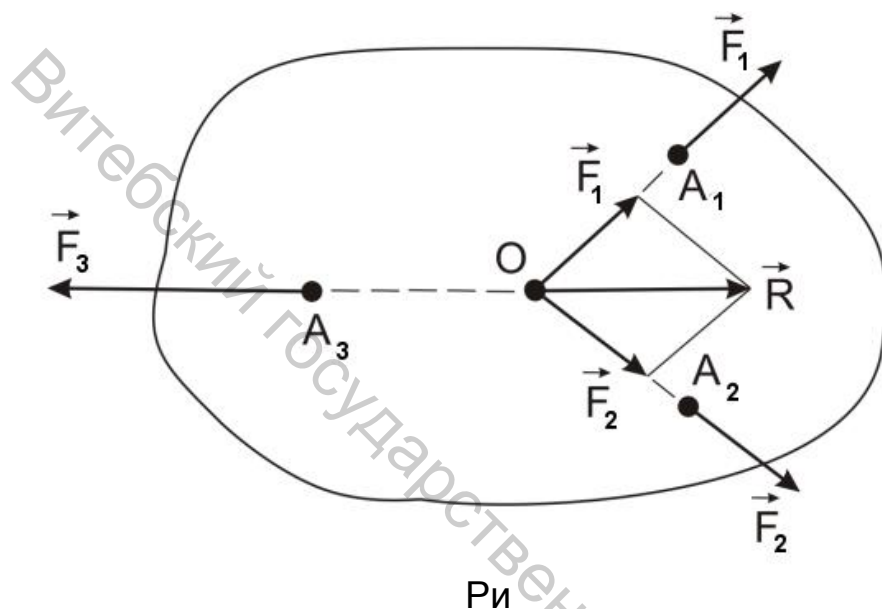
жет находиться в равновесии под действием двух сил, равных по модулю и направленных вдоль стержня либо навстречу друг другу, либо друг от друга (т.е. под действием как сжимающих, так и растягивающих сил) (рис 1.4, а). Нить, соответствующая этому стержню, может находиться в равновесии только под действием двух сил, направленных друг от друга.

Рассмотрим случай эквивалентности нулю трех непараллельных сил, приложенных к твердому телу.

Теорема о трех непараллельных силах

Линии действия трех непараллельных, лежащих в одной плоскости и взаимно уравновешивающихся сил, пересекаются в одной точке.

Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, A_3 приложены три непараллельные взаимно уравнивающиеся силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Т. к. силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ расположены в одной плоскости, то эти силы можно перенести в точку O пересечения их линий действия и определить их равнодействующую $\vec{R}$, которая будет приложена в этой же точке.



Т. к. по условию силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ уравниваются, то силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}$ должны быть равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку O .

1.3. Связи. Реакции связей

Твердое тело называется свободным, если его перемещения в пространстве в любом направлении ничем не ограничены.

Твердое тело, перемещение которого ограничено другими телами, называется несвободным.

Тело, ограничивающее перемещение данного твердого тела, называется связью.

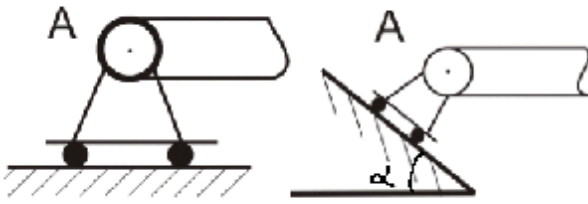
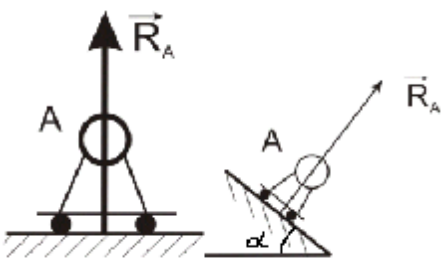
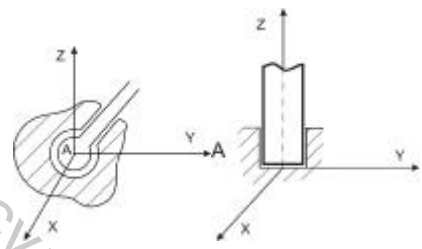
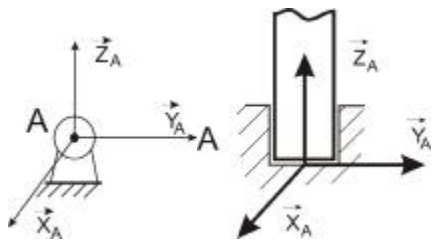
Силы, с которыми связи действуют на данное твердое тело, называются реакциями связей.

Одним из основных положений механики является принцип освобожденности от связей: несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив действие связей соответствующими реакциями связей.

В таблице 1.1 рассмотрены некоторые типичные виды связей и указаны возможные направления их реакций.

Таблица 1.1. Типы связей и их реакции

Виды связей	Условные обозначения связей	Направление реакций
Гибкая связь		
Невесомый стержень		
Цилиндрический шарнир. Подшипник		
Жесткая заделка		

Подвижная опора		
Сферический шарнир. Подпятник		

Пример:

Реакцию $\vec{R}$ жесткой заделки заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, а реактивный момент m_A условно направляем противоположно возможному повороту балки вокруг оси A.

1.4. Проекция силы на ось и на плоскость

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между направлениями оси и силы.

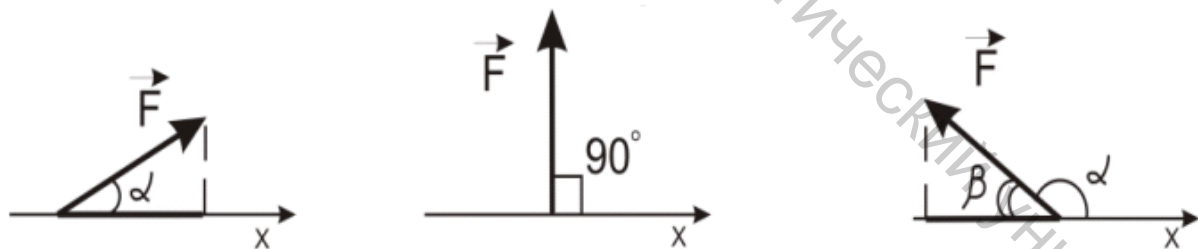


Рис. 1.6

При этом проекция будет положительной, если угол $\alpha < 90^\circ$, и отрицательной, если угол $\alpha > 90^\circ$. В этом случае проекцию силы $\vec{F}$ на ось x можно определить следующим образом:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos(180^\circ - b) = -F \cdot \cos b \quad (1.3)$$

Если сила перпендикулярна к оси, то её проекция на ось равна нулю.

Для определения проекции силы $\vec{F}$ на неподвижные декартовы оси x, y, z выберем правую систему координат, т.е. такую, в которой кратчайший

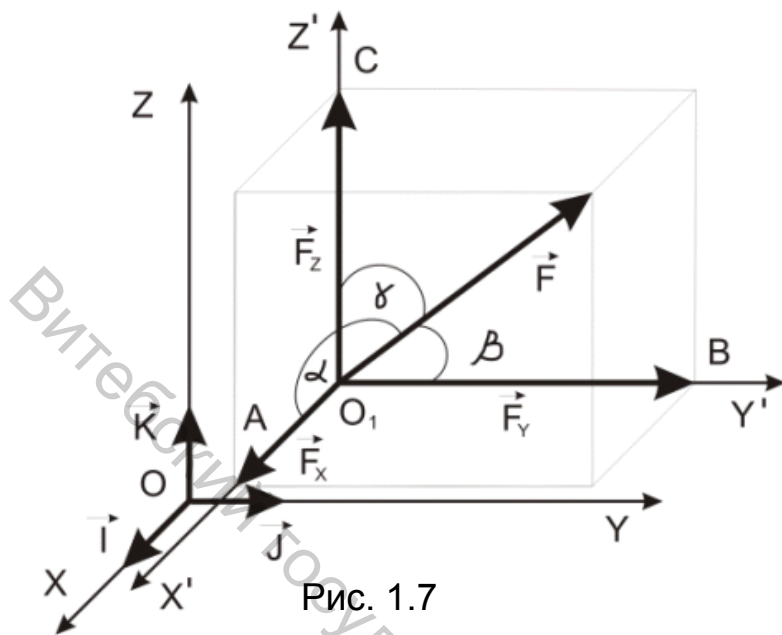


Рис. 1.7

следующим формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} ; \quad (1.5)$$

$$\cos a = \cos(F; x) = \frac{F_x}{F} ; \quad \cos b = \cos(F; y) = \frac{F_y}{F} ;$$

$$\cos g = \cos(F; z) = \frac{F_z}{F} .$$

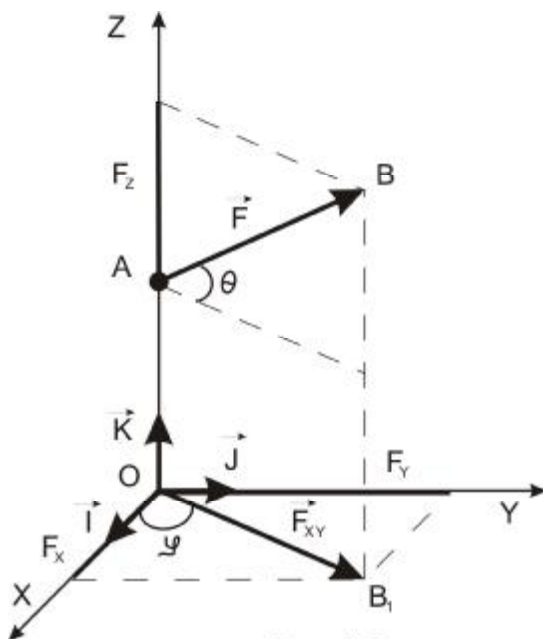


Рис. 1.8

поворот оси Ox к Oy происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси Oz .

Силы $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ называются компонентами силы $\vec{F}$ по осям координат x , y и z . По определению проекции силы на ось следует, что

$$F_x = F \cdot \cos a ;$$

$$F_y = F \cdot \cos b ;$$

$$F_z = F \cdot \cos g . \quad (1.4)$$

Зная проекции силы на три взаимно перпендикулярные оси x , y , z , можно определить модуль и направление силы по

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ –единичные векторы, направленные по осям x , y , z :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad \text{или}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \quad (1.6)$$

Равенство (1.6) представляет собой формулу разложения силы на составляющие по осям координат.

Проекцией силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $\vec{F}_{xy} = \vec{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\vec{F}$ на эту плоскость.

Проекция силы на плоскость есть величина векторная, т. к. она характеризуется своим численным значением и направлением в плоскости Oxy . По модулю

$$F_{xy} = F \cdot \cos q ,$$

где q –угол между направлением силы $\vec{F}$ и её проекции $\vec{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для определения проекции силы на ось можно найти сначала её проекцию на плоскость, в которой лежит эта ось, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cdot \cos j = F \cdot \cos q \cdot \cos j ; \\ F_y &= F_{xy} \cdot \sin j = F \cdot \cos q \cdot \sin j ; \\ F_z &= F \cdot \sin q . \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.5. Система сходящихся сил. Методы сложения сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил.

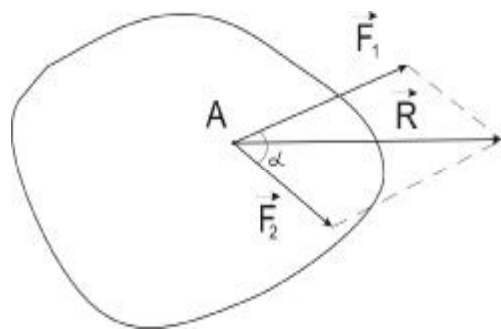
Равнодействующая $\vec{R}$ двух, пересекающихся в некоторой точке сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равна геометрической сумме этих сил и определяется диагональю параллелограмма, построенного на силах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. В этом случае

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (1.8)$$

а модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} ; \quad (1.9)$$

α –угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.



При графическом определении равнодействующей двух сходящихся сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ достаточно из конца вектора $\vec{F}_1$ провести вектор параллельный и равный по модулю вектору $\vec{F}_2$. Вектор, соединяющий начало первого вектора $\vec{F}_1$ и конец второго вектора $\vec{F}_2$ изображает

равнодействующую $\vec{R}$ сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Вектор $\vec{AC} = \vec{R}$ называется замыкающей стороной силового треугольника ABC (рис. 1.10).

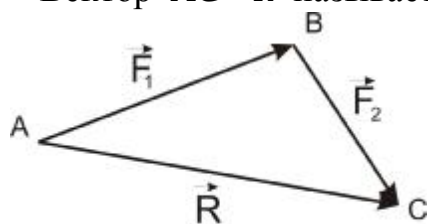


Рис. 1.10

Равнодействующая $\vec{R}$ системы сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и изображается замыкающей стороной многоугольника, построенного на слагаемых силах. Равнодействующая $\vec{R}$ равна векторной

сумме слагаемых сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.10)$$

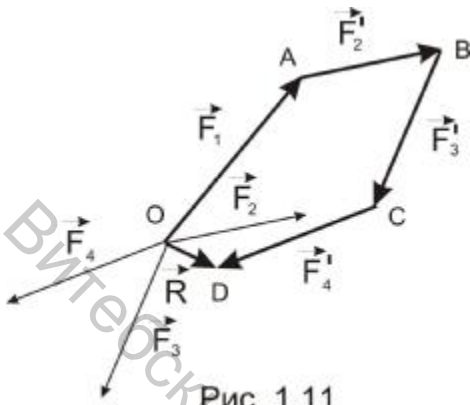


Рис. 1.11

При построении суммы векторов (рис. 1.11) надо к концу вектора $\vec{F}_1$ приложить вектор $\vec{F}_2$, равный вектору $\vec{F}_2$, к концу вектора $\vec{F}_2'$ присоединить вектор $\vec{F}_3'$, равный вектору $\vec{F}_3$, и т. д.

Суммой векторов является замыкающий вектор $\vec{OD} = \vec{R}$, начало которого совмещено с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом последнего слагаемого вектора.

Многоугольник OABCD называется силовым многоугольником.

Изложенный способ определения равнодействующей является геометрическим. Однако модуль и направление равнодействующей $\vec{R}$ можно определить аналитическим способом по проекциям на неподвижные оси декартовой системы координат, выбрав за начало координат точку O пересечения линий действия системы сходящихся сил (рис. 1.12).

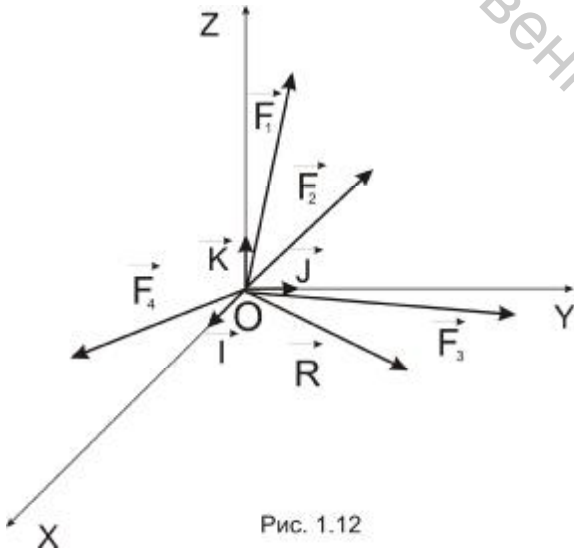


Рис. 1.12

Пользуясь теоремой (она доказывается в курсе векторной алгебры), согласно которой проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов, получим

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ R_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы $\vec{F}_k$ на указанные оси, R_x, R_y, R_z – проекции равнодействующей на

те же оси.

Итак, проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Зная проекции равнодействующей на оси координат, определим её модуль и направление. Модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad \text{или} \quad R = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}. \quad (1.12)$$

Направление равнодействующей определим по направляющим косинусам. Если ввести орты координатных осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\cos(\vec{R}; i) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}; j) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}; k) = \frac{R_z}{R}. \quad (1.13)$$

Система сходящихся сил, расположенных на плоскости, определяется двумя проекциями R_x и R_y , а аналогичные формулы примут вид:

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}. \quad (1.14)$$

1.6. Равновесие системы сходящихся сил. Уравнения равновесия системы сходящихся сил

Ранее было доказано, что система сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ эквивалентна равнодействующей силе, т. е.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sqcup \vec{R}. \quad (1.15)$$

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их равнялась нулю.

$$\vec{R} = 0, \quad \text{или} \quad \sum \vec{F}_k = 0 \quad (1.16)$$

Т. к. векторная сумма сил равна нулю, то силовой многоугольник является замкнутым, т. е. начало первого вектора и конец последнего совпадают (рис. 1.13).

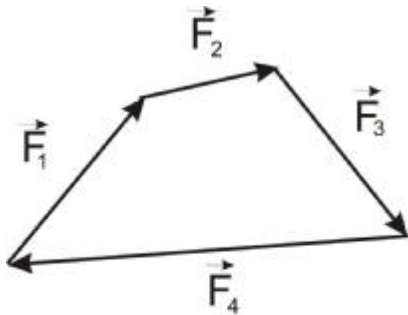


Рис. 1.13

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым. Данное условие является геометрическим условием равновесия сходящихся сил. Векторное равенство (1.16) эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0.$$

На основании равенства (1.12) предыдущего параграфа получим:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

т. е. для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенство нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.

Для плоской системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости xy , третье условие в (1.17) отпадает, т. е. обращается в тождество. Тогда получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \quad (1.18)$$

Условия равновесия (1.17) и (1.18) в аналитической форме называются уравнениями равновесия.

Решение любых задач на равновесие твердого тела, независимо от взаимного расположения приложенных к телу сил, предлагается проводить по следующей методике:

- 1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для определения неизвестных величин;
- 2) изобразить активные (заданные) силы;
- 3) если твердое тело несвободно, то следует применить принцип освобождения от связей, т. е. мысленно отбросить связи и заменить действия связей на твердое тело соответствующими реакциями связей;
- 4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося в равновесии под действием активных сил и реакций связей;
- 5) использовать уравнения равновесия в соответствии с расположением сил, приложенных к твердому телу, и определить искомые величины.

Пример 1.1:

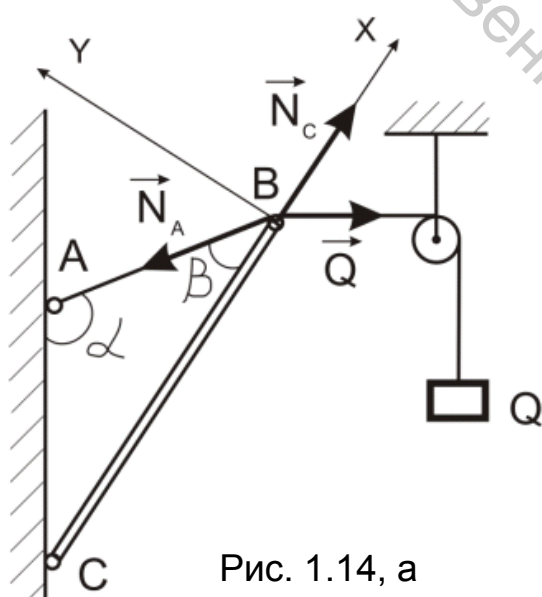


Рис. 1.14, а

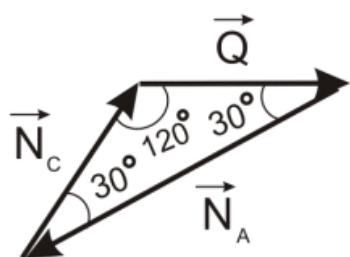


Рис. 1.14, б

К шарниру В кронштейна ABC прикреплена веревка, перекинутая через блок, к другому концу которой привязан груз весом $Q=2$ кН. Определить усилия в стержнях АВ и СВ кронштейна, если крепления в точках А и С шарнирные, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Решение:

1. На шарнир В в направлении к блоку действует реакция веревки, равная по модулю весу груза Q , и вызывает появление усилий, направленных вдоль стержней. При этом стержень АВ растягивается, а стержень ВС сжимается. Т. к. рассматривается равновесие шарнира В, то стержни отбрасываем, заменяя их действие на шарнир реакциями $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_C$. Силы $\vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{N}_C$ образуют уравновешенную систему сходящихся сил, лежащих в одной плоскости.

Решим эту задачу в аналитической форме. Для этого точку В выберем за начало координат, а оси координат направим так, как показано на рис. 1.14, а. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & N_C + Q \cdot \cos 60^\circ - N_A \cdot \cos 30^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0; & N_A \cdot \cos 60^\circ - Q \cdot \cos 30^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$N_A = \frac{Q \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = Q \cdot \sqrt{3} = 3,46 \text{ кН},$$

$$N_C = N_A \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \cos 60^\circ = Q = 2 \text{ кН}.$$

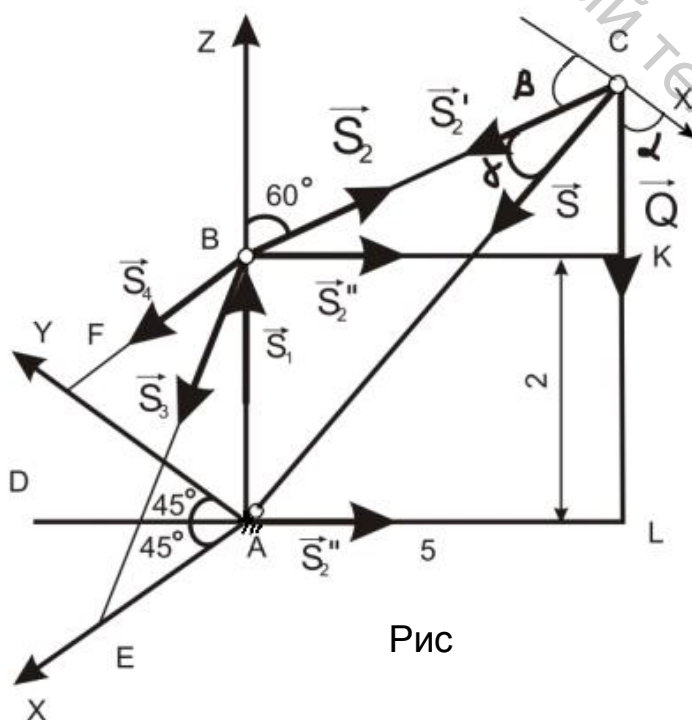
2. Эту же задачу можно решить, применив геометрическую форму условия равновесия. Строим замкнутый силовой треугольник, для чего из конца вектора $\vec{Q}$ проводим прямую, параллельную линии действия вектора $\vec{N}_A$, а из начала вектора $\vec{Q}$ проводим прямую, параллельную линии действия вектора $\vec{N}_C$ (1.14, б). В полученном равнобедренном треугольнике известна сила $Q = 2 \text{ кН}$ и углы. Поэтому $N_C = Q = 2 \text{ кН}$. Силу N_A можно найти по теореме синусов:

$$\frac{N_A}{\sin 120^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}, \text{ откуда } N_A = Q \cdot \sqrt{3} = 3,46 \text{ кН}.$$

Получили, что стержень АВ растягивается силой 3,46 кН, а стержень ВС сжимается силой 2 кН.

Пример 1.2:

Переносной кран, поднимающий груз $Q = 20 \text{ кН}$, устроен так, как показано на рисунке; $AB = AE = AF = 2 \text{ м}$; $\angle EAF = 90^\circ$, плоскость крана ABC делит прямой двугранный $\angle EABF$ пополам. Определить силу S_1 , сжимающую вертикальную стойку АВ, а также силы S_2, S_3 и S_4 , растягивающие струну ВС и тросы ВЕ и ВF, пренебрегая весом частей крана.



Рис

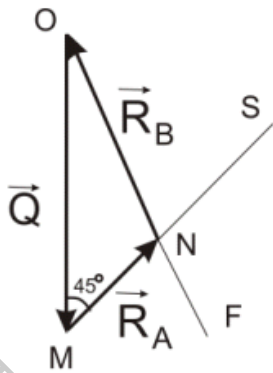
Решение: Для определения

искомых усилий рассмотрим равновесие узла В. На этот узел наложены четыре связи: стойка АВ, струна ВС и тросы ВЕ и ВF. Применив принцип освобожденности от связей, мысленно отбросим эти связи и заменим их действие соответствующими реакциями $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$. При равновесии

пространственной системы сходящихся сил можно составить три уравнения проекций сил на оси x, y, z . Т. к. число неизвестных превышает число уравнений, то для определения усилия S_2 рассмотрим равновесие узла С. На этот узел действует заданная сила $\vec{Q}$, реакция $\vec{S}$ струны АС, реакция $\vec{S}_2'$ струны СВ, причем $\vec{S}_2 = -\vec{S}_2'$ и численно $S_2 = S_2'$. Для

определения S_2' достаточно составить одно уравнение в проекции на ось x_1 , перпендикулярную отрезку АС. Тогда

$$\sum F_{kx_1} = 0, \quad Q \cdot \cos a - S_2' \cdot \cos b = 0. \quad (1.19)$$



Углы a и b можно выразить через угол $g = \angle BCA$, т. е. $a = 30^\circ + g$, $b = 90^\circ - g$. Определим значение угла g . Из треугольника ВСК получим, что $CK = BK \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{5}{\sqrt{3}}$ м.

Тогда $CL = KL + CK = 4,89$ м. Из треугольника ACL найдем AC:

$$AC = \sqrt{(AL)^2 + (CL)^2} = 6,99 \text{ м.}$$

Угол g определяется из треугольника ABC по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin g} = \frac{AC}{\sin 120^\circ},$$

откуда $\sin g = 0,248$, $g = \arcsin 0,248 = 14^\circ 24'$.

Зная угол g , из уравнения (1.19) найдем значение усилия S_2' :

$$S_2' = \frac{Q \cdot \cos(30^\circ + g)}{\sin g} = 58 \text{ кН.}$$

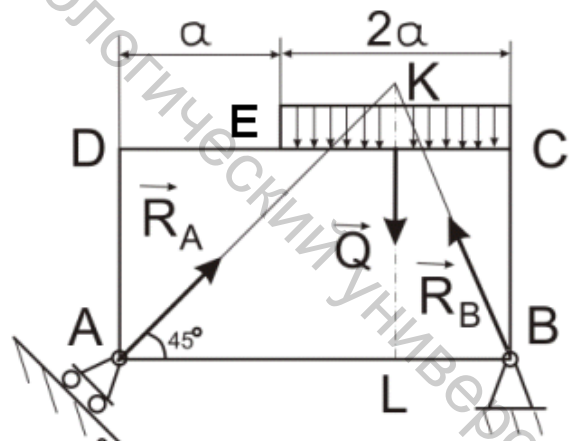
Теперь составим три уравнения равновесия пространственной системы сил, сходящихся в узле В. Для определения проекции силы $\dot{S}_2$ на оси x и y используем двойное проектирование: вначале вектор $\dot{S}_2$ проектируем в плоскость xu , получим вектор $\dot{S}_2''$, модуль которого $S_2'' = S_2 \cdot \cos 30^\circ$; полученный вектор $\dot{S}_2''$ проектируем на оси x и y . Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & S_3 \cdot \cos 45^\circ - S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & S_4 \cdot \cos 45^\circ - S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & S_1 + S_2 \cdot \cos 60^\circ - S_3 \cdot \cos 45^\circ - S_4 \cdot \cos 45^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Из этих уравнений получим, что $S_3 = S_4 = 50 \text{ кН}$, $S_1 = 42 \text{ кН}$.

Пример 1.3:

Жесткая рама ABCD в точке В укреплена на неподвижном шарнире, в точке А поставлена на каток. Пролёт CE рамы нагружен равномерно распределенной силой интенсивности q . Определить величины реакций опор, если $a = 3 \text{ м}$, $q = 2 \text{ Н/м}$ (рис.1.16,а).



Решение: К решению задачи применим теорему о трех непараллельных силах. Заданную равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot 2a = 12 \text{ Н}$, линия действия которой пройдет через середину отрезка CE. На раму наложены две связи: неподвижный шарнир В и каток в точке А. В случае равновесия рамы линии действия силы $\dot{Q}$ и реакций $\dot{R}_A$ и $\dot{R}_B$ должны пересекаться в одной точке. Реакция $\dot{R}_A$ перпендикулярна наклонной плоскости, на которой находится каток А, линия

действия реакции $\dot{R}_B$ неопределена. Так как линии действия сил $\dot{R}_A$ и $\dot{Q}$ пересекаются в точке К, то и линия действия реакции $\dot{R}_B$ должна проходить через эту точку. Для определения направления реакции $\dot{R}_B$ строим замкнутый силовой треугольник (рис. 1.16, б). Из произвольной точки О проводим вектор, равный вектору $\dot{Q}$.

Проведя через начало вектора $\dot{Q}$ прямую OF, параллельную реакции $\dot{R}_B$, а через конец вектора $\dot{Q}$ – прямую MS, параллельную реакции $\dot{R}_A$, получим в точке пересечения этих прямых третью вершину N силового треугольника OMN. Угол между векторами $\dot{R}_A$ и $\dot{Q}$ равен 45° , а угол между векторами $\dot{Q}$ и $\dot{R}_B$ обозначим через α . Применив к силовому треугольнику теорему синусов, получим

$$\frac{Q}{\sin[180^\circ - (45^\circ + \alpha)]} = \frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{R_B}{\sin 45^\circ} \quad (1.20)$$

Для определения угла α рассмотрим треугольник BKL (рис. 1.16, а). Так как треугольник ALK – прямоугольный равнобедренный, то $KL = 2a$. Тогда $BK = a\sqrt{5}$, откуда $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда из соотношений (1.20) найдем искомые значения $\dot{R}_A$ и $\dot{R}_B$:

$$R_A = \frac{Q \cdot \sin \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)} = 5,65 \text{ Н.}$$

$$R_B = \frac{Q \cdot \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + \alpha)} = 8,94 \text{ Н.}$$

Глава II

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ. ПАРА СИЛ

2.1 Момент силы относительно центра

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторого центра O называется вектор, приложенный в этом центре, и выражаемый векторным произведением радиус-вектора точки приложения силы и вектора силы $\vec{F}$.

Итак, по определению

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.1)$$

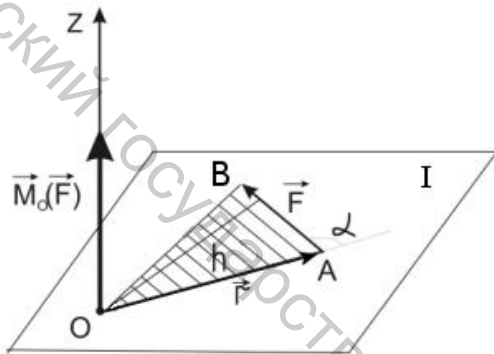


Рис. 2.1

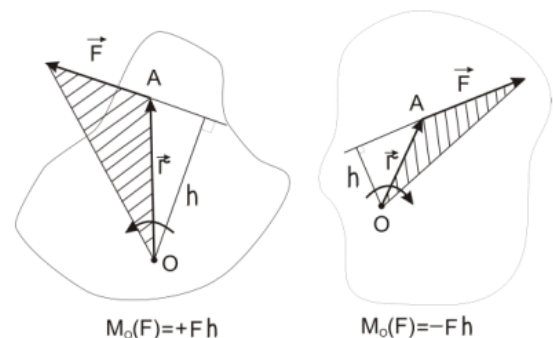


Рис. 2.2

Вектор $\vec{M}_O$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и линию действия силы в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ виден против хода часовой стрелки.

Обозначая длину перпендикуляра, опущенного из центра момента O на линию действия силы, через h (величину h в дальнейшем будем называть плечом), можно модуль вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ представить в виде:

$$|M_O(\vec{F})| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h. \quad (2.2)$$

Если зафиксировать ось Oz , направленную перпендикулярно плоскости I , содержащей силу и центр O , то можно вместе с вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ рассматривать проекцию этого вектора на ось z . Поскольку эта проекция может быть положительной и отрицательной, её можно назвать алгебраическим значением момента силы относительно центра, т.е.

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (2.3)$$

Условимся считать, что алгебраический момент будет положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу часовой стрелки (рис. 2.2).

Иногда формулу (2.2) можно записать в виде:

$$M_O(\vec{F}) = 2S, \quad (2.4)$$

где S – площадь треугольника OAB .

Для аналитического определения момента силы относительно центра О выберем произвольную систему координат Охуз с началом в точке О. Пусть x, y, z – координаты точки А приложения силы, а F_x, F_y, F_z – проекции силы на координатные оси. Тогда момент силы $\vec{F}$ выражается следующим образом:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} +$$

$$+(zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что проекции момента силы на координатные оси определяются формулами

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ M_{Oy}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ M_{Oz}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

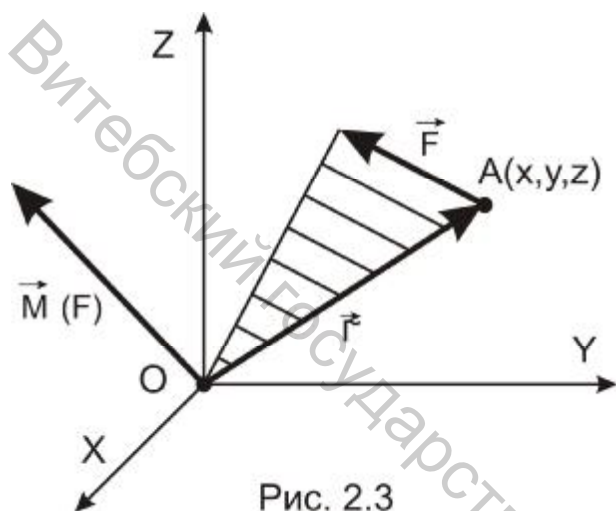


Рис. 2.3

2.2. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментом силы относительно центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр

Моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

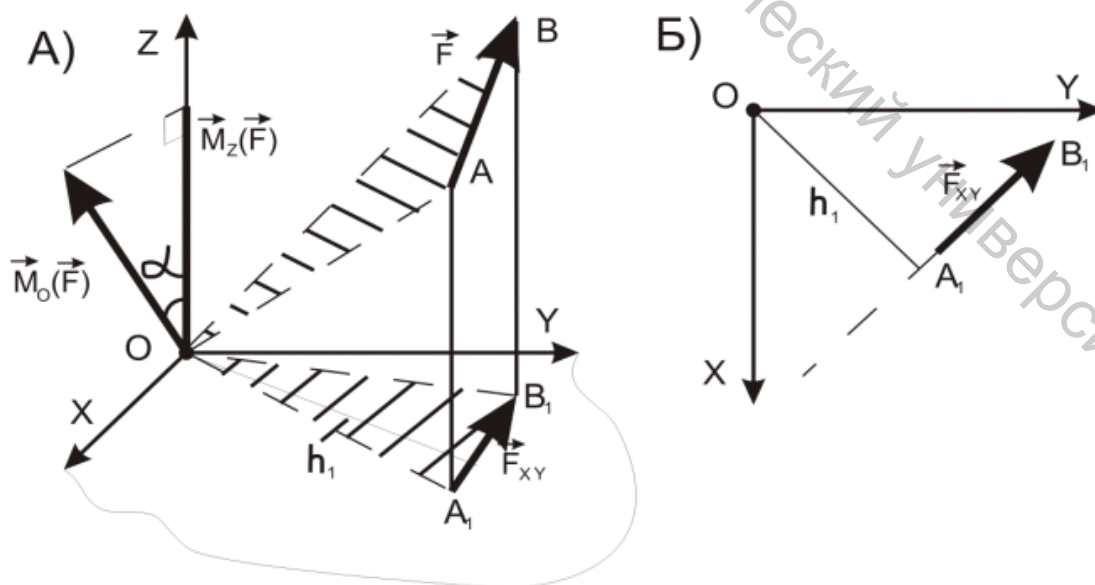


Рис. 2.4

Итак, по определению

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h_1. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) дает возможность сформулировать правило для вычисления момента силы относительно оси. Для этого необходимо:

- 1) выбрать на оси произвольную точку и построить плоскость, перпендикулярную этой оси (рис. 2.4, а);
- 2) спроектировать силу на эту плоскость;
- 3) определить плечо h_1 проекции силы $\vec{F}_{xy}$ (рис. 2.4, б).

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О можно определить по формуле (2.5) предыдущего параграфа, если в ней положить $z = 0, F_z = 0$. Получим:

$$M_{0z}(\vec{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\vec{k}. \quad (2.8)$$

Таким образом, этот момент направлен вдоль оси z , а его проекция на ось z совпадает с проекцией на ту же ось момента силы $\vec{F}$ относительно точки О, т. е.

$$M_{0z}(\vec{F}) = M_{0z}(\vec{F}_{xy}) = xF_y - yF_x. \quad (2.9)$$

Другими словами, проекция момента силы относительно центра О на ось, проходящую через этот центр, равна моменту силы относительно этой оси. Обозначив через α угол между $M_0(\vec{F})$ и осью z , получим:

$$M_z = M_0 \cdot \cos \alpha. \quad (2.10)$$

При вычислении момента силы относительно оси необходимо иметь в виду некоторые частные случаи:

- 1) если сила параллельна оси, то её момент относительно оси равен нулю (т. к. $F_{xy} = 0$);
- 2) если линия действия силы пересекает ось, то её момент относительно оси также равен нулю (т. к. $h_1 = 0$).

Оба эти случая можно объединить в один: момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости.

Механический смысл величины $M_z(\vec{F})$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы $\vec{F}$, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z .

2.3. Пара сил. Момент пары сил. Равновесие системы пар сил

Парой сил называется система двух параллельных сил, равных по модулю и противоположно направленных. Так как две силы, образующие пару, не лежат на одной прямой, то твердое тело, к которому она приложена, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена.

Мерой действия пары сил является момент пары сил. Момент пары рассматривается как вектор, направленный по перпендикуляру к плоскости действия заданной пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.5).

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары.

Модуль момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо пары:

$$|M(\vec{F}, \vec{F}')| = F \cdot h. \quad (2.11)$$

Пару сил можно располагать где угодно в плоскости её действия или в плоскости, ей параллельной, а вектор момента пары можно прикладывать в любой точке плоскости действия пары.

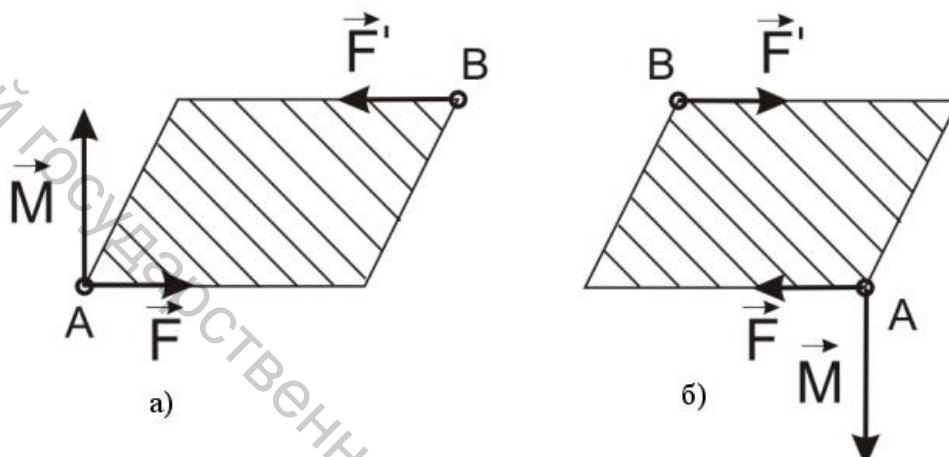


Рис. 2.5

Теория пар на плоскости и в пространстве сводится к следующим теоремам:

Теорема 1. Сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой берутся моменты, и равна моменту пары сил.

Теорема 2. Не изменяя состояния твердого тела, пару сил можно перемещать в плоскости её действия.

Теорема 3. Пары сил, моменты которых численно равны и одинаковы по знаку, эквивалентны.

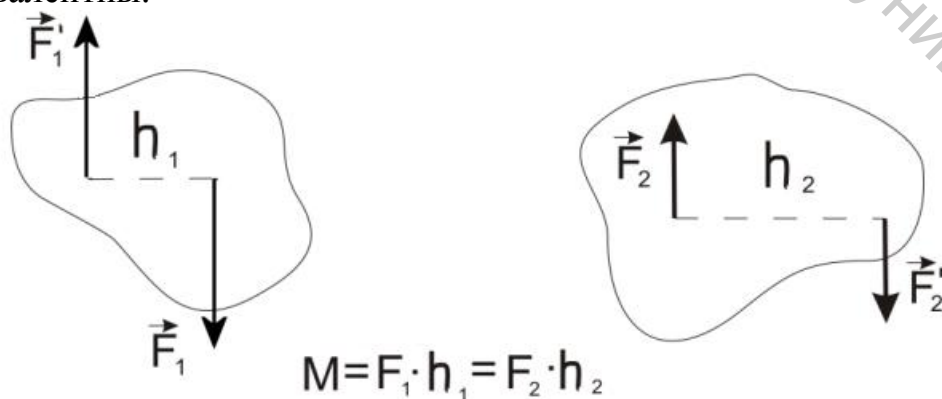


Рис. 2.6

Пары сил называются эквивалентными, если одну из пар можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела, т.е. можно изменять плечо пары и силу, сохраняя неизменным момент пары сил (рис. 2.6).

Теорема 4. Система пар на плоскости эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k. \quad (2.12)$$

Пары сил на плоскости уравниваются в том случае, если алгебраическая сумма их моментов равна нулю.

Теорема 5. Пары сил эквивалентны, если их моменты геометрически равны.

Не изменяя состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскость, параллельную данной.

Теорема 6. Система пар сил в пространстве эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар, т.е.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k. \quad (2.13)$$

Для равновесия системы пар в пространстве, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов этих пар была равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0. \quad (2.14)$$

Пример 2.1:

Показать, что моменты пар $(\vec{P}, \vec{P}')$ и $(\vec{Q}, \vec{Q}')$, приложенные к квадрату, алгебраически равны, если $P = 2 \text{ Н}$, $Q = \sqrt{2} \text{ Н}$, сторона квадрата 4 см (рис. 2.7).

Решение: Момент пары $(\vec{P}, \vec{P}')$ положителен и численно

$$M_1 = M(\vec{P}, \vec{P}') = P \cdot a = 0,08 \text{ Нм}.$$

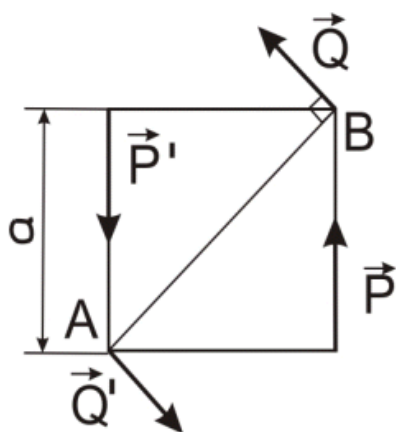


Рис. 2.7

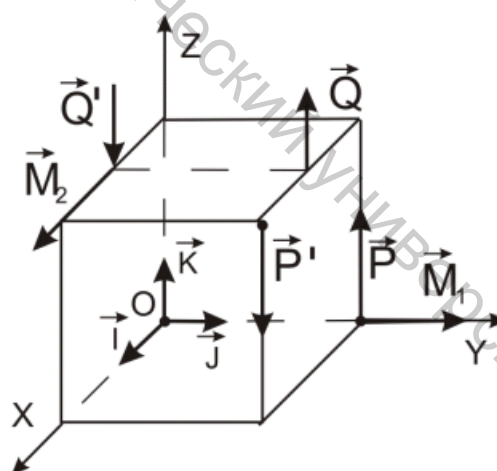


Рис. 2.8

Момент пары $(\vec{Q}, \vec{Q}')$ по знаку также положителен и численно равен $M_2 = M(\vec{Q}, \vec{Q}') = Q \cdot AB$, где AB – плечо пары, причем $AB = a\sqrt{2}$ см.

Тогда $M_2 = Q \cdot a\sqrt{2} = 0,08$ Нм.

Получили, что моменты этих пар алгебраически равны.

Пример 2.2:

К кубу с ребром $a = 2$ м приложены две пары сил $(\vec{P}, \vec{P}')$ и $(\vec{Q}, \vec{Q}')$. Найти вектор-момент такой пары сил, чтобы под действием трех пар сил куб находился в равновесии, если $P = 4$ кН, $Q = 3$ кН (рис. 2.8).

Решение:

Три пары сил, приложенных к кубу, будут находиться в равновесии, если

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0, \quad (2.15)$$

где $\vec{M}_1 = \vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')$, $\vec{M}_2 = \vec{M}(\vec{Q}, \vec{Q}')$, $\vec{M}_3$ – момент искомой пары сил.

В проекциях на оси x, y, z получим:

$$\begin{cases} M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = 0, \\ M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = 0, \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Вектор $\vec{M}_1$ пары $(\vec{P}, \vec{P}')$ параллелен оси y , а вектор $\vec{M}_2$ пары $(\vec{Q}, \vec{Q}')$ параллелен оси x , тогда уравнения (2.16) примут вид:

$$\begin{cases} M_2 + M_{3x} = 0, \\ M_1 + M_{3y} = 0, \\ M_{3z} = 0. \end{cases}$$

Численно моменты заданных пар:

$$M_1 = P \cdot a = 8 \text{ кН}, \quad M_2 = Q \cdot a = 6 \text{ кН}.$$

Соответственно:

$$M_{3x} = -M_2 = -6 \text{ кН}, \quad M_{3y} = -M_1 = -8 \text{ кН}.$$

Окончательно:

$$\vec{M}_3 = M_{3x} \vec{i} + M_{3y} \vec{j} + M_{3z} \vec{k}, \quad \text{или} \quad \vec{M}_3 = -6\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Глава III

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

3.1. Приведение плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент плоской системы сил

Для сложения сил, произвольно расположенных на плоскости, применяется метод, предложенный французским ученым Пуансо. Сущность этого метода заключается в следующем: не нарушая состояния твердого тела, силу $\vec{F}$, приложенную в точке А, можно заменить силой $\vec{F}'$, приложенную в точке О, и парой сил, момент которой равен моменту заданной силы $\vec{F}$ относительно точки О (рис. 3.1).

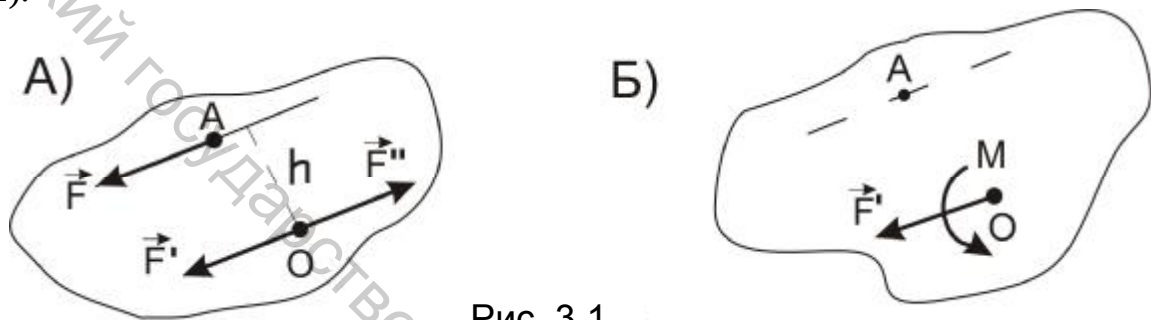


Рис. 3.1

Точку О будем называть центром приведения.

В результате приведения сил, произвольно расположенных на плоскости, к центру приведения О, получим совокупность сил, приложенных в этом центре, и совокупность пар сил, моменты которых равны моментам данных сил относительно центра приведения О.

Главным вектором $\vec{R}_0$ произвольной плоской системы сил называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, т. е.

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (3.1)$$

Проекции главного вектора R_x и R_y на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам проекций данных сил на соответствующие оси:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \quad (3.2)$$

Модуль главного вектора

$$R_0 = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} \quad (3.3)$$

Направляющие косинусы главного вектора определяются формулами

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R_0}, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R_0}.$$

Главным моментом M_0 относительно центра приведения О называется алгебраическая сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого центра, т. е.

$$M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\vec{F}_k). \quad (3.5)$$

В соответствии с определением главный вектор $\dot{\mathbf{R}}_0$ является статическим инвариантом, т. е. модуль и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения, а главный момент изменяется с изменением центра приведения. Зависимость главного момента от выбора центра приведения выражается следующей формулой:

$$M_{O_1} = M_0 + m_{O_1}(\dot{\mathbf{R}}_0), \quad (3.6)$$

где O и O_1 – различные центры приведения.

Следует различать главный вектор $\dot{\mathbf{R}}_0$ и равнодействующую $\dot{\mathbf{R}}$.

Равнодействующая – сила, эквивалентная данной системе сил, а главный вектор – сила, эквивалентная данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту M_0 .

3.2. Частные случаи приведения произвольной плоской системы сил. Равновесие произвольной плоской системы сил

Рассмотрим различные варианты приведения сил, произвольно расположенных на плоскости.

1. $\dot{\mathbf{R}}_0 = 0, M_0 \neq 0$

Заданная система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту сил относительно центра приведения. В этом случае главный момент системы сил не зависит от центра приведения.

2. $\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0, M_0 = 0$

В этом случае система сил приводится к равнодействующей $\dot{\mathbf{R}}$, приложенной в центре приведения системы.

3. $\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0, M_0 \neq 0$

В этом случае система сил приводится к равнодействующей $\dot{\mathbf{R}}$, линия действия которой отстоит от линии действия главного вектора $\dot{\mathbf{R}}_0$ на расстоянии $h = \frac{M_0}{R_0}$, а модуль равнодействующей совпадает с модулем главного вектора.

4. $\dot{\mathbf{R}}_0 = 0, M_0 = 0$

В этом случае плоская система сил находится в равновесии.

Все частные случаи, встречающиеся при сложении произвольной плоской системы сил, можно представить таблицей 3.1.

Таблица 3.1

$\dot{\mathbf{R}}_0 = 0, M_0 \neq 0$	Система сил приводится к паре сил, момент которой равен $M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\mathbf{r}_k)$ и не зависит от выбора центра приведения.
$\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0, M_0 = 0$	Система сил приводится к равнодействующей $\dot{\mathbf{R}}^* = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$, проходящей через центр приведения O .

$\mathbf{\dot{R}}_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$	Система сил приводится к равнодействующей $\mathbf{\dot{R}}^* = \sum_{k=1}^n \mathbf{\dot{F}}_k$, не проходящей через центр приведения О.
$\mathbf{\dot{R}}_0 = 0$, $M_0 = 0$	Система сил находится в равновесии.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей плоской системы сил.

Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки:

$$M_0(\mathbf{\dot{R}}) = \sum_{k=1}^n m_0(\mathbf{\dot{F}}_k) \quad (3.7)$$

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\mathbf{\dot{R}}_0$ этих сил и их главный момент M_0 относительно произвольной точки О, лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbf{\dot{F}}_k &= 0, & \sum_{k=1}^n m_0(\mathbf{\dot{F}}_k) &= 0, & \text{или} \\ M_0 &= \sum_{k=1}^n m_0(\mathbf{\dot{F}}_k) = 0, \\ R_0 &= \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

В координатной форме эти условия выражаются тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_0(\mathbf{\dot{F}}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Т.е. для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x и y и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки О равнялись нулю.

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил можно выразить в двух других формах.

Алгебраическая сумма моментов сил данной системы относительно трех точек А, В, С, не лежащих на одной прямой, равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\mathbf{\dot{F}}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\mathbf{\dot{F}}_k) &= 0, \\ \sum m_C(\mathbf{\dot{F}}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек А и В и сумма проекций сил на какую-либо ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей точки А и В, равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к твердому телу имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum m_0(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

причем ось x параллельна данным силам.

Уравнения плоской системы параллельных сил можно выразить и в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

причем прямая AB не параллельна данным силам.

Для получения более простых уравнений равновесия следует иметь в виду следующее:

1. Для составления уравнения проекций следует направлять одну координатную ось перпендикулярно к линии действия одной или, если возможно, двух неизвестных сил.

2. Для составления уравнения моментов необходимо центр моментов выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил. Это позволит получить уравнение с одной неизвестной силой.

Последовательность решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил изложена в параграфе 1.6.

Пример 3.1:

Однородная балка AB веса 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим – на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. У конца B стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P ; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз P и реакции связей A и B (рис. 3.2).

Решение:

Рассмотрим равновесие балки, к которой приложена активная сила Q (сила тяжести балки). Применим принцип освобождения от связей и мысленно освободим балку от плоскостей и веревки BC . В точках A и B реакции $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ перпендикулярны опорным плоскостям, а реакция $\vec{T}$ веревки BC направлена вдоль веревки от балки, причем численно $T=P$. Выберем оси x и y , а за центр моментов примем точку B . Составим уравнения равновесия (3.9):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_B \cdot \cos 60^\circ - T \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (3.14)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_A + R_B \cdot \cos 30^\circ + T \cdot \cos 30^\circ - Q = 0, \quad (3.15)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad R_A \cdot BD - Q \cdot BE = 0 \quad (3.16)$$

Для определения значений BD и BE введем дополнительные обозначения: длина балки $AB = 2a$, угол, образуемый балкой с горизонтальной плоскостью, $\angle BAN = \alpha$. Тогда $BD = 2a \cos \alpha$, $BE = a \cos \alpha$.

Получим, что

$$R_A = Q \frac{BE}{BD} = \frac{Q}{2} = 50 \text{ Н.}$$

Для определения R_B

и T из уравнения (3.14) выразим зависимость между этими величинами и подставим в уравнение (3.15). Имеем, $R_B = T\sqrt{3}$. Тогда из уравнения (3.15) получим

$$2T = Q - R_A \text{ или } T = P = 25 \text{ Н.}$$

Значение реакции опоры в точке В

$$R_B = 25\sqrt{3} = 43,25 \text{ Н.}$$

Уравнения равновесия для этой балки можно составить так, что каждое из уравнений будет

содержать только одну неизвестную величину, т.е. составим уравнения равновесия по формулам (3.10)

$$\begin{aligned} \sum m_B(\vec{F}_k) &= 0, & R_A \cdot BD - Q \cdot BE &= 0 \\ \sum m_L(\vec{F}_k) &= 0, & Q \cdot FL - T \cdot BL &= 0 \\ \sum m_M(\vec{F}_k) &= 0, & Q \cdot KM - R_B \cdot BM &= 0 \end{aligned}$$

Получим, что $R_A = \frac{Q}{2} = 50 \text{ Н.}$

Из рисунка видно, что $FL = ED = a \cos \alpha$. Из треугольника BLM следует, что $BL = 2BD = 4a \cos \alpha$.

Тогда $T = \frac{Q \cdot FL}{BL} = \frac{Q \cdot a \cos \alpha}{4a \cos \alpha} = 25 \text{ Н, т. е. } P = 25 \text{ Н.}$

Из треугольника BLM следует, что $BM = BL \tan 30^\circ = \frac{4a \cos \alpha}{\sqrt{3}}$.

Так как $KM = ED = a \cos \alpha$, то

$$R_B = \frac{Q \cdot KM}{BM} = \frac{Q\sqrt{3}}{4} = 43,25 \text{ Н.}$$

Если вычисление плеч при определении моментов сил представляет значительные трудности, то лучше составлять уравнения равновесия в виде (3.9).

Пример 3.2:

Жесткая прямоугольная рама $ABCD$ в точке В укреплена неподвижным шарниром, в точке А катками опирается на гладкую неподвижную плоскость. Часть

рамы СК нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=2$ Н/м. В точке Е к раме приложена под углом 60° к горизонту сосредоточенная сила $P=6$ Н, к вертикальной части рамы AD приложена пара сил с моментом, равным $M = 4$ Нм. Пренебрегая весом рамы, определить опорные реакции в точках А и В, если $a=2$ м (рис. 3.3).

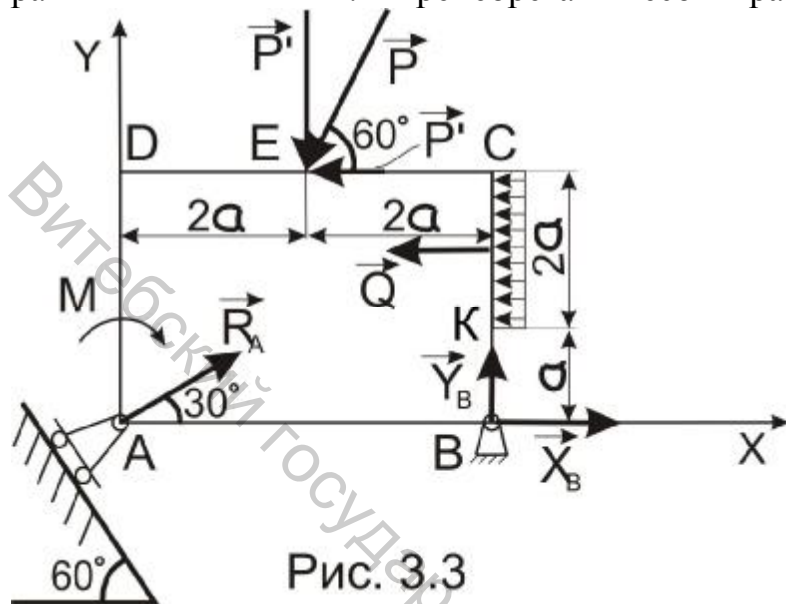


Рис. 3.3

Решение:

Рассмотрим равновесие рамы ABCD, к которой приложена сила $\vec{P}$, пара сил с моментом M и равномерно распределенная нагрузка, которую заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot CK = 8$ Н. Линия действия этой силы проходит через середину отрезка СК. Применим

принцип освобождения от связей и мысленно освободим раму от шарнирной опоры в точке В и подвижного катка в точке А. Реакция $\vec{R}_A$ катка направлена перпендикулярно опорной плоскости. Направление реакции $\vec{R}_B$ неподвижного шарнира В неизвестно, поэтому заменяем эту реакцию двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, направленными по осям x и y . Составляем уравнения равновесия. Для определения момента силы $\vec{P}$ относительно точки А применим теорему Вариньона: разложим силу $\vec{P}$ на составляющие $\vec{P}'$ и $\vec{P}''$, причем численно $P' = P \cos 60^\circ$, $P'' = P \cos 30^\circ$. Тогда, согласно теореме Вариньона, $m_A(\vec{P}) = m_A(\vec{P}') + m_A(\vec{P}'')$. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & X_B + R_A \cos 30^\circ - P \cos 60^\circ - Q &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_B + R_A \cos 60^\circ - P \cos 30^\circ &= 0, \\ \sum m_A(F_k) &= 0, & -M - P \cos 30^\circ \cdot 2a + P \cos 60^\circ \cdot 3a + Q \cdot 2a + Y_B \cdot 4a &= 0 \end{aligned} \quad (3.17-3.19)$$

Из уравнения (3.19) определяем значение $\vec{Y}_B$:

$$Y_B = \frac{M + P \cos 30^\circ \cdot 3a - P \cos 60^\circ \cdot 3a - Q \cdot 2a}{4a}$$

Подставив численные значения, получим, что $Y_B = -3,16$ Н.

Из уравнения (3.18) можно определить $\vec{R}_A$:

$$R_A = -2Y_B + P\sqrt{3} = 16,7 \text{ Н}$$

Значение $\vec{X}_B$ получим из уравнения (3.17):

$$X_B = Q + P \cos 60^\circ - R_A \cos 30^\circ = -3,45 \text{ Н.}$$

3.3. Статически определенные и статически неопределенные задачи. Равновесие системы твердых тел

Для произвольной плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых уравнения, из которых можно определить не более трех неизвестных.

Задачи, в которых число неизвестных не превосходит число независимых уравнений равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называются статически определенными.

В статике часто рассматриваются механические системы, представляющие собой совокупность твердых тел, которые могут быть соединены между собой при помощи шарниров, соприкасаться друг с другом и взаимодействовать одно с другим, вызывая силы взаимодействия. Такую систему взаимодействующих тел называют сочлененной.

Основной задачей статики системы твердых тел является определение реакций. Для её решения основным является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел. При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Следует учесть, что при рассмотрении равновесия всей системы тел реакции связи между телами, входящими в систему, не должны учитываться. Эти реакции являются внутренними силами и не входят в уравнения равновесия. Задачи на равновесие системы твердых тел следует решать в такой последовательности:

1. Выделить систему твердых тел, равновесие которой необходимо рассмотреть для определения неизвестных величин.
2. Изобразить активные силы.
3. Применив принцип освобожденности от связей, приложить к системе твердых тел соответствующие реакции.
4. Если число внешних реакций окажется больше трех, то необходимо систему тел расчленить и составить уравнения равновесия для каждого тела системы в отдельности.
5. Решить систему всех уравнений равновесия.

Если система состоит из двух тел, то применяя метод расчленения, получим в общем случае шесть уравнений равновесия (по три уравнения для каждого тела). Для составления шести уравнений равновесия можно применить другой прием: сначала составить три уравнения для всей системы в целом, как для одного абсолютно твердого тела, и затем к этим уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного из двух тел данной системы. Этот метод оказывается нередко предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят только внешние силы.

Пример 3.3:

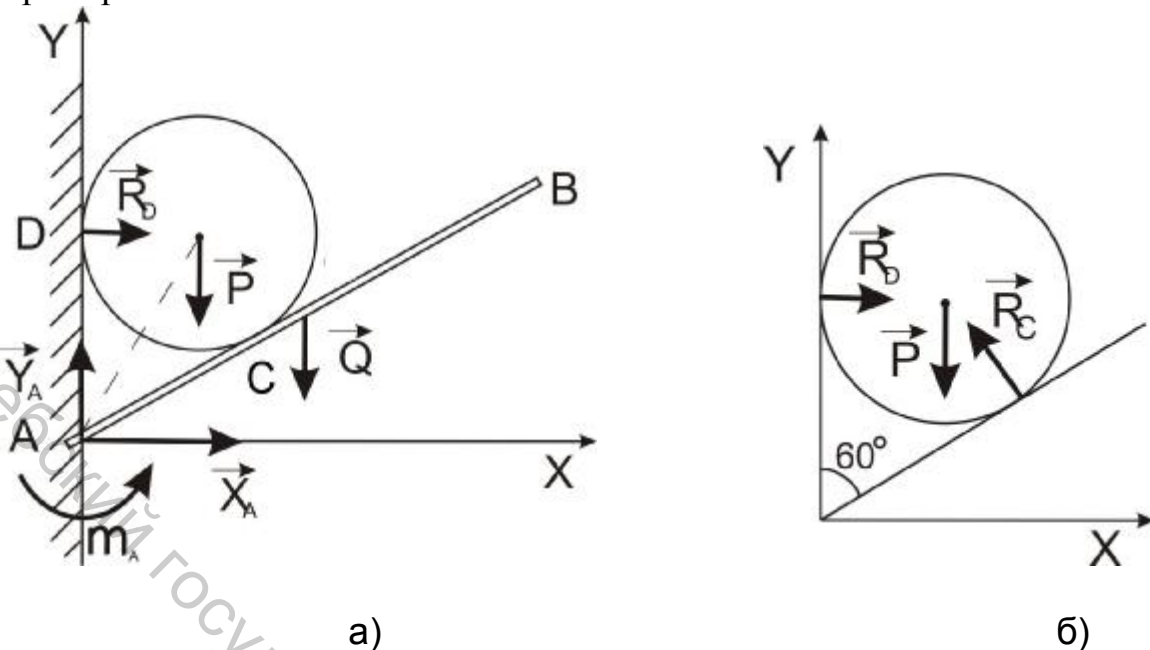


Рис. 3.4

Шар веса P и радиуса r опирается на гладкую стенку и однородный гладкий стержень, заделанный в стену. Вес стержня $Q=4P$, его длина $AB=2l=3r\sqrt{3}$. Определить силы давления шара на стенку и стержень, а также реакции заделки (рис. 3.4).

Решение:

Расчленим систему и рассмотрим равновесие шара, на который действует активная сила $\vec{P}$, реакция $\vec{R}_D$ гладкой стены и реакция $\vec{R}_C$ стержня АВ (рис. 3.4, б). Для полученной системы сходящихся сил составим два уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & R_D - R_C \cos 60^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & R_C \cos 30^\circ - P &= 0. \end{aligned}$$

Получим, что:

$$R_C = \frac{P}{\cos 30^\circ} = \frac{2P}{\sqrt{3}}, \quad (3.20)$$

$$R_D = R_C \cos 60^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}}. \quad (3.21)$$

Следовательно, силы давления шара на стенку и стержень в точках D и C численно равны значениям реакций в этих точках и противоположны по направлению.

Для определения реакций в заделке рассмотрим равновесие шара и стержня как одного абсолютно твердого тела (рис. 3.4, а). На эту систему тел действуют активные силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, реакция $\vec{R}_D$ стенки, реактивный момент m_A и реактивная сила в заделке, которую нужно заменить составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & X_A + R_D &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_A - P - Q &= 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) &= 0, & m_A - R_D \cdot AD - P \cdot r - Q \cdot \frac{AB}{2} \cos 30^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения определим реактивный момент. Учитывая, что $AD = r \operatorname{ctg} 30^\circ$, получим:

$$m_A = R_D r \operatorname{ctg} 30^\circ + Pr + Q \frac{3r\sqrt{3}}{2} \cos 30^\circ.$$

Подставляя ранее найденное значение $\dot{R}_D$, имеем:

$$m_A = \frac{P}{\sqrt{3}} r \sqrt{3} + Pr + \frac{4P}{2} 3r \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 11Pr.$$

Из первого и второго уравнения соответственно получаем:

$$X_A = -R_D = -\frac{P}{\sqrt{3}}; \quad Y_A = Q + P = 5P.$$

Пример 3.4:

Однородный стержень АВ длиной $2l$ и веса P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце А стержня. Он опирается на однородный стержень CD длины $2l$ и веса P , который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину Е. Точки А и Е лежат на одной вертикали на расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить угол j , образуемый стержнем АВ с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением (рис. 3.5, а).

Решение. Расчленим систему и рассмотрим равновесие стержня АВ, на который действуют сила тяжести $\dot{P}$, составляющие $\dot{X}_A, \dot{Y}_A$ реакции шарнира А и реакция $\dot{R}_C$ стержня CD, которая перпендикулярна стержню АВ (рис. 3.5, б). Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma m_A(\dot{F}_k) = 0, P \frac{AB}{2} \sin j - R_C AC = 0, \text{ где } AB = 2l, AC = 2l \cos j. \text{ Тогда получим}$$

$$Pl \sin j - R_C 2l \cos j = 0. \quad (3.22)$$

Для определения значения R_C рассмотрим равновесие стержня CD, на который действуют силы тяжести $\dot{P}$ и $\dot{Q}$, составляющие $\dot{X}_E, \dot{Y}_E$ реакции шарнира Е и реакция $\dot{R}'_C$ стержня АВ, направленная противоположно реакции $\dot{R}_C$ согласно закону равенства действия и противодействия (рис. 3.5, б). Составим уравнение равновесия: $\Sigma m_E(\dot{F}_k) = 0, R'_C KE - Q \cdot ED \sin g = 0$, где $ED = l, KE = l \cos j$, $\sin g = \sin(180 - 2j) = \sin 2j$.

Имеем $R'_C l \cos j - Q \cdot l \sin 2j = 0$, или $R'_C l \cos j - 2Q \cdot l \cos j \sin j = 0$, откуда

$$R'_C = 2Q \cdot \sin j = 4P \sin j. \quad (3.23)$$

Учитывая, что $R'_C = R_C$, подставим выражение (3.23) в уравнение (3.22), откуда окончательно получим: $\cos j = 1/8$, или $j = \arccos 1/8$.

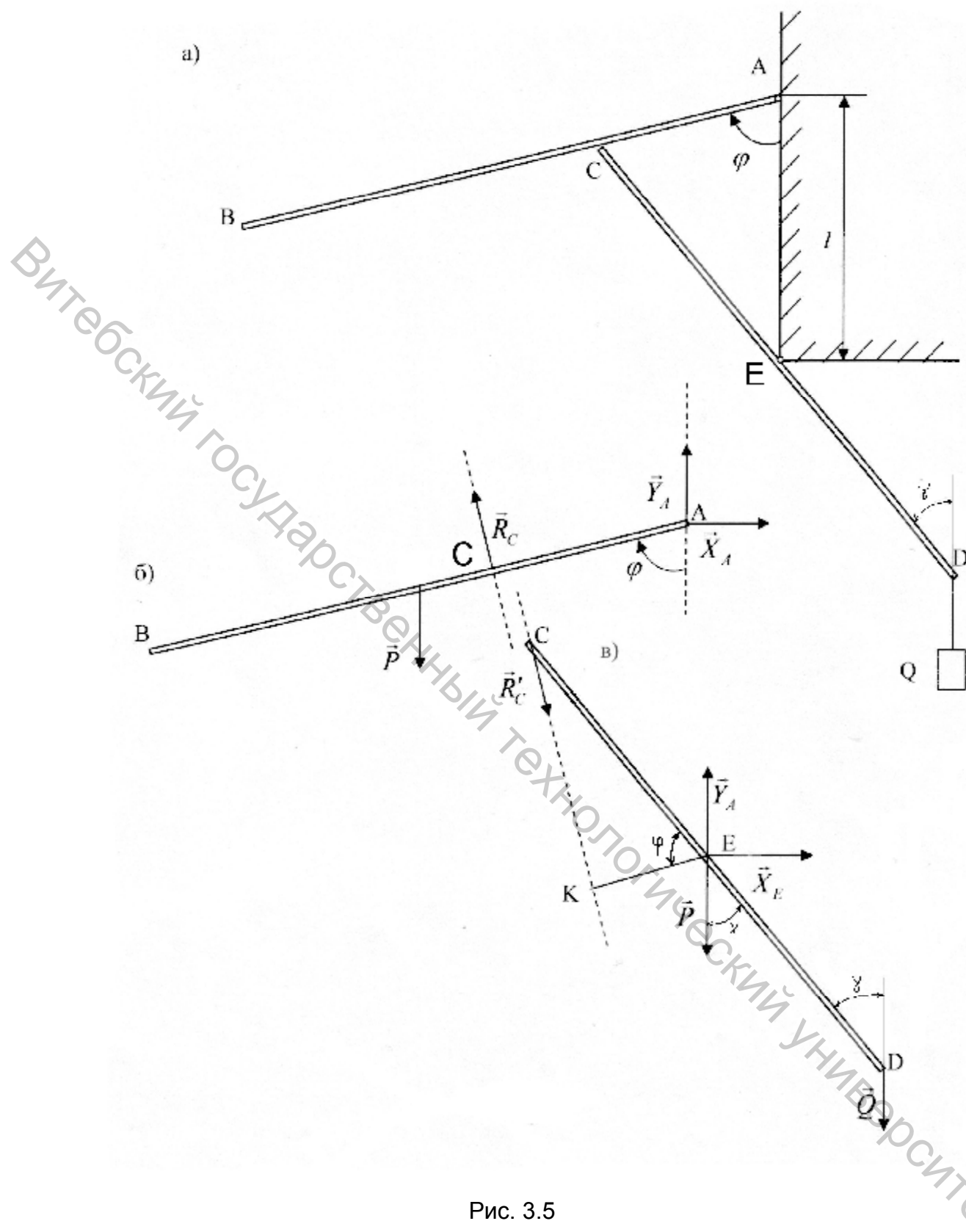


Рис. 3.5

Пример 3.5:

Угольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), конец A которого жестко заделан, в точке C шарнирно соединен со стержнем CD. Конец D стержня поддерживается невесомым стержнем DD', на участке KD приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q . В точке E угольника ABC приложена сила $\vec{F}$.

Определить реакции в точках A, C, D, если $q = 10 \text{ кН/м}$, $F = 20 \text{ кН}$, $a = 0,2 \text{ м}$ (рис. 3.6, а).

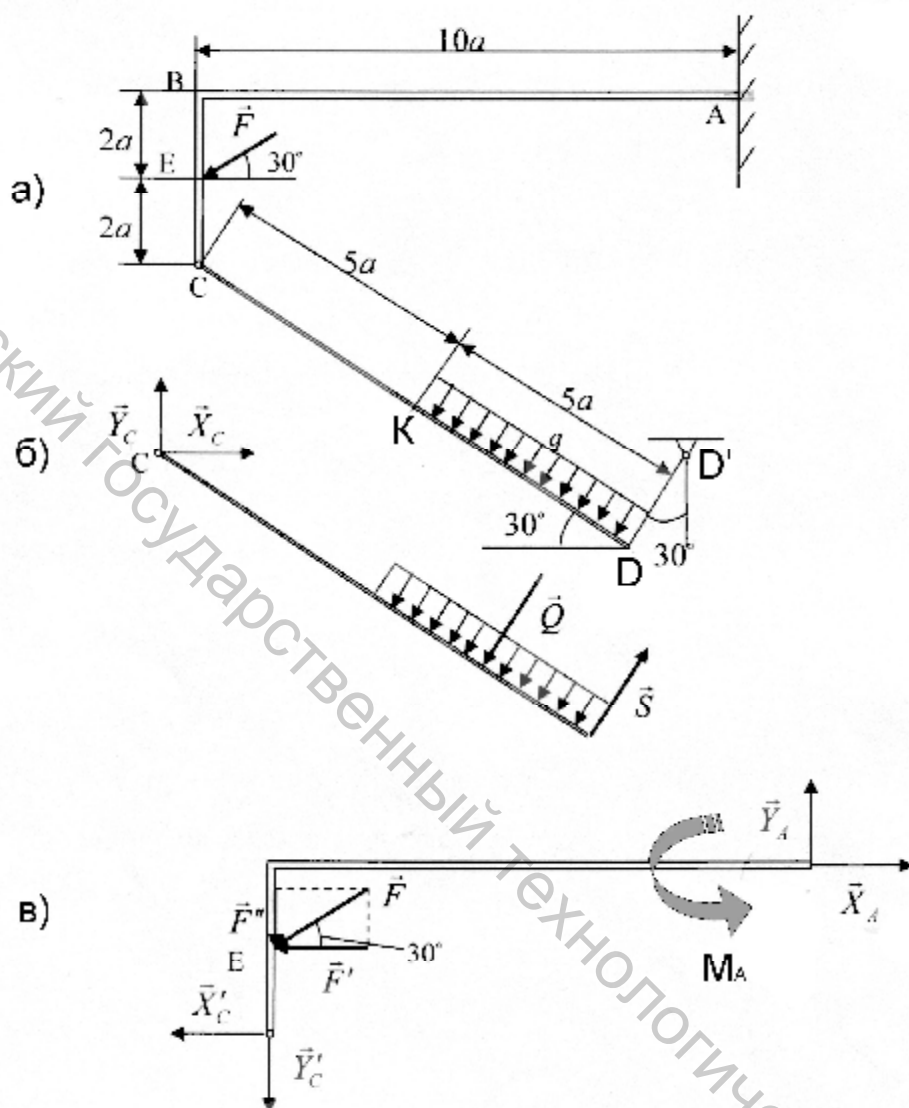


Рис. 3.6

Данная механическая система состоит из угольника ABC и стержня CD. Рассмотрим равновесие каждого тела в отдельности. К стержню CD приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , которую заменим сосредоточенной силой Q , причем численно $Q = q \cdot KD = 10 \text{ кН}$, а линия действия этой силы проходит через середину отрезка KD перпендикулярно стержню. Применив принцип освобождения от связей, получим, что к стержню будут приложены составляющие $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ реакции шарнира C и реакция $\bar{S}$ невесомого стержня DD':

$$\Sigma F_{kx} = 0, X_C - Q \cos 60^\circ + S \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, Y_C - Q \cos 30^\circ + S \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0, S \cdot 10a - Q \cdot 7,5a = 0.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$S = 0,75Q = 7,5 \text{ кН}, \quad X_C = 0,5Q - 0,5S = 1,25 \text{ кН},$$

$$Y_C = 0,866Q - 0,866S = 6,84 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие угольника ABC (рис. 3.6, в), к которому приложена заданная сила $\vec{F}$. Применив принцип освобожденности от связей, получим, что к угольнику приложена реакция в жесткой заделке, которая эквивалентна составляющим $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ реактивной силы и паре сил с неизвестным моментом M_A . Кроме того, на основании закона равенства действия и противодействия составляющие $\vec{X}'_C, \vec{Y}'_C$ реакции шарнира C равны по модулю и противоположны по направлению составляющим $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Составим уравнения равновесия для полученной системы сил.

При вычислении момента силы $\vec{F}$ относительно центра A разложим эту силу на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$ и применим теорему Вариньона, т.е. $F' = F \cos 30^\circ$, $F'' = F \cos 60^\circ$ и $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_A - F \cos 30^\circ - X'_C = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A - F \cos 60^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0, \quad M_A - F \cos 30^\circ \cdot 2a + F \cos 60^\circ \cdot 10a - X'_C \cdot 4a + Y'_A \cdot 10a = 0.$$

Решая эти уравнения, определим $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и M_A :

$$X_A = F \cos 30^\circ + X'_C = 20 \cdot 0,866 + 1,25 = 18,57 \text{ кН},$$

$$Y_A = F \cos 60^\circ + Y'_C = 20 \cdot 0,866 + 6,84 = 16,84 \text{ кН},$$

$$M_A = 2a(F \cos 30^\circ - 5F \cos 60^\circ + 2X'_C - 5Y'_A) = 0,4(20 \cdot 0,866 - 2,5 \cdot 20 + 2 \cdot 1,25 - 5 \cdot 6,84) = -25,75 \text{ кН}.$$

Т.к. значение момента в заделке получено отрицательным, то в действительности момент M_A будет направлен противоположно указанному на рисунке.

3.4. Равновесие твердого тела при наличии трения

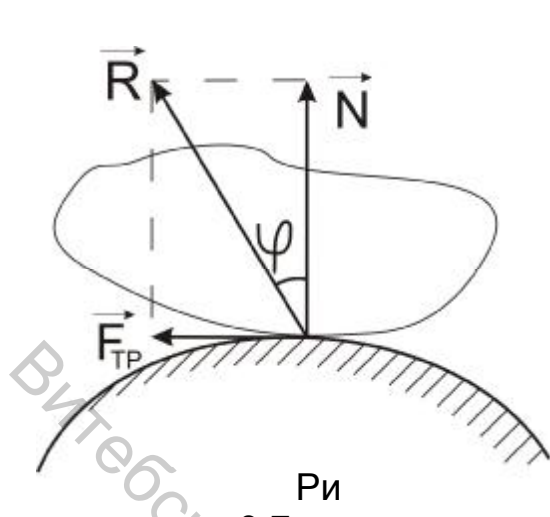
3.4.1 Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения

Трением скольжения называется сопротивление, возникающее при относительном скольжении двух соприкасающихся тел.

Величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению одного из соприкасающихся тел на другое:

$$F_{mp} = fN \quad (3.24)$$

Реакция шероховатой поверхности отклонена от нормали на некоторый угол φ (рис. 3.7). Наибольший угол j_0 , который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения.



Реакция $\vec{R}$ складывается из двух составляющих: нормальной реакции $\vec{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\vec{F}_{тр}$, которая направлена противоположно возможному перемещению тела. Если твердое тело на шероховатой поверхности находится в покое, то в этом случае трение называется статическим. Максимальная величина силы статического трения определяется равенством

$$F_{тр}^{\max} = f_{cm} N, \quad (3.25)$$

где f_{cm} – статический коэффициент трения.

Этот коэффициент обычно больше коэффициента трения при движении.

Из рис. 3.7 видно, что угол трения равен значению

$$\operatorname{tg} j_0 = \frac{F_{тр}^{\max}}{N} = \frac{f_{cm} N}{N} = f_{cm}. \quad (3.26)$$

Равенство (3.26) выражает связь между углом трения и коэффициентом трения.

Методика решения задач статики при наличии трения остается такой же, как и в случае отсутствия трения, т. е. сводится к составлению и решению уравнений равновесия. При этом реакцию шероховатой поверхности следует представить двумя составляющими – нормальной реакцией и силой трения.

Следует иметь в виду, что в таких задачах расчет ведется обычно на максимальную величину силы трения, которая определяется формулой (3.25).

Пример 3.6:

Груз А веса Q лежит на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , и удерживается нитью, намотанной на ступень блока радиуса R . При каком весе P груза В система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f , а радиус меньшей ступени блока $r = \frac{R}{2}$ (рис. 3.8).

Решение:

Рассмотрим равновесие груза В, на который действует сила тяжести $\vec{P}$ и реакция нити $\vec{T}_2$, причем численно $T_2 = P$ (рис. 3.8, а). На груз А действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция $\vec{T}_1$ нити, нормальная реакция $\vec{N}$ наклонной плоскости и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Так как радиус r меньшей ступени блока в два раза меньше большей ступени, то в положении равновесия $T_1' = \frac{T_2}{2}$, или $T_1 = \frac{P}{2}$.

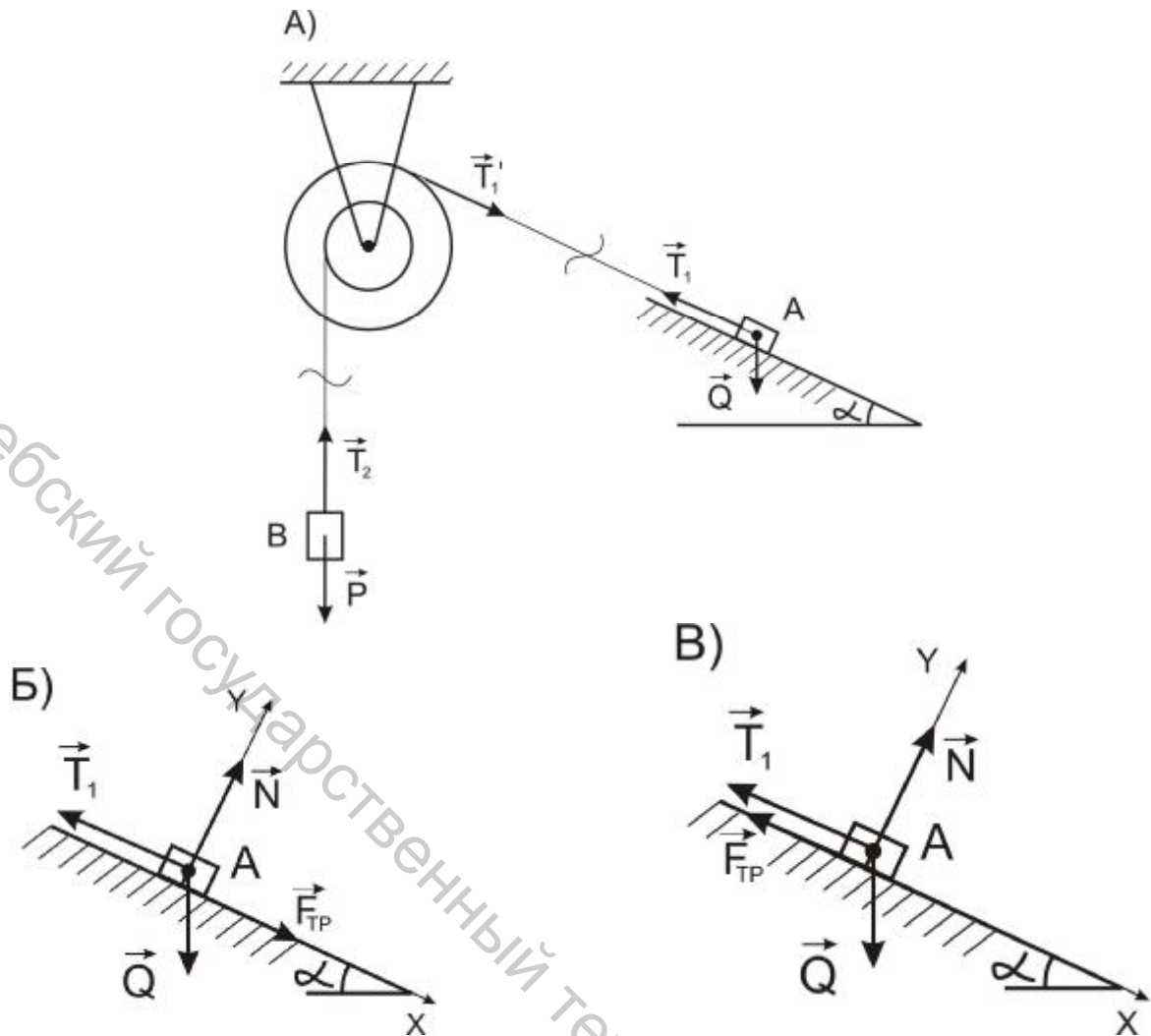


Рис. 3.8

Рассмотрим случай, при котором существует равновесие груза А, но так, что увеличение силы тяжести P груза В вызовет перемещение груза А вверх (рис. 3.8, б). В этом случае сила трения направлена вниз по наклонной плоскости, причем $F_{\text{тр}} = fN$. Выберем оси x и y , указанные на рисунке, и составим два уравнения равновесия системы сходящихся сил на плоскости:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & F_{\text{тр}} - T_1 + Q \sin a &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & N - Q \cos a &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Получим, что $N = Q \cos a$, тогда сила трения $F_{\text{тр}} = fQ \cos a$.

Подставим в равенство (3.27) значения T_1 и $F_{\text{тр}}$, найдем величину P :

$$P = 2Q(f \cos a + \sin a) \quad (3.28)$$

Теперь рассмотрим случай, когда существует равновесие груза А, но так, что уменьшение силы тяжести P груза В вызовет перемещение груза А вниз (рис. 3.8, в). Тогда сила трения будет направлена вверх по наклонной плоскости. Так как значение N не изменится, то достаточно составить одно уравнение в проекции на ось x :

$$\sum F_{kx} = 0, \quad Q \sin a - T_1 - F_{\text{тр}} = 0. \quad (3.29)$$

Подставив в равенство (3.29) значения T_1 и $F_{\text{тр}}$, получим, что

$$P = 2Q(\sin a - f \cos a). \quad (3.30)$$

Таким образом, равновесие данной системы будет возможно при условии

$$2Q(\sin a - f \cos a) \leq P \leq 2Q(\sin a + f \cos a).$$

3.4.2. Равновесие твердого тела при наличии трения качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Представление о природе трения качения можно получить, выходя за пределы статики твердого тела. Рассмотрим цилиндрический каток радиуса R и веса P , опирающийся на горизонтальную плоскость. Приложим к оси катка силу $\vec{S}$, меньшую силы трения $\vec{F}$ (рис. 3.9, а). Тогда сила трения $\vec{F}$, численно равная $\vec{S}$, препятствует скольжению цилиндра по плоскости. Если нормальная реакция $\vec{N}$ приложена в точке А, то она уравнивает силу $\vec{P}$, а силы $\vec{S}$ и $\vec{F}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра даже при малом значении силы S .

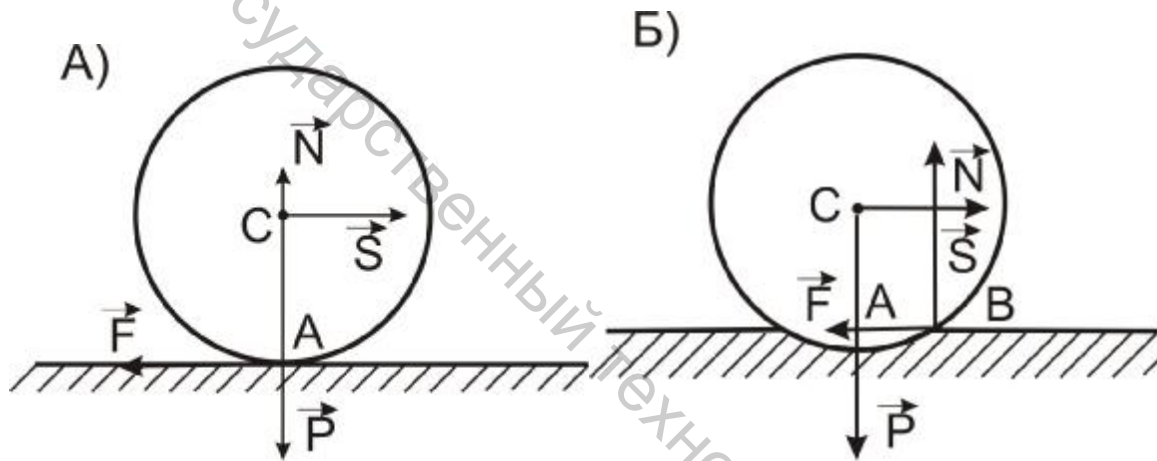


Рис. 3.9

В действительности, вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площади АВ (рис. 3.9, б). При действии силы $\vec{S}$ интенсивность давления у точки А убывает, а у точки В возрастает. В результате нормальная реакция $\vec{N}$ смещается в сторону действия силы $\vec{S}$ на величину k , которая называется коэффициентом трения качения. Этот коэффициент измеряется в единицах длины.

В идеальном положении равновесия катка к нему будут приложены две взаимно уравновешивающиеся пары: одна пара сил $(\vec{S}, \vec{F})$ с моментом $m_1 = S \cdot R$ и вторая пара сил $(\vec{N}, \vec{P})$, удерживающая каток в равновесии. Момент пары, называемый моментом трения качения, определяется формулой

$$M_{\max} = N \cdot k = S \cdot R. \quad (3.31)$$

Из этого равенства следует, что для того, чтобы имело место чистое качение (без скольжения), необходимо, чтобы сила трения качения

$S = F = \frac{k}{R}N$ была меньше максимальной силы трения скольжения: $F < fN$, где f – коэффициент трения скольжения. Таким образом, чистое качение возможно при условии $\frac{k}{R} < f$.

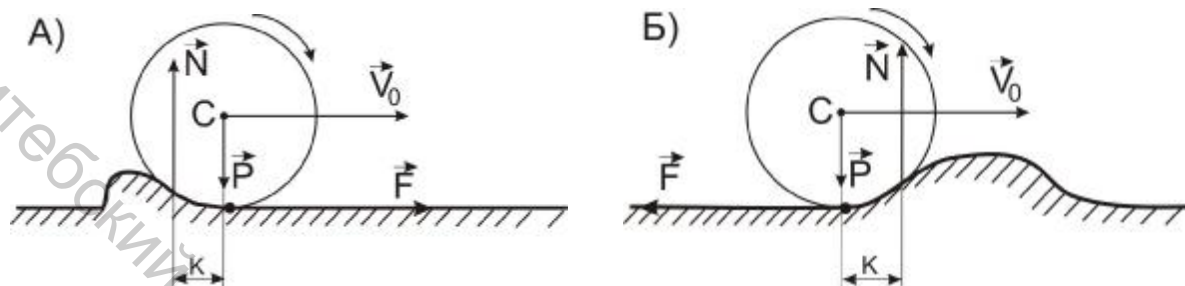


Рис. 3.10

Следует различать направление смещения точки приложения нормальной реакции $\dot{N}$ ведущего и ведомого колеса. Для ведущего колеса деформационный валик, вызывающий смещение точки приложения нормальной реакции $\dot{N}$ плоскости, находится слева от его центра C , если колесо будет двигаться вправо. Поэтому для этого колеса направление силы трения $\dot{F}$ совпадает с направлением его движения (рис. 3.10, а). В ведомом колесе деформационный валик смещен относительно центра C в направлении движения. Следовательно, сила трения $\dot{F}$ в этом случае направлена в сторону, противоположную направлению движения центра колеса.

Пример 3.7:

Цилиндр веса $P = 10$ Н и радиуса $R = 0,1$ м находится на шероховатой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. К оси цилиндра привязана нить, перекинута через блок и несущая на другом конце груз В. При каком весе Q груза В цилиндр не покатится, если коэффициент трения качения равен $k = 0,01$ м (рис. 3.11, а)?

Рассмотрим равновесие цилиндра в двух случаях. Если величина силы Q имеет наименьшее значение, то возможно движение цилиндра вниз по наклонной плоскости (рис. 3.11, б). К цилиндру приложены вес цилиндра $\dot{P}$ и натяжение нити $\dot{Q}_{\min}$. В этом случае нормальная реакция $\dot{N}$ наклонной плоскости будет смещена на расстояние k влево от перпендикуляра, опущенного из центра цилиндра на наклонную плоскость. Сила трения направлена вдоль наклонной плоскости противоположно возможному движению центра цилиндра.

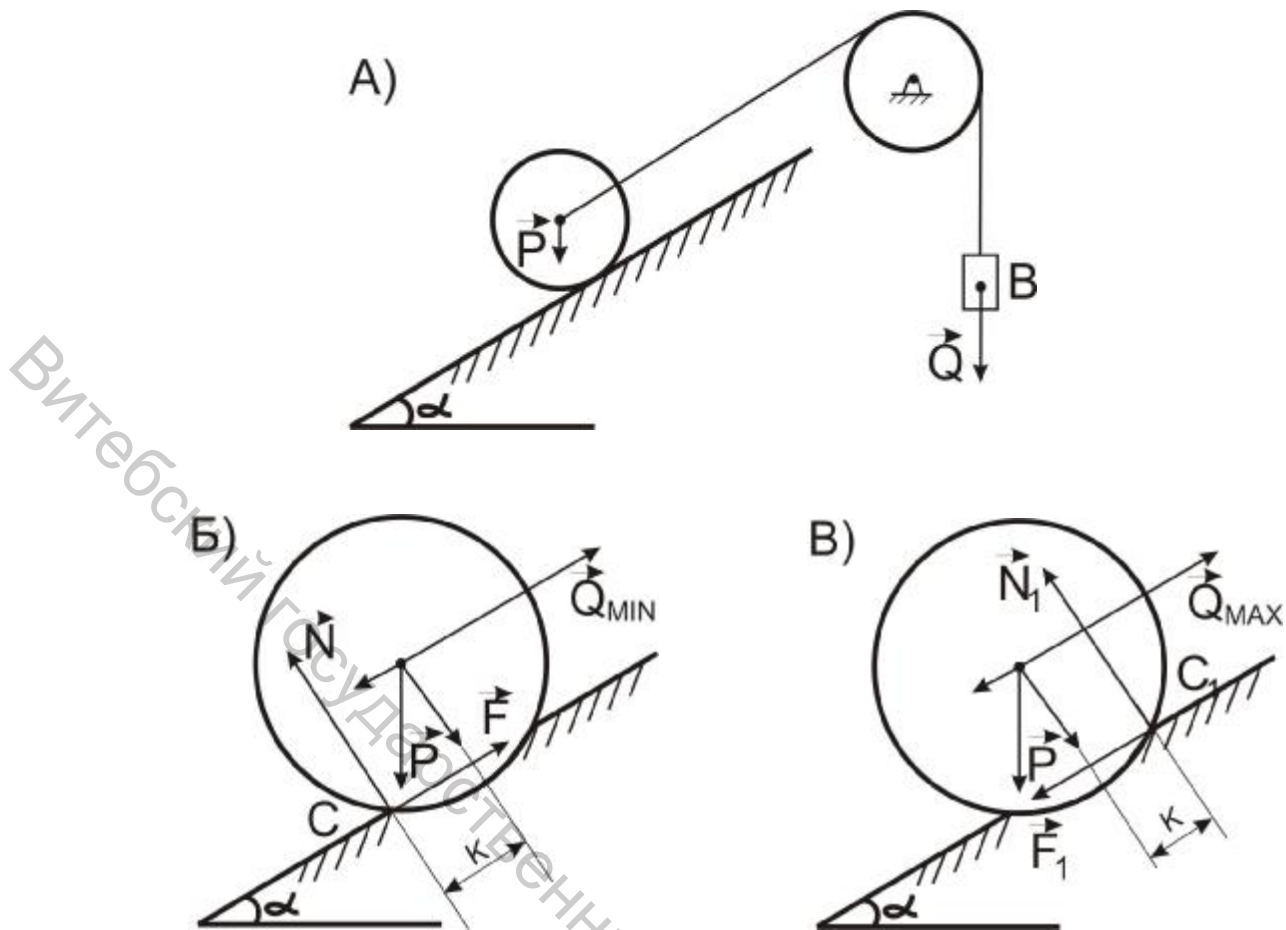


Рис. 3.11

Для определения значения $Q_{\min}$ достаточно составить уравнение равновесия относительно точки C . При вычислении момента силы $\vec{P}$ относительно этой точки силу $\vec{P}$ разложим на составляющие: составляющая $P \cos \alpha$ перпендикулярна наклонной плоскости, а составляющая $P \sin \alpha$ параллельна этой плоскости. Момент силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$ относительно точки C равны нулю, т. к. они приложены в этой точке:

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0, \quad PR \sin \alpha - Pk \cos \alpha - Q_{\min} R = 0.$$

Откуда $Q_{\min} = P \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$

Во втором случае, когда сила Q достигает максимального значения, возможно перемещение центра цилиндра вверх по наклонной плоскости (рис. 3.11, в). Тогда силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}_{\max}$ будут направлены аналогично первому случаю. Реакция $\vec{N}_1$, наклонной плоскости будет приложена в точке C_1 и смещена на расстояние k вправо по наклонной плоскости. Сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$ направлена противоположно возможному движению центра цилиндра. Составим уравнение моментов относительно точки C_1 :

$$\sum m_{C_1}(\vec{F}_k) = 0, \quad PR \sin \alpha + Pk \cos \alpha - Q_{\max} R = 0. \quad (3.32)$$

Из этого уравнения получим, что

$$Q_{\max} = P(\sin a + \frac{k}{R} \cos a).$$

Очевидно цилиндр будет находиться в равновесии, если значение силы Q будет заключено в пределах

$$P(\sin a - \frac{k}{R} \cos a) \leq Q \leq P(\sin a + \frac{k}{R} \cos a). \quad (3.33)$$

Подставив численные значения в равенство (3.33), окончательно получим:

$$4,13 \text{ Н}$$

$$\leq Q \leq 5,87 \text{ Н}.$$

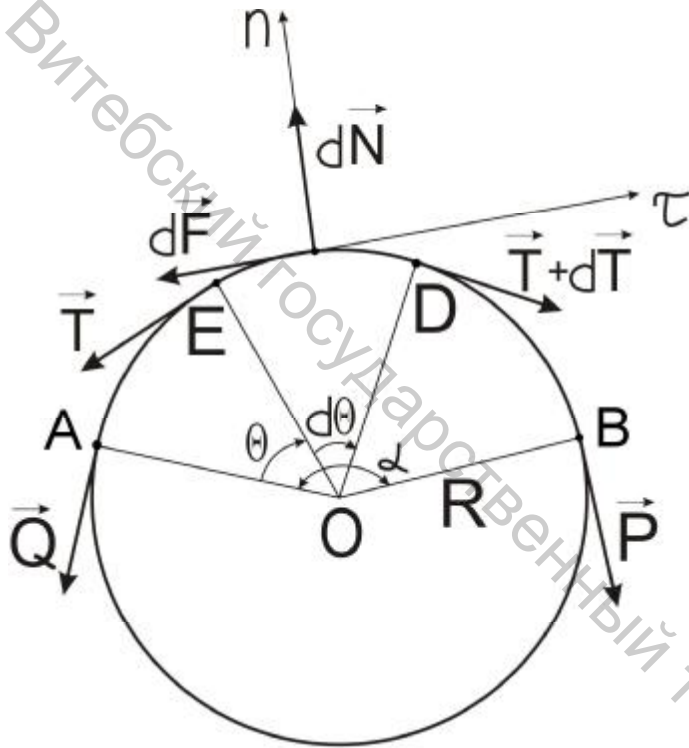


Рис. 3.12

3.4.3. Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность

Рассмотрим нить,

касающуюся поверхности кругового цилиндра вдоль дуги ADB с центральным углом α (рис. 3.12). Коэффициент трения нити о цилиндр равен f . К одному концу нити приложена сила $\vec{P}$. Тогда наименьшее значение силы $\vec{Q}$, которую нужно приложить к другому концу, чтобы сохранить равновесие, определим следующим образом. Рассмотрим равновесие элемента нити DE длины $dS = R dq$, где R – радиус цилиндра. На него действуют приложенные в

точках D и E натяжения нити $\vec{T} + d\vec{T}$ и $\vec{T}$, нормальная реакция $d\vec{N}$ и сила трения $d\vec{F}$. Составляя условия равновесия в проекциях на касательную t и нормаль n и считая $\sin \frac{dq}{2} = \frac{dq}{2}$, $\cos \frac{dq}{2} = 1$, получим

$$dT = dF, \quad dN = 2T \sin \frac{dq}{2} = T dq. \quad (3.34)$$

(при этом малыми величинами высшего порядка пренебрегаем).

Т.к. рассматриваемое положение равновесия является предельным, то $dF = f dN$. Тогда из равенства (3.34) получим: $dT = f T dq$.

Т. к. натяжение нити в точках A и B равно соответственно P и Q , то, разделяя в полученном уравнении переменные и беря от обеих частей определенные интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^a dq \quad \text{или} \quad \ln \frac{P}{Q} = fa, \quad \text{откуда} \quad Q = P e^{-fa}. \quad (3.35)$$

Формула (3.35), полученная Эйлером, показывает, что уравнивающая сила Q не зависит от радиуса цилиндра и при данном значении f убывает с увеличением α .

4.1. Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру

Если задана система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$, произвольно расположенная в пространстве, то эти силы приводятся к произвольно выбранному центру O . В результате приведения, как и в случае плоской системы сил, получим силу $\vec{R}_0$, приложенную в центре O и равную главному вектору данной системы, и пару сил с вектором-моментом $\vec{M}_0$, равным главному моменту данной системы сил относительно центра O . Тогда получим, что главный вектор произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме сил данной системы:

$$\vec{R}_0 = \sum \vec{F}_k, \quad (4.1)$$

а главный момент пространственной системы сил относительно центра O равен геометрической сумме моментов всех сил данной системы относительно того же центра:

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{r}_m(\vec{F}_k). \quad (4.2)$$

Проекции R_x, R_y, R_z главного вектора $\vec{R}_0$ на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам проекций сил данной системы на соответствующие оси:

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (4.3)$$

Модуль главного вектора $\vec{R}_0$ и направляющие косинусы определяются по формулам

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}, \quad (4.4)$$

$$\cos(R_x, x) = \frac{R_x}{R_0}, \quad \cos(R_y, y) = \frac{R_y}{R_0}, \quad \cos(R_z, z) = \frac{R_z}{R_0}. \quad (4.5)$$

Проекции M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} главного момента $\vec{M}_0$ на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам моментов сил данной системы относительно соответствующих осей:

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \sum m_x(\vec{F}_k) = \sum (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \\ M_{0y} &= \sum m_y(\vec{F}_k) = \sum (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \\ M_{0z} &= \sum m_z(\vec{F}_k) = \sum (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Модуль главного момента $\vec{M}_0$ и направляющие косинусы определяем по формулам

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{[\sum m_x(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_y(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_z(\vec{F}_k)]^2}. \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{M}_0, x) &= \frac{M_{0x}}{M_0} = \frac{\sum m_x(\vec{F}_k)}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0, y) &= \frac{M_{0y}}{M_0} = \frac{\sum m_y(\vec{F}_k)}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0, z) &= \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{\sum m_z(\vec{F}_k)}{M_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Модуль и направление $\vec{M}_0$ главного момента изменяется с изменением центра приведения. Зависимость главного момента пространственной системы от выбора центра приведения выражается так: главный момент $\vec{M}_A$ пространственной системы сил относительно нового центра А равен геометрической сумме главного момента $\vec{M}_0$ этой системы сил относительно старого центра О и момента главного вектора $\vec{R}_0$, приложенного в центре О, относительно нового центра А:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{M}_A(\vec{R}_0) \quad (4.9)$$

Статическими инвариантами пространственной системы сил называются такие характеристики этой системы, которые не зависят от выбора центра приведения.

Первым статическим инвариантом является главный вектор $\vec{R}_0$, модуль и направление которого не зависят от выбора центра приведения, т.е. численно: $I_1 = R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$.

Вторым статическим инвариантом является скалярное произведение главного вектора и главного момента, которое также не зависит от выбора центра приведения:

$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z} \quad (4.10)$$

Момент силы данной системы относительно координатных осей определяется по формулам (2.7), (2.9), (2.10).

Кроме того для вычисления моментов сил относительно координатных осей удобно использовать теорему Вариньона: момент равнодействующей данной системы сил относительно некоторой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси:

$$M_z(\vec{R}) = \sum m_z(\vec{F}_k). \quad (4.11)$$

При вычислении момента силы относительно координатных осей необходимо силу разложить на составляющие, параллельные координатным осям или их пересекающие.

Пример 4.1:

Вычислить моменты сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ относительно координатных осей x, y, z , если сила $\vec{P}$ расположена в плоскости грани $CDFK$ параллелепипеда, а сила $\vec{Q}$ – в плоскости грани $ADFE$. Дано: $P=10$ Н, $Q=20$ Н, $a=40$ см, $b=30$ см, $c=20$ см, $a = b = 60^\circ$ (рис. 4.1).

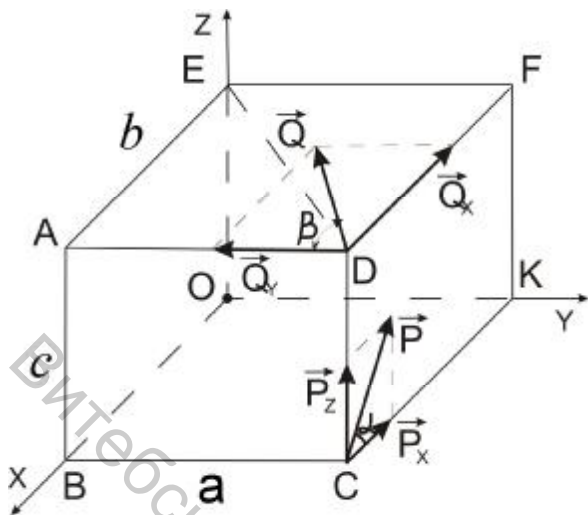


Рис. 4.1

Решение:

Вычислим момент силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ относительно координатных осей по теореме Вариньона.

Разложим силу $\vec{P}$ на составляющие, параллельные осям x и z . Эти составляющие имеют модули $P_x = P \cos a$, $P_z = P \sin a$.

Тогда по теореме Вариньона

$$m_x(\vec{P}) = m_x(\vec{P}_x) + m_x(\vec{P}_z) = P \sin a \cdot a = 346,4 \text{ Н};$$

$$m_y(\vec{P}) = m_y(\vec{P}_x) + m_y(\vec{P}_z) = -P \sin a \cdot b = -259,8$$

Н;

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_x) + m_z(\vec{P}_z) = P \cos a \cdot a = 200 \text{ Н}.$$

Составляющие $\vec{P}_x$ и $\vec{P}_z$, параллельные соответствующим осям, не создают моментов относительно этих осей.

Аналогично силу $\vec{Q}$, лежащую в горизонтальной плоскости, разложим на составляющие, параллельные осям x и y .

Модули составляющих $Q_x = Q \sin b$, $Q_y = Q \cos b$. Тогда

$$m_x(\vec{Q}) = m_x(\vec{Q}_x) + m_x(\vec{Q}_y) = Q \cos b \cdot c = 200 \text{ Н};$$

$$m_y(\vec{Q}) = m_y(\vec{Q}_x) + m_y(\vec{Q}_y) = -Q \sin b \cdot c = -346,4 \text{ Н};$$

$$m_z(\vec{Q}) = m_z(\vec{Q}_x) + m_z(\vec{Q}_y) = Q \sin b \cdot a - Q \cos b \cdot b = 392,8 \text{ Н}.$$

Составляющие $\vec{Q}_x$ и $\vec{Q}_y$, параллельные соответствующим осям, не создают моментов относительно этих осей.

4.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду

Рассмотрим частные случаи приведения пространственной системы сил, которые зависят от значений главного вектора $\vec{R}_0$ и главного момента $\vec{M}_0$.

1. Если $\vec{R}_0 = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, то система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту $\vec{M}_0$. В этом случае значение $\vec{M}_0$ не зависит от выбора центра O .

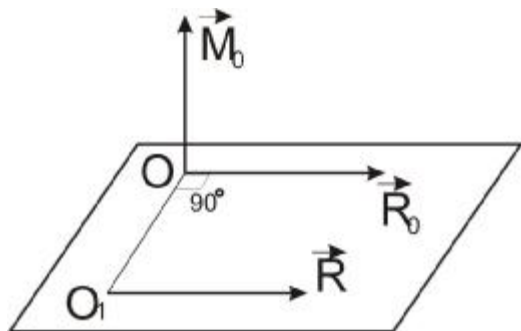


Рис. 4.2

Если $\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$, то система сил приводится к равнодействующей, равной главному вектору, линия действия которой проходит через центр O .

Если $\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, но $\vec{M}_0 \perp \vec{R}_0$, то данная система сил приводится к равнодействующей $\vec{R} = \vec{R}_0$, линия действия которой параллельна линии действия

главного вектора $\dot{\vec{R}}_0$ и отстоит от нее на расстоянии

$$h = OO_1 = \frac{M_0}{R_0} \text{ (рис. 4.2).}$$

4. Если для данной системы сил $\dot{\vec{R}}_0 \neq 0$, $\dot{\vec{M}}_0 \neq 0$ и $(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{M}}_0) \neq 90^\circ$, то система сил приводится к динаме. Динамой или динамическим винтом называется совокупность силы и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе (рис. 4.3).

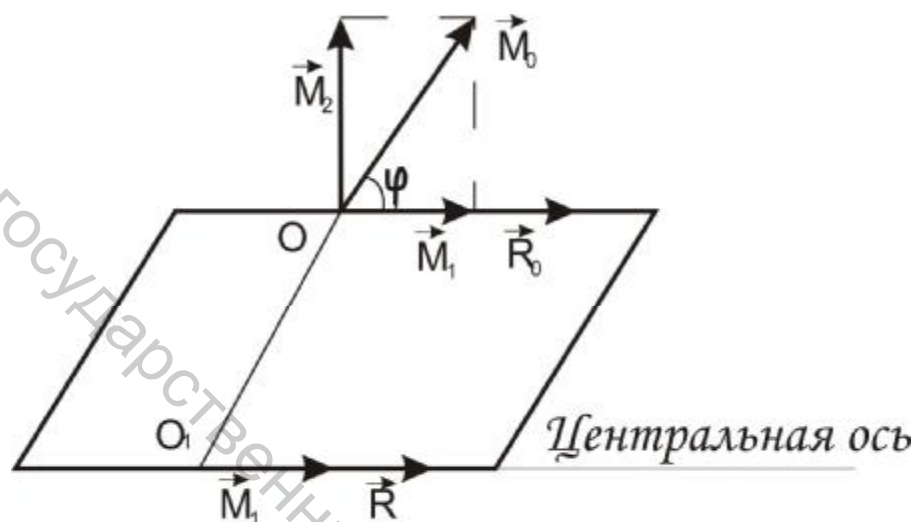


Рис. 4.3

В этом случае второй скалярный инвариант отличен от нуля и $\dot{\vec{R}}_0 \cdot \dot{\vec{M}}_0 = R_0 M_0 \cos j$, где j – угол между направлением главного вектора $\dot{\vec{R}}_0$ и главного момента $\dot{\vec{M}}_0$. Разложим главный момент $\dot{\vec{M}}_0$ на две составляющие: $\dot{\vec{M}}_1$, направленную вдоль $\dot{\vec{R}}_0$, и $\dot{\vec{M}}_2$, перпендикулярную $\dot{\vec{R}}_0$. При этом $M_1 = M_0 \cos j$, $M_2 = M_0 \sin j$. Тогда данная система сил заменится силой $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0$, линия действия которой параллельна линии действия главного вектора $\dot{\vec{R}}_0$ и отстоит от нее на расстоянии $h = OO_1 = \frac{M_0 \sin j}{R_0}$, и парой сил с моментом $\dot{\vec{M}}_1$. Так как вектор $\dot{\vec{M}}_1$ является свободным вектором, то его можно приложить в точке O_1 . Прямая, проходящая через точку O_1 , по которой направлены векторы $\dot{\vec{R}}$ и $\dot{\vec{M}}_1$ называется центральной осью. Центральная ось является геометрическим местом центров приведения, для которых главный момент $\dot{\vec{M}}_0$ имеет наименьшее значение и направлен вдоль этой оси. Величина наименьшего момента определяется по формуле

$$M_{\min} = M_1 = M_0 \cos j = \frac{\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{M}}_0}{R}. \quad (4.12)$$

Уравнение центральной оси имеет вид:

$$\frac{M_{0x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}, \quad (4.13)$$

где x, y, z – текущие координаты точки, лежащей на центральной оси.

5. Если для данной системы сил $\dot{\mathbf{R}}_0 = 0$, $\dot{\mathbf{M}}_0 = 0$, то данная система сил находится в равновесии.

Полученные частные случаи приведения пространственной системы сил можно представить таблицей 4.1.

Таблица 4.1

$I_2 = \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \dot{\mathbf{M}}_0$	$\dot{\mathbf{R}}_0$	$\dot{\mathbf{M}}_0$	Результаты приведения
$I_2 \neq 0$	$\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0$	$\dot{\mathbf{M}}_0 \neq 0$	Система сил приводится к динаме
$I_2 = 0$	$\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0$	$\dot{\mathbf{M}}_0 \neq 0$ $\dot{\mathbf{M}}_0 \perp \dot{\mathbf{R}}_0$	Система сил приводится к равнодействующей $\dot{\mathbf{R}} = \sum \dot{\mathbf{F}}_k$, не проходящей через центр О
$I_2 = 0$	$\dot{\mathbf{R}}_0 \neq 0$	$\dot{\mathbf{M}}_0 = 0$	Система сил приводится к равнодействующей $\dot{\mathbf{R}} = \sum \dot{\mathbf{F}}_k$, проходящей через центр О
$I_2 = 0$	$\dot{\mathbf{R}}_0 = 0$	$\dot{\mathbf{M}}_0 \neq 0$	Система сил приводится к паре, момент которой $\dot{\mathbf{M}}_0 = \sum \dot{\mathbf{m}}_0(\dot{\mathbf{F}}_k)$ и не зависит от выбора центра О
$I_2 = 0$	$\dot{\mathbf{R}}_0 = 0$	$\dot{\mathbf{M}}_0 = 0$	Система сил находится в равновесии

Задачи на приведение пространственной системы сил к простейшему виду следует решать в такой последовательности:

1. выбрать оси декартовых координат;
2. взять центр приведения системы сил в начале координат О;
3. вычислить проекции R_x, R_y, R_z , модуль главного вектора $\dot{\mathbf{R}}_0$ и направляющие косинусы по формулам (4.3), (4.4), (4.5);
4. определить главные моменты M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} системы сил относительно осей x, y, z по формулам (4.6);
5. определить модуль главного момента $\dot{\mathbf{M}}_0$ и его направляющие косинусы по формулам (4.7), (4.8);
6. по полученным значениям $\dot{\mathbf{R}}_0$ и $\dot{\mathbf{M}}_0$ определить, к какому простейшему виду приводится данная система сил (см. таблицу 4.1).

Пример 4.2:

К четырем вершинам А, Н, В и D куба приложены четыре равные по модулю силы: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем $\dot{\mathbf{P}}_1$ направлена по АС, $\dot{\mathbf{P}}_2$ – по НФ, $\dot{\mathbf{P}}_3$ – по ВЕ, $\dot{\mathbf{P}}_4$ – по DG. Привести систему к простейшему виду (рис. 4.4).

Решение:

Проведем оси x, y, z как указано на рисунке и за центр приведения примем точку А. Вычислим проекции главного вектора на координатные оси

$$R_x = P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$R_y = P_1 \cos 45^\circ + P_2 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ - P_3 \cos 45^\circ = P\sqrt{2},$$

$$R_z = P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = P\sqrt{2}.$$

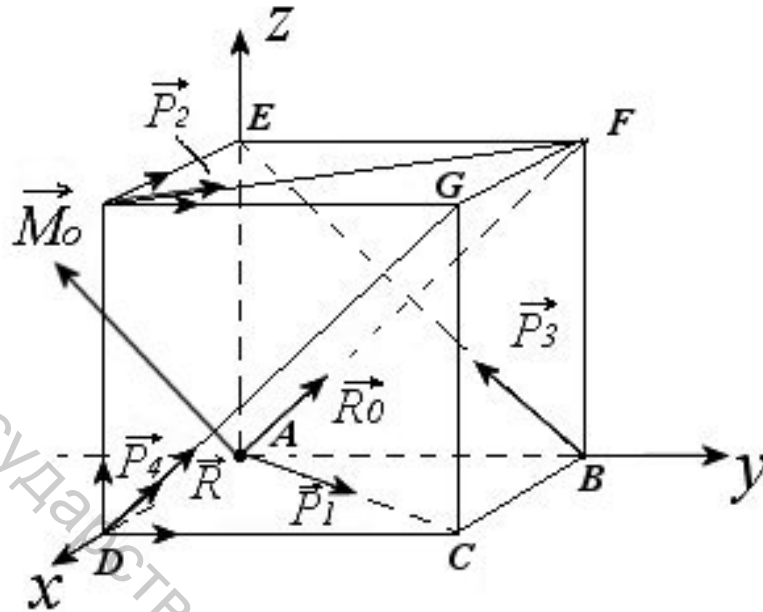


Рис. 4.4

Модуль главного вектора:

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 2P$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{R}, x) = 0, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует, что главный вектор $\vec{R}_0$ перпендикулярен оси x , а с осями y и z образует углы равные 45° . Следовательно, линия действия главного вектора пройдет по диагонали AF куба. Далее определим главные моменты M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} относительно осей x , y , z . При вычислении моментов сил данной системы учтем, что линия действия силы $\vec{P}_1$ пересекает все оси, и моменты этой силы относительно осей x , y , z равны нулю. Моменты сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_4$ относительно осей x , y , z определим по теореме Вариньона, разложив эти векторы на составляющие. Обозначим ребро куба $AB=a$. Тогда

$$M_{0x} = P_3 a \cos 45^\circ - P_2 a \cos 45^\circ = 0,$$

$$M_{0y} = -P_2 a \cos 45^\circ - P_4 a \cos 45^\circ = -aP\sqrt{2},$$

$$M_{0z} = P_2 a \cos 45^\circ + P_4 a \cos 45^\circ = aP\sqrt{2}.$$

Модуль главного вектора:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = 2aP$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{M}_{0x}, x) = \frac{M_{0x}}{M_0} = 0, \quad \cos(\vec{M}_{0y}, y) = \frac{M_{0y}}{M_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\vec{M}_{0z}, z) = \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Следовательно, главный момент, перпендикулярный оси x , с осью y образует угол, равный 135° , а с осью z — угол 45° . Таким образом получили, что главный вектор $\vec{R}_0$ и главный момент $\vec{M}_0$ лежат в плоскости yz , образуя между собой угол, равный 90° . В данном случае система сил приводится к равнодействующей $\vec{R}$, линия действия которой отстоит от точки A на расстоянии $h = \frac{M_0}{R} = a$ и параллельна линии действия главного вектора.

Окончательно получили, что модуль равнодействующей $R = 2P$, а линия действия пройдет по диагонали DG куба.

4.3. Равновесие пространственной системы сил

Для равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{R}_0$ этой системы сил и ее главный момент относительно произвольно выбранного центра O были равны нулю:

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 &= \sum \vec{F}_k = 0, \\ \vec{M}_0 &= \sum \vec{r}_k(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Учитывая формулы (4.3) и (4.6), выражающие проекции главного вектора и главного момента на координатные оси, получим, что для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил данной системы на координатные оси x , y , z и суммы моментов всех сил относительно этих же осей равнялись нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum F_{ky} &= 0, & \sum F_{kz} &= 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.15-4.16)$$

Если к твердому телу приложены силы, линии действия которых параллельны между собой, то, направив одну из координатных осей, например ось z , параллельно этим силам, получим три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kz} &= 0 \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

При решении задач на равновесие пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, следует применять последовательность решения, изложенную в параграфе 1.6.

Пример 4.3:

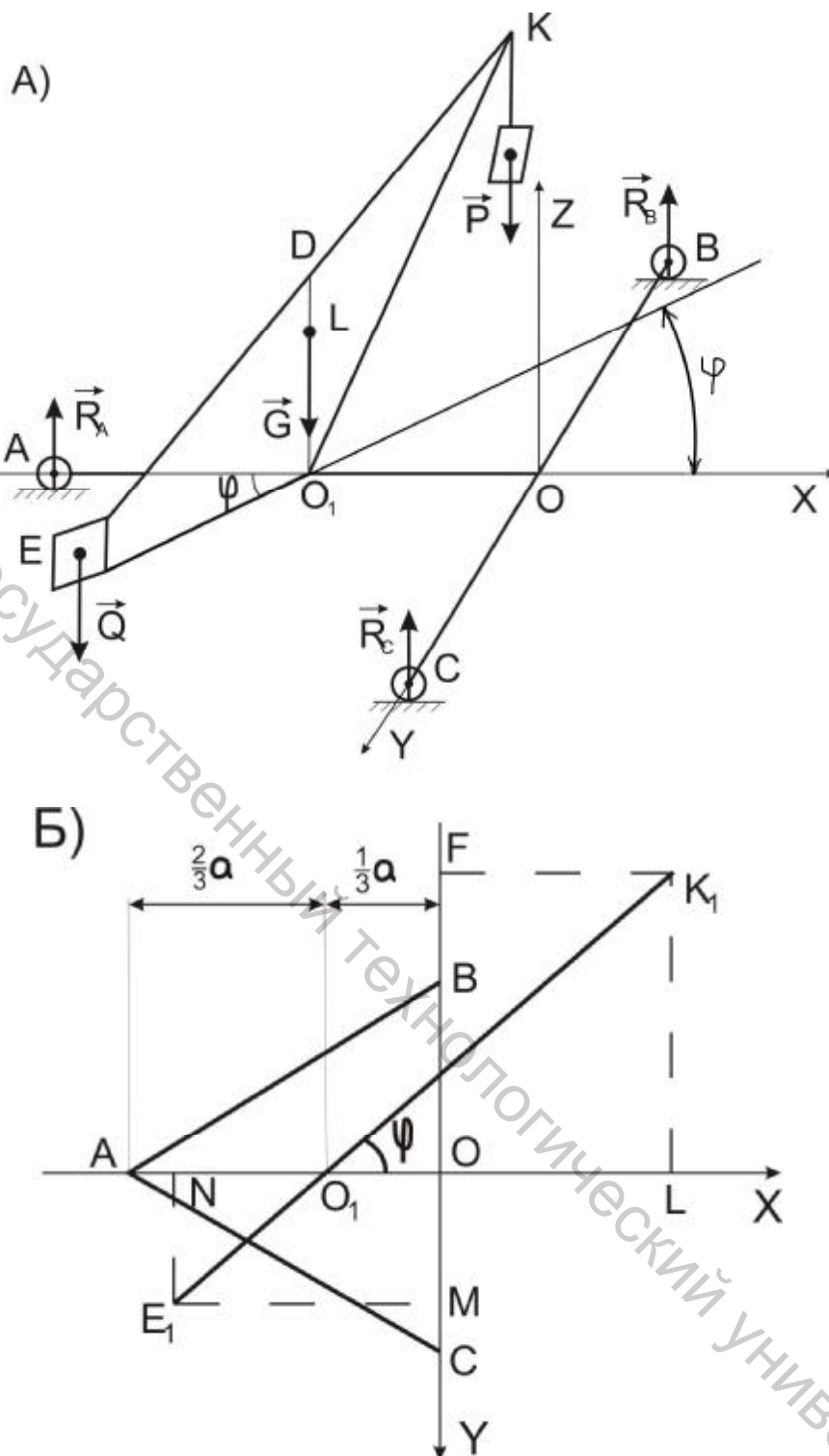


Рис. 4.5

Кран с поворотной стрелой установлен на трехколенной тележке. Вес крана без противовеса равен $\dot{G}$, центр тяжести крана находится на вертикали, проведенной из центра O_1 равностороннего треугольника ABC, в вершинах которого располагаются колеса A, B, C. Вес противовеса равен $\dot{Q}$ и приложен в точке E. Вес поднимаемого груза $\dot{P}$. Поворот стрелы осуществляется вокруг вертикальной оси OD . Полагая, что вылет стрелы крана $O_1K_1 = 3a$, вылет

противовеса $E_1O_1 = \frac{2}{3}a$, $P=0,5G$, $Q=G$, определить давления колес на рельсы в зависимости от угла поворота φ стрелы крана (рис. 4.5, а, б).

Решение:

Рассмотрим равновесие крана, к которому приложены активные силы: сила тяжести крана $\vec{G}$, сила тяжести противовеса $\vec{Q}$ и сила тяжести поднимаемого груза $\vec{P}$. Применяв принцип освобождения от связей, получим, что реакции $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_C$ рельсов в точках А, В, С будут направлены перпендикулярно рельсам вверх. Таким образом кран будет находиться в равновесии под действием системы параллельных сил. Направим ось z параллельно линиям действия этих сил, а оси x и y – по прямым AO и BC соответственно.

Составим уравнения равновесия в виде:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0.$$

Для вычисления моментов сил относительно оси x можно силы спроектировать в плоскость yOz , а для вычисления моментов сил относительно оси y спроектировать силы в плоскость xOz (рис. 4.6, а, б).

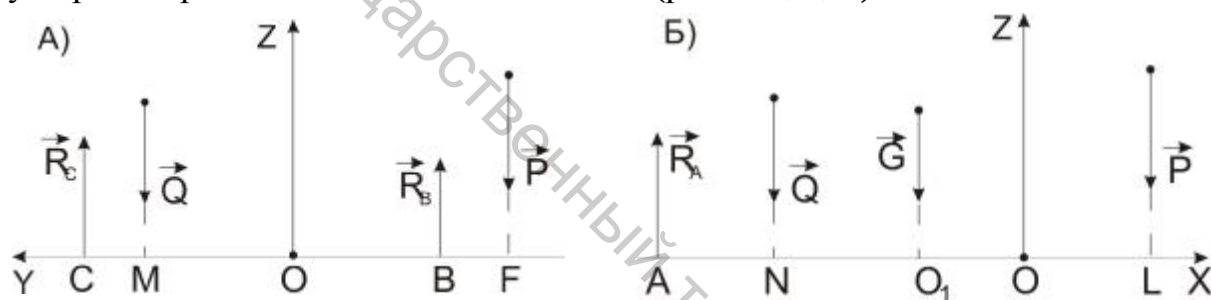


Рис. 4.6

Тогда уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & R_A + R_B + R_C - P - Q - G &= 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, & R_B \cdot OB - P \cdot OF + Q \cdot OM - R_C \cdot OC &= 0, \\ \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0, & -R_A \cdot OA + Q \cdot ON + G \cdot O_1O - P \cdot OL &= 0. \end{aligned} \quad (4.18-4.20)$$

Учитывая, что

$$OC = OB = OA \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad OF = K_1L = 3a \sin j, \quad OM = E_1N = \frac{2}{3}a \sin j,$$

$$AO = a, \quad ON = \frac{2}{3}a \cos j + \frac{a}{3}, \quad OL = 3a \cos j - \frac{a}{3}, \quad AO = a$$

и подставляя значения заданных величин, приведем уравнения (4.18-4.20) к более простому виду

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = \frac{5}{2}G, \\ R_B - R_C = \frac{5\sqrt{3}}{6}G \sin j, \\ -R_A + \frac{5}{6}G - \frac{5}{6}G \cos j = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем значение R_A

$$R_A = \frac{5}{6}G(1 - \cos j).$$

Подставив значение R_A в первое уравнение, получим два уравнения для определения R_B и R_C :

$$R_B + R_C = \frac{10}{6}G + \frac{5}{6}G \cos j,$$

$$R_B - R_C = \frac{5\sqrt{3}}{6}G \sin j,$$

из которых получаем искомые значения:

$$R_B = \frac{G(10 + 5\cos j + 5\sqrt{3}\sin j)}{12},$$

$$R_C = \frac{G(10 + 5\cos j - 5\sqrt{3}\sin j)}{12}.$$

Пример 4.4:

Однородная прямоугольная дверь веса 300 Н укреплена с помощью подпятника А и подшипника В. Дверь удерживается в приоткрытом положении двумя веревками, одна из которых DC натягивается грузом $Q=100$ Н, а другая прикреплена в точке К к стене и расположена параллельно координатной оси Оу. Определить натяжение веревки FK и реакции опор, если $FE=FD$, $BD=\frac{1}{3}AB$ (рис. 4.7, а).

Решение:

Выбрав в качестве объекта равновесия дверь, покажем активные силы: сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в центре тяжести двери, и действие противовеса $\vec{Q}$, приложенного в точке D и направленного вдоль нити DC.

Действие активных сил должно уравниваться реакциями связей. Реакцию веревки KF направим вдоль веревки к точке К. Реакцию подшипника В заменим двумя составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, а реакцию подпятника А заменим тремя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$.

Если составление уравнений по рис. 4.7, А затруднительно, можно изобразить дверь вместе с действующими на нее силами в трех проекциях (рис. 4.7, Б, В, Г):

Б) вид спереди, ось х перпендикулярна к плоскости проекции;

В) вид справа, ось у перпендикулярна к плоскости проекции;

Г) вид сверху, ось z перпендикулярна к плоскости проекции.

Для определения шести неизвестных реакций составим шесть уравнений равновесия действующей на дверь пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - Q \cos 30^\circ = 0, \quad (4.21)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + Q \cos 30^\circ = 0, \quad (4.22)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A - P = 0, \quad (4.23)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad T \frac{AB}{2} - Y_B AB - Q \cos 60^\circ AB - P \frac{AB}{6} \cos 60^\circ = 0, \quad (4.24)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad X_B AB - Q \cos 30^\circ AB + P \frac{AB}{6} \cos 30^\circ = 0, \quad (4.25)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0 \quad , \quad Q \frac{AB}{3} \cos 30^\circ - T \frac{AB}{3} \cos 30^\circ = 0 \quad (4.26)$$

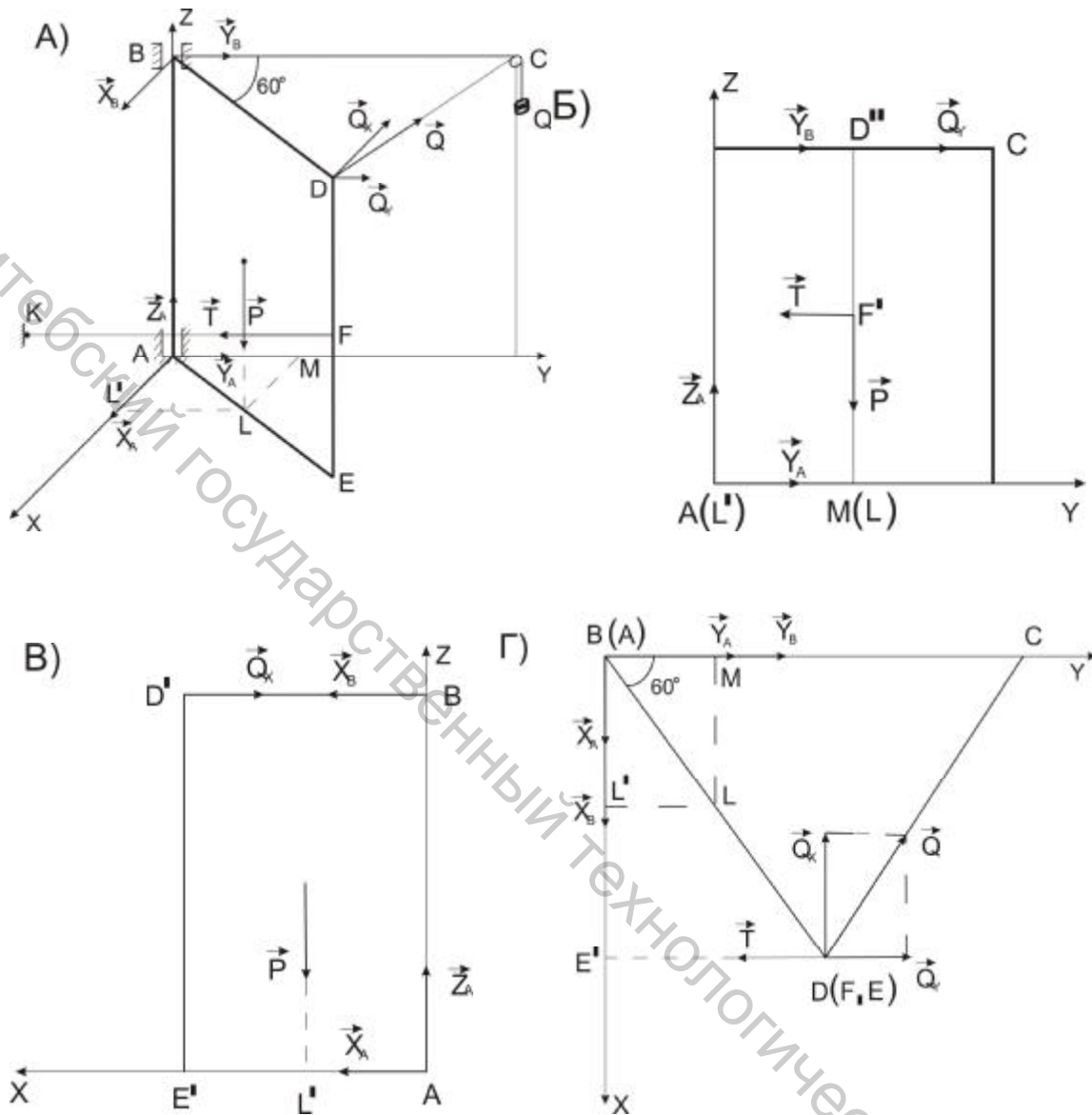


Рис. 4.7

Из уравнения (4.26) видно, что $T=Q=100$ Н.

Из уравнения (4.25) получим, что $X_B = (Q - \frac{P}{6}) \cos 30^\circ = 25\sqrt{3}$ Н.

Из уравнения (4.24) найдем, что $Y_B = \frac{T}{2} - Q \cos 60^\circ - \frac{P}{6} \cos 60^\circ = -25$ Н.

Далее, из уравнения (4.23) $Z_A = P = 300$ Н.

Значение Y_A определим из уравнения (4.22): $Y_A = -Y_B - Q \cos 60^\circ + T = 75$ Н.

Из уравнения (4.21) найдем X_A : $X_A = Q \cos 30^\circ - X_B = 25\sqrt{3}$ Н.

Составляющая $\vec{Y}_B$ реакции подшипника направлена противоположно указанной на рисунке.

Ответ: $T = 100$ Н, $X_A = 25\sqrt{3}$ Н, $Y_A = 75$ Н, $Z_A = 300$ Н, $X_B = 25\sqrt{3}$ Н, $Y_B = -25$ Н.

Пример 4.5:

Изогнутый стержень ABCD концом A заделан в стену. К концу E приложена сила $\vec{P}$, на участке CD находится распределенная нагрузка интенсивности $q_{\max} = q_0$, а в вертикальной плоскости YZ действует пара сил с моментом M (рис. 4.8). Определить реакции заделки, если

$$\alpha = 45^\circ, b = 45^\circ, q = \frac{2P}{l}, M = 4Pl, AB = 2l, BC = CD = DE = l.$$

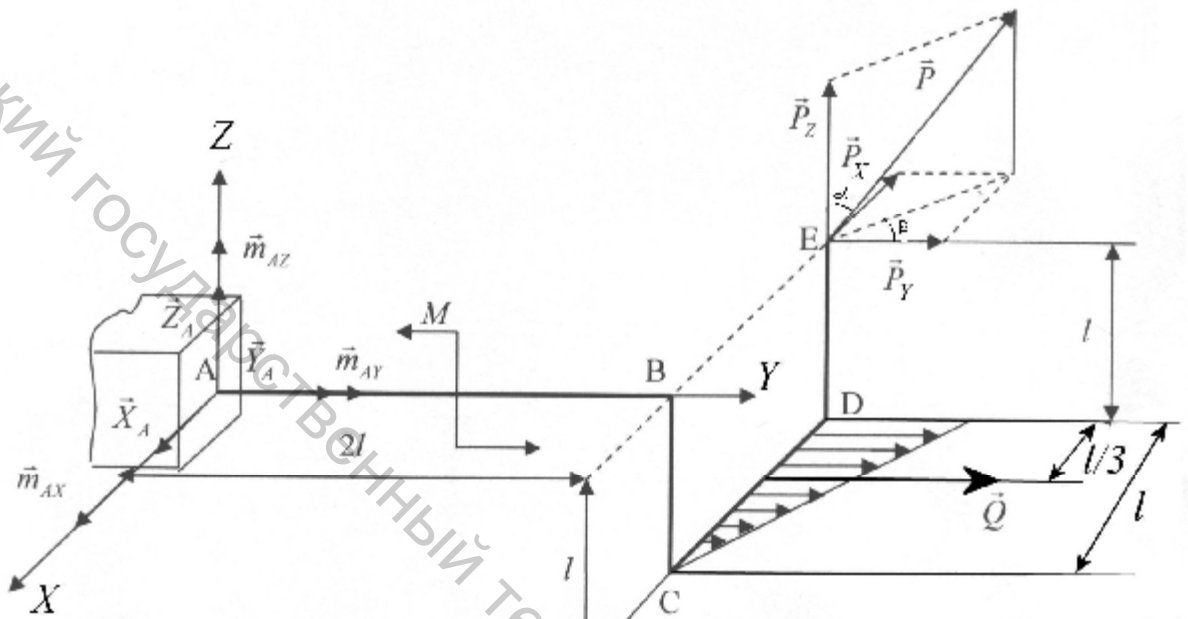


Рис. 4.8

Решение.

Рассмотрим равновесие изогнутого стержня, к которому приложена сила $\vec{P}$, пара сил с моментом M , распределенная нагрузка, которую заменим равнодействующей $\vec{Q}$, величина которой $Q = \frac{q_0 \cdot CD}{2} = P$, а линия действия пройдет через центр тяжести треугольника нагрузки, т.е. на расстоянии $l/3$ от вершины D. Принцип освобождения от связи: силы реакции заделки сводятся к главному вектору сил реакции и главному моменту. Составляющие главного вектора сил реакции обозначим $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, составляющие главного момента сил реакции в заделке обозначим $\vec{m}_{AX}, \vec{m}_{AY}, \vec{m}_{AZ}$ и направим их по положительным направлениям координатных осей X, Y, Z. При определении момента силы $\vec{P}$ относительно осей координат используем теорему Вариньона. Силу $\vec{P}$ разложим на составляющие $\vec{P}_X, \vec{P}_Y, \vec{P}_Z$, где численно $P_X = P \sin \alpha \sin b$, $P_Y = P \sin \alpha \cos b$, $P_Z = P \cos \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} m_X(\dot{\vec{P}}) &= m_X(\dot{\vec{P}}_X) + m_X(\dot{\vec{P}}_Y) + m_X(\dot{\vec{P}}_Z), \\ m_Y(\dot{\vec{P}}) &= m_Y(\dot{\vec{P}}_X) + m_Y(\dot{\vec{P}}_Y) + m_Y(\dot{\vec{P}}_Z), \\ m_Z(\dot{\vec{P}}) &= m_Z(\dot{\vec{P}}_X) + m_Z(\dot{\vec{P}}_Y) + m_Z(\dot{\vec{P}}_Z). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{kx} &= 0, X_A - P \sin \alpha \sin b = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= 0, Y_A + Q + P \sin \alpha \cos b = 0, \\ \Sigma F_{kz} &= 0, Z_A + P \cos \alpha = 0, \\ \Sigma m_X(\vec{F}_k) &= 0, m_{AX} + M + P \cos \alpha \cdot 2l + Q \cdot l = 0, \\ \Sigma m_Y(\vec{F}_k) &= 0, m_{AY} + P \cos \alpha \cdot l = 0, \\ \Sigma m_Z(\vec{F}_k) &= 0, m_{AZ} + P \sin \alpha \sin b \cdot 2l - P \sin \alpha \cos b \cdot l - Q \cdot \frac{2}{3}l = 0. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений содержит по одной неизвестной величине. Решая эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} X_A &= P \sin 45^\circ \sin 45^\circ = 0,5P, \\ Y_A &= -q - P \sin 45^\circ \cos 45^\circ = -1,5P, \\ Z_A &= -P \cos 45^\circ = -0,71P, \\ m_{AX} &= -M - P \cos 45^\circ \cdot 2l - Q \cdot l = -5Pl - 1,42Pl - Pl = -6,42Pl, \\ m_{AY} &= -0,71Pl, \\ m_{AZ} &= -P \sin 45^\circ \sin 45^\circ \cdot 2l + P \sin 45^\circ \cos 45^\circ \cdot l + \frac{2}{3}Pl = 0,17Pl. \end{aligned}$$

Глава V

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Центр тяжести однородного твердого тела

Если твердое тело находится вблизи поверхности земли, то силы тяжести, приложенные к каждой материальной частице этого тела, образуют систему параллельных сил. Центр параллельных сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ называется центром тяжести C твердого тела, а сумма сил тяжести всех его материальных частиц называется весом $\vec{P}$ твердого тела: $\vec{P} = \sum \vec{P}_k$.

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C твердого тела определяются формулами

$$x_C = \frac{1}{P} \sum P_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{P} \sum P_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{P} \sum P_k z_k, \quad (5.1)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил тяжести P_k частиц тела.

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C однородного твердого тела определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{V} \sum V_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum V_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum V_k z_k, \quad (5.2)$$

где V_k — объемы отдельных частей тела, V — объем всего тела.

Для однородной тонкой пластинки, расположенной в плоскости xOy (рис. 5.1) координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{S} \sum S_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum S_k y_k, \quad (5.3)$$

где S_k — площади отдельных частей пластинки, S — площадь всей пластинки.

Сумма $\sum S_k x_k = S y_C$ называется статическим моментом площади однородной плоской фигуры относительно оси y , а сумма $\sum S_k y_k = S x_C$ — статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси x .

Таким образом, статический момент площади плоской фигуры относительно оси равен произведению площади фигуры на алгебраическое значение расстояния от центра тяжести до этой оси.

Статический момент площади плоской фигуры относительно оси измеряется в см^3 .

Если известны статические моменты площади плоской фигуры относительно координатных осей, то координаты ее центра тяжести определяются по формулам

$$x_C = \frac{S_y}{S}, \quad y_C = \frac{S_x}{S}, \quad (5.4)$$

где S — площадь всей фигуры.

Координаты центра тяжести линии находятся по формулам

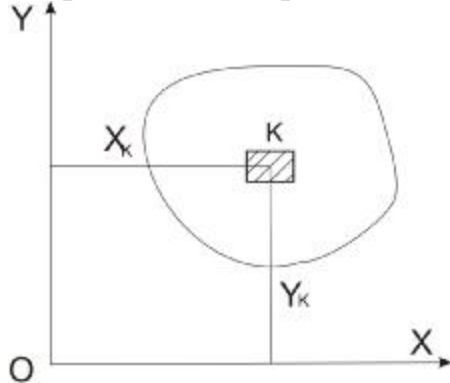


Рис. 5.1

$$x_C = \frac{1}{L} \sum l_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum l_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum l_k z_k, \quad (5.5)$$

где L —длина всей линии, l_k —длины отдельных ее частей.

5.2. Методы определения координат центра тяжести твердого тела

5.2.1. Метод симметрии

Если твердое тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести этого тела лежит соответственно или в плоскости, или на оси, или в центре симметрии. Так, например, для твердого тела, имеющего ось симметрии, одну из координатных осей, допустим, ось x , следует совместить с осью симметрии. Так как центр тяжести лежит на оси симметрии, т. е. на оси x , то $y_C = z_C = 0$ и остается определить только координату x_C .

5.2.2. Метод разбиения

Этот метод заключается в том, что однородное твердое тело разбивают на конечное число частей, положение центра тяжести каждой из которых известно или легко может быть определено. Например, при разбиении площади однородной плоской фигуры, изображенной на рисунке 5.2, на три части положение ее центра тяжести определяется формулами

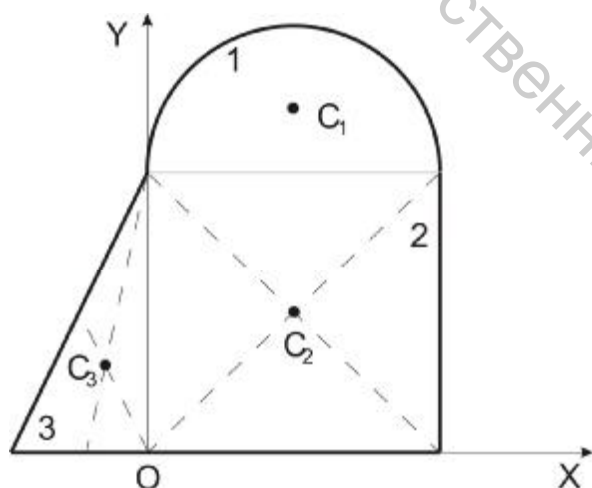


Рис. 5.2

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \\ y_C &= \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ —координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 частей 1, 2, 3, S_1, S_2, S_3 —площади этих частей.

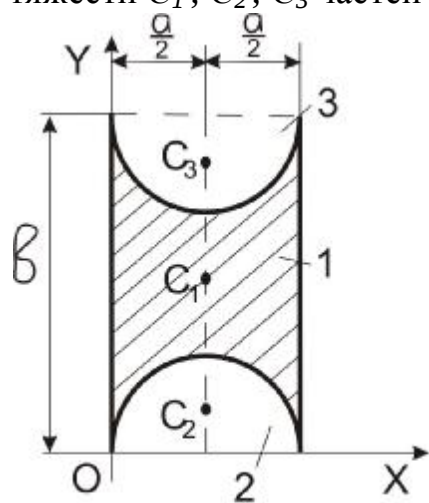


Рис. 5.3

5.2.3. Метод дополнения

В некоторых задачах твердое тело заменяется не суммой, а разностью его частей. Этот метод применяется в том случае, если твердое тело имеет вырезы.

Так, например, в случае пластинки с двумя вырезами, изображенной на рисунке 5.3, ее площадь можно определить как разность площадей прямоугольника 1 и двух вырезанных полуокружностей 2, 3: $S = S_1 - S_2 - S_3$. В этом случае положение центра тяжести пластины определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 - S_2 - S_3}, \\ y_c &= \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 - S_2 - S_3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

где $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ – координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 прямоугольника и двух вырезов.

Так как данная плоская фигура имеет ось симметрии, то достаточно определить одну координату центра тяжести.

Иногда для определения положений центров тяжести линий и площадей плоских фигур пользуются теоремами Гульдина.

Первая теорема Гульдина.

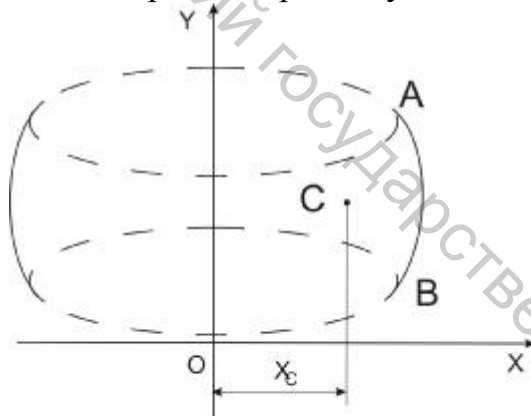


Рис. 5.4

Площадь поверхности вращения, полученной вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой, но ее не пересекающей, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной ее центром тяжести:

$$S = 2\pi x_c L,$$

где L – длина кривой (рис. 5.4).

Вторая теорема Гульдина.

Объем тела вращения, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади на длину окружности, описанной ее центром тяжести:

$$V = 2\pi x_c S,$$

где S – площадь плоской фигуры.

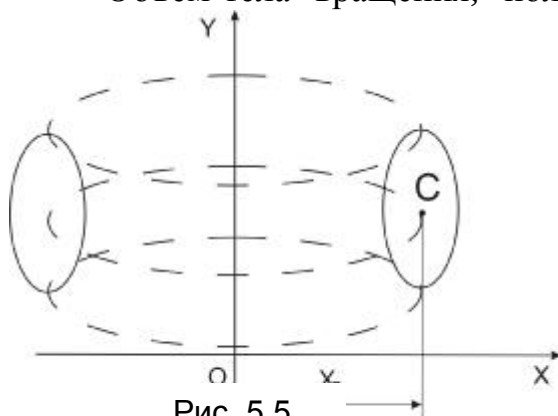


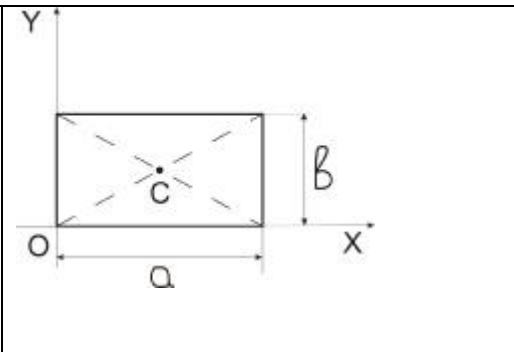
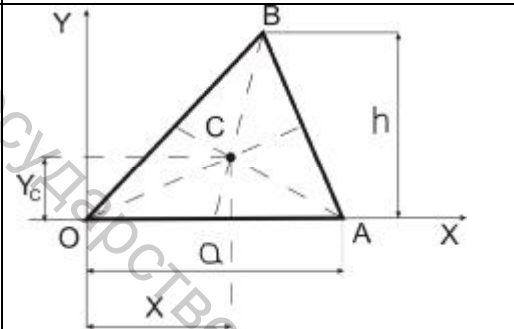
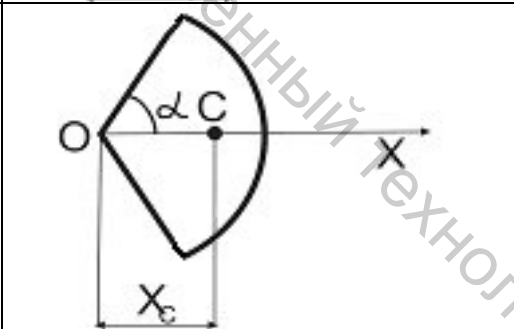
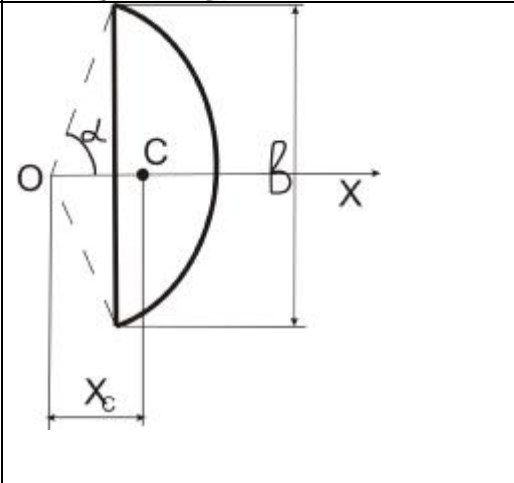
Рис. 5.5

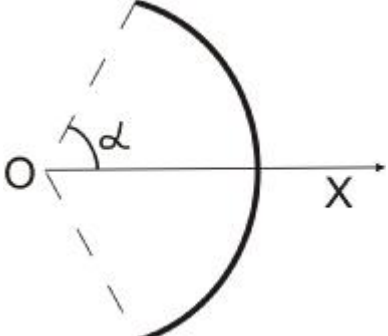
Рис. 5.5

5.3. Центры тяжести некоторых линий, плоских фигур, твердых тел

Положение центров тяжести некоторых плоских фигур приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Плоская фигура	Площадь	Координаты центра тяжести
Прямоугольник 	$S=ab$	$x_C=a/2$ $y_C=b/2$
Треугольник 	$S=ah/2$	$y_C=h/3$ $x_C=(x_1+x_2+x_3)/3$ где x_1, x_2, x_3 — координаты вершин O, A, B
Круговой сектор 	$S=\alpha R^2$ $S=\pi R^2/2$	$x_C=2R\sin\alpha/3\alpha$ $x_C=4R/3\pi$
Круговой сегмент 	$S=R^2(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $x_C = \frac{b^3}{12S}$

Дуга окружности		$L=2R\alpha$, L – длина дуги	$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
--------------------	---	---------------------------------------	--------------------------------------

Пример 5.1:

Определить координаты центра тяжести C стержневого контура $OADB$, состоящего из дуги ADB четверти окружности радиуса $OD=R$ и из дуги полуокружности AOB , построенной на хорде AB как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы (рис. 5.6, а).

Решение:

Заданный контур разобьем на два контура: дугу ADB четверти окружности радиуса R и дугу полуокружности радиуса $DE=r$, который из треугольника OAE (рис. 5.6, б) равен $r = R \cos 45^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Данный контур имеет ось симметрии, в данном случае – ось x . Значит,

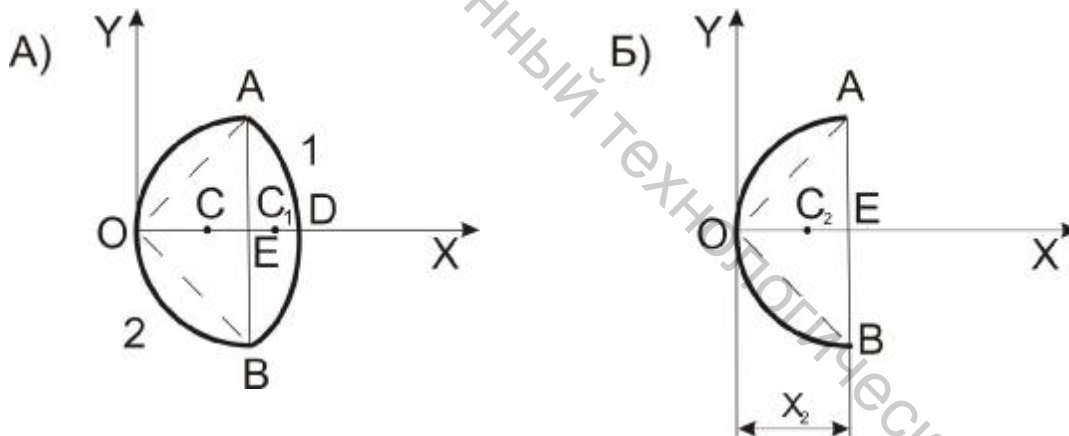


Рис. 5.6

$y_c = 0$ и достаточно определить x_c . По формуле (5.6) имеем

$$x_c = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}. \quad (5.9)$$

Центр тяжести C_1 дуги окружности ADB лежит на оси x и тогда координата x_1 равна

$$OC_1 = x_1 = \frac{4p \sin \frac{p}{4}}{p} = \frac{2R\sqrt{2}}{p}.$$

Длина дуги ADB четверти окружности $l_1 = \frac{pR}{2}$.

Центр тяжести C_2 дуги полуокружности также находится на оси x и отстоит от точки E на расстоянии $EC_2 = \frac{r \sin \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{p}$ (рис. 5.6, б).

Получим, что координата x_2 центра тяжести C_2

$$OC_2 = x_2 = OE - EC_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2} - \frac{R\sqrt{2}}{p} = \frac{R\sqrt{2}}{2p}(p - 2).$$

Длина дуги полуокружности $l_2 = p \cdot r = \frac{pR\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле (5.7) получим

$$x_C = \frac{\frac{pR}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{2}}{p} + \frac{pR\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2p}(p - 2)}{\frac{pR}{2} + \frac{pR\sqrt{2}}{2}} = \frac{[R\sqrt{2} + \frac{R}{2}(p - 2)] \cdot 2}{p(1 + \sqrt{2})} = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{p}(3 - 2\sqrt{2}),$$

$$x_C = 0,52R.$$

Пример 5.2:

Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, изображенной на рис. 5.7. Радиус вырезанного круга $R=15$ см.

Решение: Данная плоская фигура представляет собой совокупность прямоугольника $OABD$ и треугольника ABE , из которой вырезан полукруг радиуса R . Для определения координат центра тяжести данной плоской фигуры применим формулы (5.8):

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3}, \quad (5.10)$$

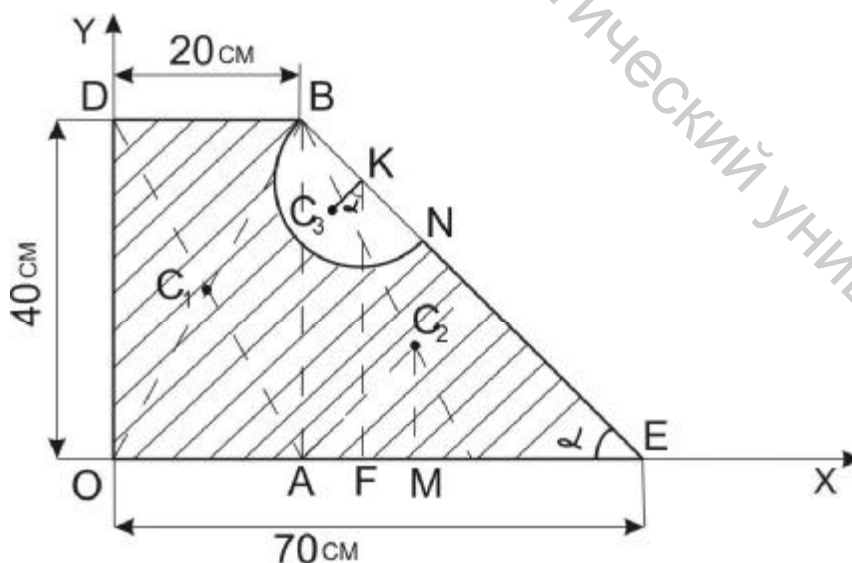


Рис. 5.7

где S_1 – площадь прямоугольника OABD, S_2 – площадь треугольника ABE, S_3 – площадь полукруга.

Центр тяжести C_1 прямоугольника находится в точке пересечения диагоналей. Координаты центра C_1 : $x_1=10$ см, $y_1=20$ см, площадь прямоугольника $S_1 = OA \cdot AB = 800$ см².

Центр тяжести C_2 треугольника ABE находится в точке пересечения медиан.

Определим координаты центра тяжести C_2 по формулам

$$x_2 = OM = \frac{x_A + x_E + x_B}{3} = \frac{20 + 70 + 40}{3} = 43,3 \text{ см},$$

$$y_2 = C_2M = \frac{y_A + y_E + y_B}{3} = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ см}.$$

Площадь треугольника ABE $S_2 = \frac{1}{2} AE \cdot AB = 1000$ см².

Центр тяжести C_3 полукруга лежит на перпендикуляре к диаметру BN этого полукруга, причем $C_3K = \frac{4R}{3\pi} = 6,37$ см. Вычислим координаты центра C_3 :

$$x_3 = OF - C_3K \sin a, \quad y_3 = FK - C_3K \cos a. \quad (5.11)$$

Найдем значения величин, входящих в формулы (5.11). Из треугольника ABE имеем $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 64,03$ см. Тогда

$$\cos a = \frac{AE}{BE} = 0,781, \quad \sin a = \frac{AB}{BE} = 0,624.$$

Определим значение KE: $KE = BE - BK = 49,03$ см, причем

$$KF = KE \sin a = 30,59 \text{ см}, \quad FE = KE \cos a = 38,29 \text{ см}, \quad OF = OE - FE = 31,71 \text{ см}.$$

Подставив найденные значения в формулы (5.11), получим

$$x_3 = 31,71 - 6,37 \cdot 0,624 = 24,74 \text{ см},$$

$$y_3 = 30,59 - 6,37 \cdot 0,781 = 25,62 \text{ см}.$$

Площадь S_3 полукруга: $S_3 = \frac{\pi R^2}{2} = 353,25$ см².

Тогда искомые величины координат центра C тяжести плоской фигуры

$$x_C = \frac{800 \cdot 10 + 1000 \cdot 43,3 - 353,25 \cdot 24,74}{800 + 1000 - 353,25} = 28,685 \text{ см}$$

$$y_C = \frac{800 \cdot 20 + 1000 \cdot 13,3 - 353,25 \cdot 25,62}{800 + 1000 - 353,25} = 14 \text{ см}.$$

Глава VI
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

6.1. Введение в кинематику. Траектория и уравнения движения точки

Кинематика—раздел теоретической механики, изучающий движение точки или твердого тела независимо от причин, вызывающих это движение.

Механическим движением называется изменение с течением времени положения данного тела по отношению к другим телам. Изменение положения твердого тела обычно определяется по отношению к некоторой системе отсчета, т. е. системе координат. Система координат, условно принятая за неподвижную, называется абсолютной системой координат, а движение точки или тела по отношению к этой системе отсчета называется абсолютным. Движение точки или твердого тела по отношению к движущейся системе координат называют относительным.

Задачи кинематики заключаются в установлении математических способов задания движения точек или тел и определении кинематических величин, характеризующих данное движение.

Изучение кинематики начнем с изучения простейшего объекта—точки.

Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая—криволинейным.

В кинематике применяются три способа, описывающих движение точки: векторный, координатный и естественный.

При векторном способе определения движения радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки М, проведенный из начала координат О в точку М,

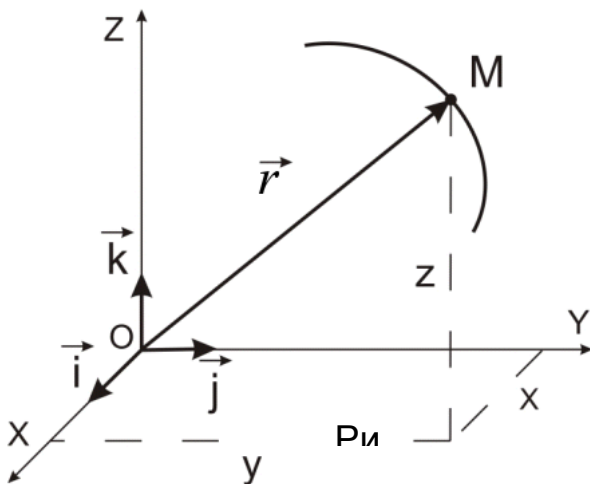
выражается как векторная функция времени (рис. 6.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (6.1)$$

Если ввести орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей, получим для $\vec{r}$ выражение:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (6.2)$$

где x, y, z —декартовы координаты точки М.



Координатный способ определения движения точки состоит в том, что координаты движущейся точки в заданной системе координат выражаются как функция времени t (рис. 6.1).

Уравнения вида

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (6.3)$$

представляют собой закон движения точки при координатном способе задания движения. Если точка движется в плоскости xOy , получим два уравнения движения

$$x = f_1(t), y = f_2(t). \quad (6.4)$$

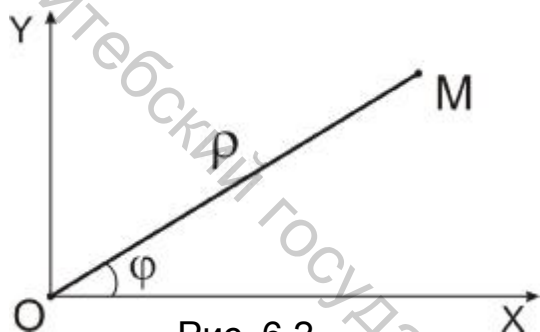


Рис. 6.2

В этом случае можно определить движение точки, применяя полярную систему координат, в которой положение точки в плоскости определяется радиусом ρ – длиной отрезка, соединяющего неподвижный центр O с движущейся точкой M , и углом φ между неподвижной прямой Ox (полярной осью) и отрезком $\overline{OM}$ (рис. 6.2).

Уравнения движения точки в полярных координатах имеют вид:

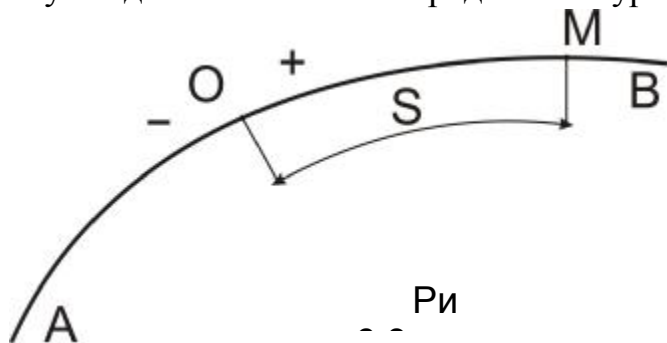
$$r = r(t), j = j(t). \quad (6.5)$$

Формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$x = r \cdot \cos j, y = r \cdot \sin j. \quad (6.6)$$

Третий способ задания движения точки называется естественным. В этом случае движение точки определяется уравнением

$$S = S(t), \quad (6.7)$$



где S – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль дуги от некоторой начальной точки O на траектории (рис. 6.3).

Естественным способом задания движения точки удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки заранее известна.

При движении точки в плоскости целесообразно использовать полярные координаты (рис. 6.4). В полярной системе координат положение точки определяется радиусом r – длиной отрезка, соединяющего неподвижный центр O с движущейся точкой M , и углом j между неподвижной прямой Ox и отрезком OM . В этом случае положение точки M определяется полярными координатами: $r = r(t), j = j(t)$.

Формулы перехода от полярных координат к декартовым имеют вид: $x = r \cos j, y = r \sin j$.

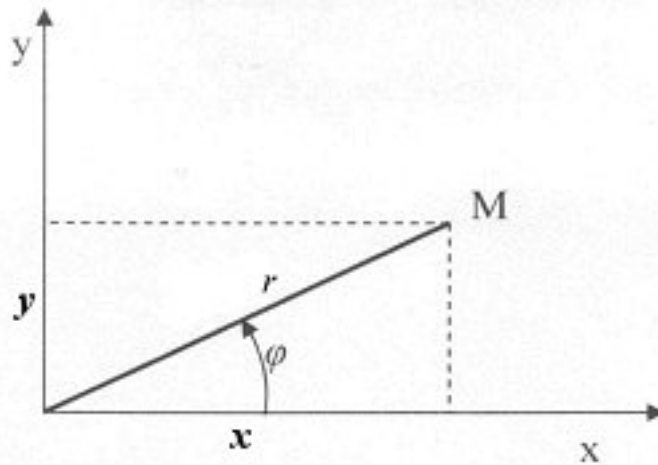


Рис. 6.4

При движении точки в пространстве используют цилиндрические и сферические координаты.

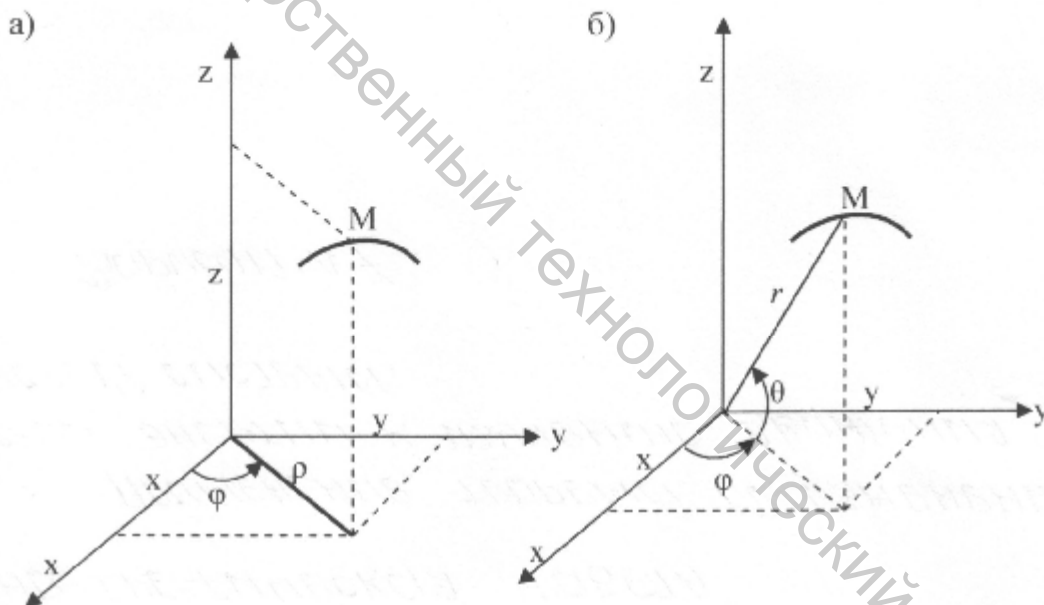


Рис. 6.5

В цилиндрических координатах (рис. 6.5, а) положение точки определяется радиусом r , углом j и координатой (апplikатой) z . Следовательно, движение точки задано, если r, j, z будут известными функциями времени $r = r(t)$, $j = j(t)$, $z = z(t)$.

Переход от цилиндрических координат точки к прямоугольным декартовым координатам выражается формулами $x = r \cos j$, $y = r \sin j$, $z = z$.

В сферических координатах (рис. 6.5, б) положение точки определяется полярным радиусом r , углом j и углом q . Движение точки будет задано, если $r = r(t)$, $j = j(t)$, $q = q(t)$.

Формулы, связывающие сферические координаты с декартовыми, имеют вид:
 $x = r \cos q \cos j$, $y = r \cos q \sin j$, $z = r \sin q$.

6.2. Скорость и ускорение точки при различных способах задания движения

6.2.1. Скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения

Скорость точки в данный момент времени равна первой производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (6.8)$$

Вектор скорости точки в данный момент направлен по касательной к траектории точки в сторону движения (рис. 6.6).

Ускорение точки в данный момент времени равно первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6.9)$$

При прямолинейном движении вектор $\vec{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. При криволинейном движении вектор $\vec{a}$ ускорения направлен в сторону вогнутости траектории (рис. 6.6).

6.2.2. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Вектор скорости точки можно представить равенством

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}, \quad (6.10)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y, z . Проекции скорости на неподвижные оси декартовых координат равны:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (6.11)$$

Модуль скорости равен

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (6.12)$$

Направление скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{V}, x) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}, y) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\vec{V}, z) = \frac{V_z}{V}. \quad (6.13)$$

Скорость точки направлена по касательной к траектории.

Ускорение точки можно представить равенством

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Проекции ускорения на неподвижные декартовы оси координат равны:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}. \quad (6.14)$$

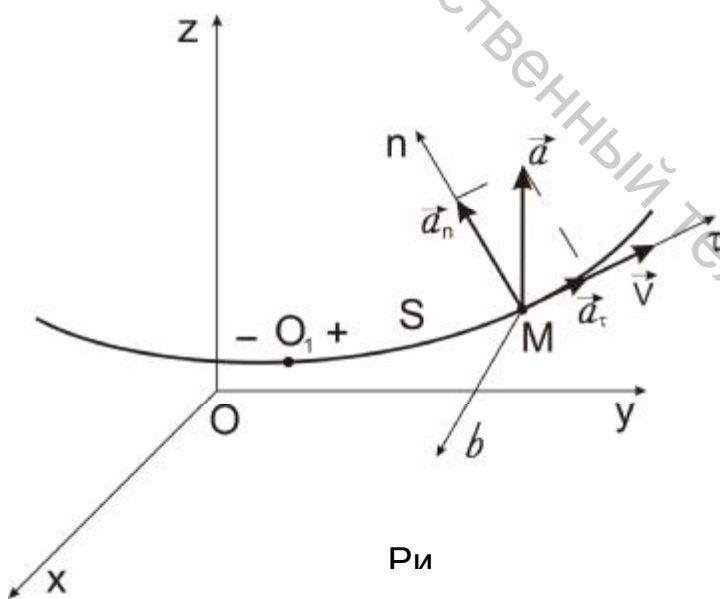
Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6.15)$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}, z) = \frac{a_z}{a}. \quad (6.16)$$

6.2.3. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения



В этом случае значения векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}$ определяют по их проекциям на подвижные оси $Mtnb$, имеющие начало в точке М и движущиеся вместе с точкой М (рис. 6.7). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника, направлены следующим образом: ось Mt направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния S и называется касательной осью; ось Mn направлена по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и

направленной в сторону вогнутости траектории, и называется главной нормалью; ось Mb направлена перпендикулярно первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку, и называется бинормалью.

Скорость точки, направленная по касательной к траектории, равна

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{t} = V_t \cdot \vec{t}, \quad (6.17)$$

где $\vec{t}$ – орт касательной, V_t – проекция скорости на касательную, причем

$$V_t = \frac{dS}{dt}. \quad (6.18)$$

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости Mtn и определяется векторной суммой касательного и нормального ускорения точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (6.19)$$

Проекция ускорения на касательную равна

$$a_t = \frac{dV}{dt}. \quad (6.20)$$

Модуль нормального ускорения определяется формулой

$$a_n = \frac{V^2}{r}. \quad (6.21)$$

где r – радиус кривизны траектории.

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{r}\right)^2}. \quad (6.22)$$

Рассмотрим частные случаи движения точки:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории $r \rightarrow \infty$ и, следовательно, $a_n = 0$. В этом случае ускорение $\vec{a}$ направлено по прямолинейной траектории точки и по модулю равно

$$a = |a_t| = \left| \frac{dV_t}{dt} \right| = \left| \frac{d^2 S}{dt^2} \right|. \quad (6.23)$$

2. Если точка движется по кривой равномерно, то $a_t = \frac{dV_t}{dt} = 0$, а потому ускорение направлено по нормали к траектории и по модулю равно

$$a = a_n = \frac{V^2}{r}. \quad (6.24)$$

Переход от координатного способа задания движения к естественному определяется формулой

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (6.25)$$

Задачи по кинематике точки следует решать в таком порядке:

- 1) выбрать систему координат;
- 2) составить уравнения движения точки в выбранной системе координат;
- 3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат и скорость по модулю и направлению;
- 4) зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси координат и ускорение по модулю и направлению.

Пример 6.1:

Движение точки задано векторным уравнением $\vec{r} = (1-t)\vec{i} + (t-1)\vec{j}$. Определить закон движения $S = S(t)$ точки по траектории, отсчитывая дуговую координату S от начального положения точки.

Решение:

Учитывая формулу разложения радиуса-вектора по ортам $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, получим

$$x = 1-t, \quad y = t-1.$$

Тогда, используя формулу (6.25), получим окончательно

произвольный момент времени определяются отрезками ON и MN соответственно, причем

Решение задачи можно представить двумя способами задания движения точки.

произвольный момент времени определяются отрезками ON и MN соответственно, причем

Значение OM найдем из равнобедренного треугольника OCM :

Так как стержень вращается равномерно, то угол поворота $j = \omega t$, где ω – угловая скорость вращения стержня. Тогда координаты колечка М будут равны:

Определим проекции скорости колечка М на оси x и y :

Модуль скорости колечка М

Проекции ускорения колечка на эти же оси

72

Модуль ускорения колечка М

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4Rw^2. \quad (6.28)$$

Так как вращение стержня равномерное, то угловая скорость w определяется из формулы $w = \frac{j}{t}$. Из условия следует, что за 5 сек. стержень поворачивается на прямой угол. Тогда $w = \frac{p}{10} \text{ с}^{-1}$.

Окончательно, скорость и ускорение колечка будут равны соответственно $V = 2p \text{ см/с}$, $a = 0,4p^2 \text{ см/с}^2$.

2-й способ. При естественном способе задания движения положение колечка М на окружности определится дугой $\overset{\frown}{OM}$, причем

$$S = \overset{\frown}{OM} = R \cdot 2j = 2Rwt.$$

Тогда значение скорости колечка $V = \frac{dS}{dt} = 2Rw$.

Подставляя значения R и w , получим, что $V = 2p \text{ см/с}$. Ускорение колечка М в этом случае определится формулой $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, где $a_n = \frac{V^2}{r}$ –

нормальное ускорение колечка, $a_t = \frac{dV}{dt}$ – касательное ускорение колечка.

В нашем случае $a_n = \frac{V^2}{r} = 4Rw^2$, $a_t = 0$, так как скорость колечка постоянна.

Окончательно, ускорение колечка

$$a = a_n = 4Rw^2 = 0,4p^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор скорости $\vec{V}$ колечка М направлен по касательной к окружности радиуса R . Так как ускорение $\vec{a}$ колечка равно нормальному ускорению, то вектор $\vec{a}$ направлен по радиусу к центру С окружности.

Робот – технический комплекс, предназначенный для выполнения различных движений и обладающий необходимыми для этого исполнительными устройствами, управляющими и информационными системами, а также средствами решения вычислительно-логических задач.

Промышленный робот представляет собой автоматическое устройство, состоящее из исполнительного механизма в виде манипулятора, имеющего несколько степеней подвижности, и механизма программного управления для выполнения в производственном процессе двигательных и управляющих функций. Манипулятор – управляемое устройство для выполнения двигательных функций, аналогичных функциям руки человека при перемещении объектов в пространстве, оснащенное рабочим органом.

Схват манипулятора рассматриваем как геометрическую точку. Задачи движения схвата в трехмерном пространстве следует решать в такой последовательности:

- 1) выбрать неподвижную систему координат;
- 2) составить уравнения движения схвата в выбранной системе координат;
- 3) исключив из уравнений движения схвата время, найти траекторию движения схвата;
- 4) по уравнениям движения схвата определить проекции скорости на оси координат и скорость схвата по модулю и направлению;
- 5) зная проекции скорости схвата, определить проекции ускорения схвата на оси координат и ускорение схвата по модулю и направлению.

7.1. Расчёт кинематических параметров трехзвенного робота-манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения

Пример 7.1:

Вертикальная колонна, несущая руку робота манипулятора, может поворачиваться на угол j . Рука со схватом поворачивается на угол q и выдвигается на расстояние r . Найти скорость и ускорение центра схвата (рис. 7.1).

Решение:

Выразим декартовы координаты центра схвата через его сферические координаты как функции времени t :

$$x = r \sin q \cos j, \quad y = r \sin q \sin j, \quad z = r \cos q.$$

Определим проекции скорости центра схвата на оси X, Y, Z:

$$V_x = \dot{x} = \dot{r} \sin q \cos j + r \cdot \dot{q} \cos q \cos j - r \cdot j \cdot \sin q \cdot \sin j,$$

$$V_y = \dot{y} = \dot{r} \sin q \sin j + r \cdot \dot{q} \cos q \sin j + r \cdot j \cdot \sin q \cos j,$$

$$V_z = \dot{z} = \dot{r} \cdot \cos q - r \cdot \dot{q} \cdot \sin q .$$

Модуль скорости центра схвата

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{q}^2 + r^2 \sin^2 q \cdot \dot{j}^2} .$$

Проекции ускорения центра схвата на декартовы оси координат вычисляются как производные по времени от проекций скорости:

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r} \cdot \sin q \cdot \cos j + 2\dot{r} \cdot \dot{q} \cdot \cos q \cdot \cos j - 2\dot{r} \cdot \dot{j} \cdot \sin q \cdot \sin j - r \cdot \dot{q}^2 \cdot \sin q \cos j + \\ + r \cdot \dot{j}^2 \cdot \cos q \cdot \cos j - 2r \cdot \dot{q} \cdot \dot{j} \cdot \cos q \cdot \sin j - r \cdot \dot{j}^2 \cdot \sin q \cdot \cos j - r \cdot \ddot{q} \cdot \sin q \cdot \sin j ,$$

$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r} \cdot \sin q \cdot \sin j + 2\dot{r} \cdot \dot{q} \cdot \cos q \cdot \sin j + 2\dot{r} \cdot \dot{j} \cdot \sin q \cdot \cos j - r \cdot \dot{q}^2 \cdot \sin q \cdot \sin j + \\ + r \cdot \dot{j}^2 \cdot \cos q \cdot \sin j + 2r \cdot \dot{q} \cdot \dot{j} \cdot \cos q \cdot \cos j - r \cdot \dot{j}^2 \cdot \sin q \cdot \sin j - r \cdot \ddot{q} \cdot \sin q \cdot \cos j ,$$

$$a_z = \ddot{z} = \ddot{r} \cdot \cos q - 2\dot{r} \cdot \dot{q} \cdot \sin q - r \cdot \dot{q}^2 \cdot \sin q - r \cdot \ddot{q} \cdot \sin q .$$

Модуль ускорения центра схвата

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = [(\ddot{r} - r \cdot \dot{q}^2 - r \cdot \dot{j}^2 \cdot \sin^2 q)^2 + (r \cdot \dot{q}^2 + 2\dot{r} \cdot \dot{q} - r \cdot \dot{j}^2 \cdot \sin q \cdot \cos q)^2 + \\ + (r \cdot \dot{j}^2 \cdot \sin q + 2\dot{r} \cdot \dot{j} \cdot \sin q + 2r \cdot \dot{q} \cdot \dot{j} \cdot \cos q)^2]^{1/2} .$$

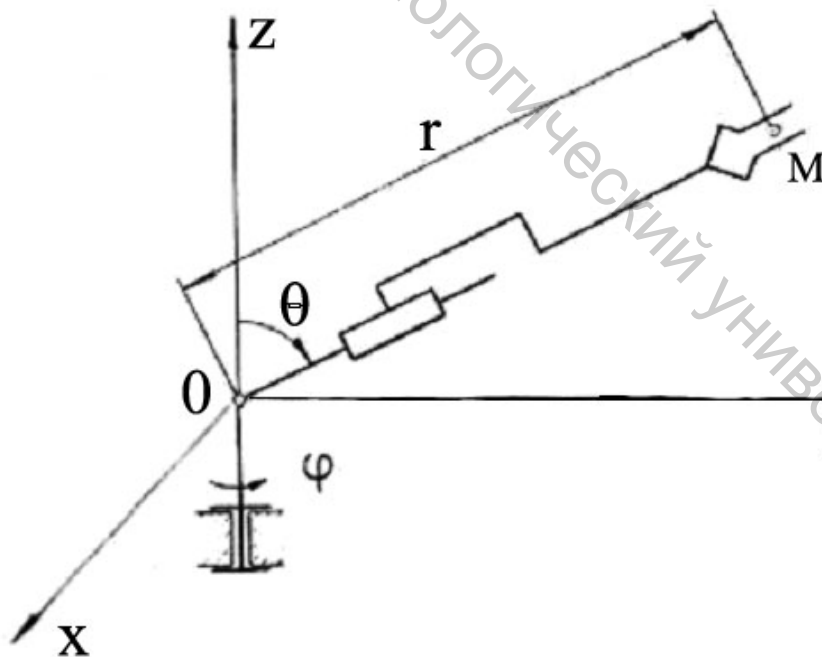


Рис. 7.1

7.2. Расчёт кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом

В работах [3, 5] скорость $\dot{\mathbf{v}}$ и ускорение $\dot{\mathbf{a}}$ в цилиндрической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3 . Для ортогональных криволинейных координат модуль скорости точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$.

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q .

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. При этом искомые $\dot{\mathbf{v}}$ и $\dot{\mathbf{a}}$ определяются только в проекциях на подвижные цилиндрические оси координат r, j, z , связанные с движущейся точкой М.

В работе [3] скорость $\dot{\mathbf{v}}$ и ускорение $\dot{\mathbf{a}}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [5] для преобразования от прямоугольных к цилиндрическим системам координат и наоборот.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности.

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки М (на рис. 7.2 не показана) матричным методом выполнены для случая, когда относительно центра О ее координаты $x_3, y_3, z_3 = \text{const}$.

В прямоугольной неподвижной системе координат x, y, z положение вектора $\dot{\mathbf{R}}$ (рис. 7.2) определяется текущими координатами x, y, z точки O_3 . В цилиндрической подвижной системе координат положение точки O_3 определяется расстоянием r , углом j , величиной $O_2 O_3 = z$. Введем также подвижные системы координат $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$, начало которых находится в точках O_1, O_2 . Указанные на рисунке 7.2 системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_1, A_2, A . В окончательных расчетных формулах принято, что $x_3 = y_3 = z_3 = 0$; точка М совпадает с точкой O_3 . Проекции абсолютной скорости $\dot{\mathbf{v}}$ и ускорения $\dot{\mathbf{a}}$ точки $O_3 = M$ определены как на неподвижные оси координат x, y, z , так и на подвижные цилиндрические оси координат $x_3, y_3, z_3 (r, j, z)$.

Координаты точки M в неподвижной системе xuz в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $x_3y_3z_3$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ j \end{pmatrix} + A_j \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Вектор скорости $\dot{\mathbf{v}}$ точки M в системе xuz определяется дифференцированием текущих координат равенства (7.1) из выражения

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left(A_j \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_j \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right).$$

При $x_3, y_3, z_3 = \text{const}$ получим

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_j \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_j \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \dot{A}_j \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

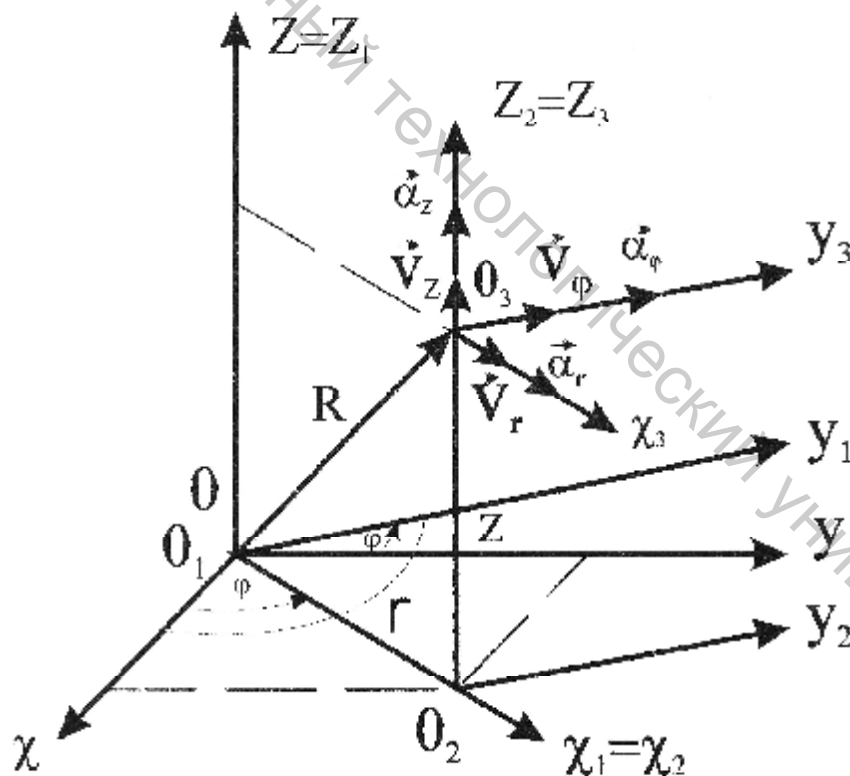


Рис. 7.2

Из формулы (7.2) определяются проекции вектора скорости точки $M(O_3)$ на неподвижные оси координат xuz , которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x = \dot{x} \cos j - r \dot{j} \sin j; \\
\dot{y} &= v_y = \dot{x} \sin j - r \dot{j} \cos j; \\
\dot{z} &= v_z = \dot{z}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Модуль скорости точки O_3 найдется из равенства (7.3) по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + r^2 \dot{j}^2 + \dot{z}^2}. \tag{7.4}$$

Направление вектора скорости определится из равенств (7.3) и (7.4) соответствующими направляющими косинусами.

В свою очередь вектор скорости $\dot{\mathbf{v}}_3$ точки M в системе $x_3 y_3 z_3 (r, j, z)$

$$\dot{\mathbf{v}}_3 = A^T \dot{\mathbf{r}}, \tag{7.5}$$

где A^T - транспортированная матрица, равная произведению транспортированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_2^T A_1^T A_j^T = A_j^T$. В рассматриваемом случае системы координат $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ составляют между собой углы, косинусы которых образуют единичные матрицы A_1 и A_2 . Поэтому $A = A_j \cdot A_1 \cdot A_2 = A_j$, а $A^T = A_j^T$.

Векторы $\dot{\mathbf{v}}; \dot{\mathbf{v}}_3$ в равенствах (7.2) и (7.5) представляют разложение одного и того же вектора $\dot{\mathbf{v}}$ по разным базисам систем координат xyz и $x_3 y_3 z_3$. С учетом (7.2) равенство (7.5) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = A_j^T A_j \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_j^T A_j \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Из формулы (7.6) определяются проекции вектора скорости точки $M(O_3)$ на подвижные цилиндрические оси координат $x_3 y_3 z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид

$$\dot{x}_3 = v_r = \dot{x}; \quad \dot{y}_3 = v_j = r \dot{j}; \quad \dot{z}_3 = v_z = \dot{z}. \tag{7.7}$$

Модуль скорости точки O_3 определяется из равенств (7.7) формулой (7.4), а направление скорости - направляющими косинусами.

Определим ускорение точки в цилиндрической системе координат матричным методом. Вектор ускорения $\ddot{\mathbf{a}}$ точки M в системе xyz определится дифференцированием равенства (7.2)

$$\ddot{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{v}} = (\dot{A}_j \dot{\mathbf{r}} + A_j \ddot{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + 2 \dot{A}_j \dot{\mathbf{r}} + A_j \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + (\dot{A}_j \dot{\mathbf{r}} + A_j \ddot{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Из формулы (7.8) определяются проекции вектора ускорения точки $M(O_3)$ на неподвижные оси координат xyz , которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_x &= (\ddot{x} - r \dot{j}^2) \cos j - (r \ddot{j} + 2 \dot{x} \dot{j}) \sin j; \\
a_y &= (\ddot{x} - r \dot{j}^2) \sin j - (r \ddot{j} + 2 \dot{x} \dot{j}) \cos j; \\
a_z &= \ddot{z}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Модуль ускорения точки O определяется из равенств (7.9) по формуле

$$a = \sqrt{(\dot{r} - r\dot{j}^2)^2 + (r\dot{j} + 2\dot{r}\dot{j})^2 + \dot{z}^2}. \quad (7.10)$$

Направляющие косинусы вектора ускорения определяются из равенств (7.9) и (7.10). Вектор ускорения $\dot{\mathbf{a}}$ точки M в системе $x_3y_3z_3$ (рис. 7.2)

$$\mathbf{f}_{a_3} = A^T \mathbf{f}_a. \quad (7.11)$$

С учетом (7.8) из равенства (7.11) получим проекции вектора ускорения точки $M(O_3)$ на подвижные цилиндрические оси координат $x_3y_3z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид (см. рис. 7.2)

$$\begin{aligned} a_{x_3} &= a_r = \dot{r} - r\dot{j}^2; \\ a_{y_3} &= a_j = r\dot{j} + 2\dot{r}\dot{j}; \\ a_{z_3} &= a_z = \dot{z} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Модуль ускорения точки O определяется формулой (7.10), а направление ускорения - направляющими косинусами.

Полученные расчетные формулы (7.2), (7.4) и (7.8), (7.11) позволяют определить скорость и ускорение точки M в цилиндрических координатах матричным методом.

Вывод формул для расчета проекций скорости и ускорения точки (см. рис. 7.2) на неподвижные xyz и подвижные $x_3y_3z_3$ (r, j, z) оси координат достаточно прост. В рассматриваемом случае это объясняется тем, что все элементы третьей строки и столбца матрицы $A = A_j$, кроме главной диагонали, равны нулю. Элемент главной диагонали равен единице. Кроме того, второй элемент столбцовых матриц расчетных формул (7.2), (7.6), (7.8), (7.11) также равен нулю; при расчете $x_3 = y_3 = z_3 = 0$. Для численного расчета скорости и ускорения точки можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Изложенную методику расчета кинематических параметров следует использовать для определения скорости и ускорения точки в сферических координатах, когда применение известных методов расчета нецелесообразно. Полученные расчетные формулы (7.3), (7.4), (7.7), (7.9), (7.10), (7.12) в частном случае применимы для движения, заданного в полярных координатах. Они позволяют найти проекции скорости и ускорения на радиальное и поперечное направления.

Пример 7.2 (№ 12.38 [7]):

Механизм робота-манипулятора состоит (рис. 7.3) из поворотного устройства, колонны для вертикального перемещения и выдвигаемой руки со схватом. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $j(t), z(t), r(t)$.

Решение:

Кинематическая и расчетная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат, изображена на рис. 7.3. Координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе xyz при заданных $j(t), z(t), r(t)$, выражаются формулой (7.1), где $x_3 = y_3 = z_3 = 0$.

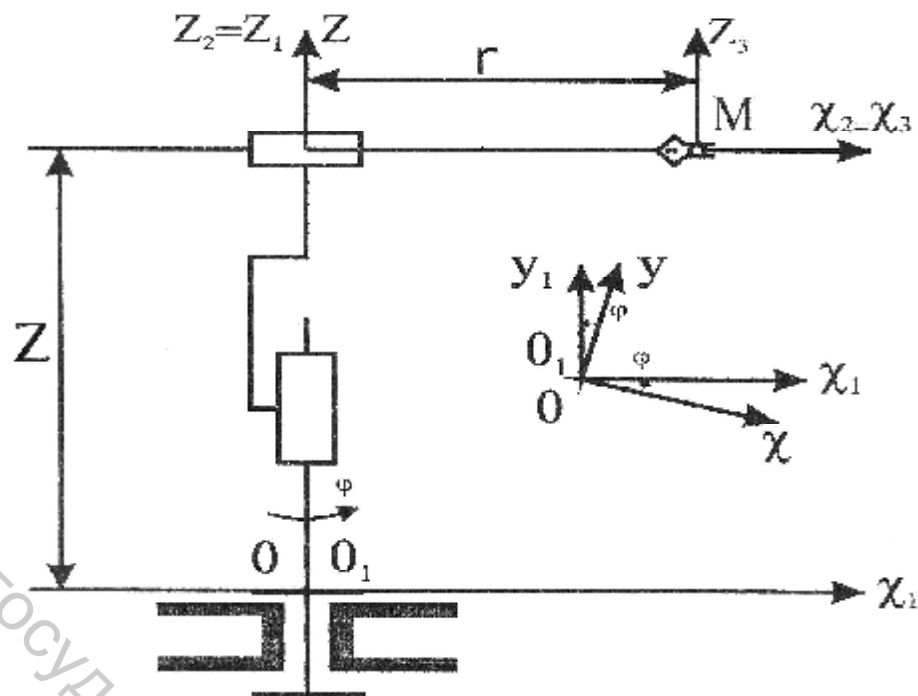


Рис. 7.3

Формула для расчета скорости центра схвата имеет вид (7.6); проекции скорости точки М на подвижные цилиндрические оси координат определяются из (7.7); искомая скорость - из (7.4).

Формула для расчета ускорения центра схвата имеет вид (7.11); его проекции на оси координат определяются из (7.12); искомое ускорение - из (7.10).

При заданных $j(t), z(t), r(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (7.1), где роль параметра играет время t . Они имеют вид

$$x = r \cos j, \quad y = r \sin j, \quad z = z. \quad (7.13)$$

При заданных $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A_j^T , получим из формулы (7.1). Они имеют вид

$$r = x \cos j + y \sin j, \quad j = \arctg(y/x), \quad z = z. \quad (7.14)$$

Уравнения (7.13) и (7.14) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $j(t), z(t), r(t)$, так и при $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат.

7.3. Расчёт кинематических параметров в сферических координатах матричным методом

Рассмотрим матричный метод расчёта кинематических параметров в сферических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [2, 7].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки М (рис. 7.4, а) матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат $X_R Y_\varphi Z_\Theta$. В общем случае, который здесь не рассматривается, координаты $X_R, Y_\varphi, Z_\Theta \neq 0$.

В прямоугольной неподвижной системе координат xyz положение вектора $\dot{\mathbf{R}}$ (рис. 7.4) определяется текущими координатами x, y, z точки М. В сферической подвижной системе координат положение точки М определяется расстоянием R , углом φ и углом Θ . Введём также подвижные системы координат $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, начало которых находится в точке О. Указанные на рисунке 7.4, а, б, в системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_φ, A_Θ . Проекции абсолютной скорости $\dot{\mathbf{v}}$ и ускорения $\dot{\mathbf{a}}$ точки М определены как на неподвижные оси координат xyz , так и на подвижные сферические оси координат $X_R, Y_\varphi, Z_\Theta (R, \varphi, \Theta)$.

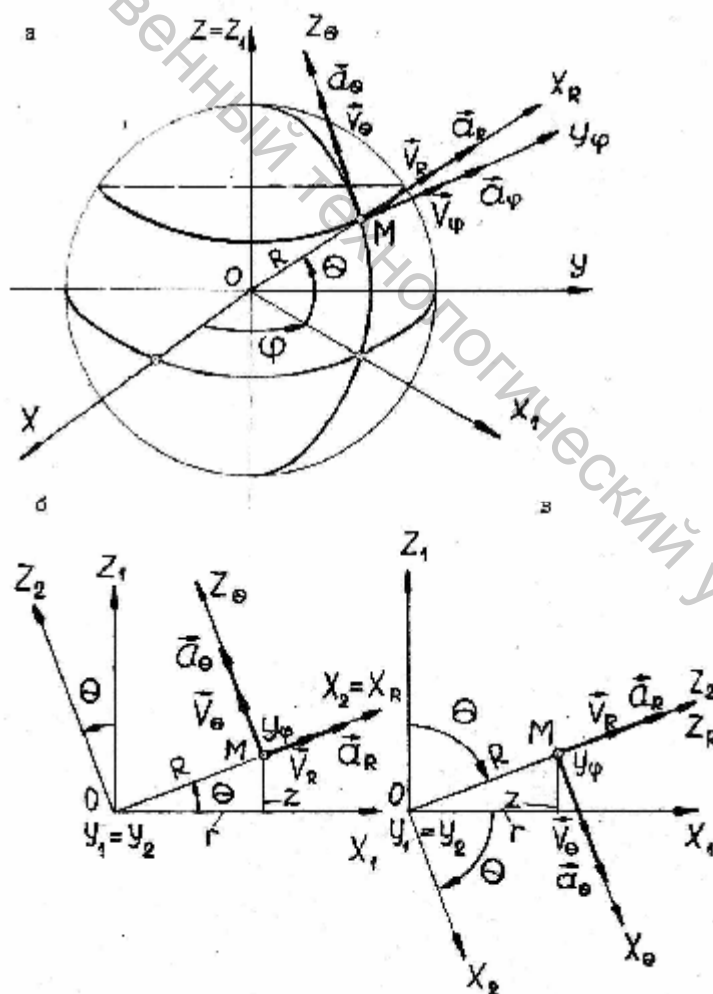


Рис. 7.4

Координаты точки М в неподвижной системе $x y z$ в рассматриваемом случае выражается через координаты этой точки в системе $X_R Y_\varphi Z_\Theta$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_j A_\Theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_j A_\Theta \begin{pmatrix} x_R \\ y_j \\ z_\Theta \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}$ точки М в системе $x y z$ определяется дифференцированием текущих координат равенства (7.15) из выражения

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{A}_j A_\Theta \dot{\mathbf{r}} + A_j \dot{A}_\Theta \dot{\mathbf{r}}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_j A_\Theta \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Из формулы (7.16) определяются проекции вектора скорости точки М на неподвижные оси координат $x y z$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= \dot{R} \cos j \cos \Theta - R \dot{j} \cos \Theta \sin j - R \dot{\Theta} \cos j \sin \Theta; \\ \dot{y} = v_y &= \dot{R} \sin j \cos \Theta + R \dot{j} \cos \Theta \cos j - R \dot{\Theta} \sin j \sin \Theta; \\ \dot{z} = v_z &= \dot{R} \sin \Theta + R \dot{\Theta} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Модуль скорости точки М найдётся из равенств (7.17) по формуле

$$v = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2 \dot{j}^2 \cos^2 \Theta + R^2 \dot{\Theta}^2}. \quad (7.18)$$

В свою очередь вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}_M$ точки М в системе $X_R Y_\varphi Z_\Theta$ (R, φ, Θ)

$$\dot{\mathbf{r}}_M = A^T \dot{\mathbf{r}}, \quad (7.19)$$

где A^T –транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_\Theta^T \cdot A_j^T$.

Векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}}_M$ в равенствах (7.16) и (7.19) представляют разложение одного и того же вектора $\dot{\mathbf{r}}$ по разным базисам систем координат $x y z$ и $X_R Y_\varphi Z_\Theta$. С учётом (7.16) равенство (7.19) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \left(A^T \dot{A}_j A_\Theta \dot{\mathbf{r}} + A^T \dot{A}_\Theta \dot{\mathbf{r}} \right) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Из формулы (7.20) определяются проекции вектора скорости точки М на подвижные сферические оси координат $X_R Y_\varphi Z_\Theta$, которые имеют вид

$$\dot{x}_R = v_R = \dot{R}; \quad \dot{y}_j = v_j = R \dot{j} \cos \Theta; \quad \dot{z}_\Theta = v_\Theta = R \dot{\Theta} \quad (7.21)$$

Модуль скорости точки М определяется из равенств (7.21) формулой (7.18), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки М в сферической системе координат матричным методом. Вектор ускорения $\ddot{\mathbf{a}}$ точки М в системе $x y z$ определится дифференцированием равенства (7.16)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} R \\ j \\ \Theta \end{pmatrix} = \left[\left(\dot{A}_j j^2 + A_j j \right) A_\Theta + 2 \dot{A}_j A_\Theta j \dot{\Theta} + A_j \left(\dot{A}_\Theta \Theta^2 + A_\Theta \ddot{\Theta} \right) \right] \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + 2 \left(\dot{A}_j A_\Theta j + A_j \dot{A}_\Theta \dot{\Theta} \right) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_j A_\Theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Из формулы (7.22) определяются проекции вектора ускорения точки М на неподвижные оси координат x, y, z , которые для краткости записи с учётом полученных ниже формул (7.26) имеют вид

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{R} \cos j \cos \Theta - \ddot{j} \sin j - \ddot{\Theta} \cos j \sin \Theta; \\ a_y &= \ddot{R} \sin j \cos \Theta + \ddot{j} \cos j - \ddot{\Theta} \sin j \sin \Theta; \\ a_z &= \ddot{R} \sin \Theta + \ddot{\Theta} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Модуль ускорения точки М определяется из равенств (7.23) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{R}^2 + \ddot{j}^2 + \ddot{\Theta}^2} = \sqrt{a_R^2 + a_j^2 + a_\Theta^2}. \quad (7.24)$$

Значения a_R, a_j, a_Θ приведены ниже в (7.26).

Вектор ускорения $\mathbf{a}_M$ точки М в системе $X_R Y_\varphi Z_\Theta$ (R, φ, Θ , см. рис. 7.4)

$$\mathbf{a}_M = A^T \mathbf{a}. \quad (7.25)$$

С учётом (7.22) из равенства (7.24) получим проекции вектора ускорения точки М на подвижные сферические оси координат $X_R Y_\varphi Z_\Theta$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= a_R = \ddot{R} - R \dot{\Theta}^2 - R j^2 \cos^2 \Theta; \\ \ddot{j} &= a_j = R \ddot{j} \cos \Theta + 2(\dot{R} \cos \Theta - R \dot{\Theta} \sin \Theta) \dot{j}; \\ \ddot{\Theta} &= a_\Theta = R \ddot{\Theta} + R j^2 \cos \Theta \sin \Theta + 2 \dot{R} \dot{\Theta}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Искомые кинематические параметры (7.21) и (7.26) показаны на рис. 7.4, а, б. Модуль ускорения точки М определяется формулой (7.23), а направление ускорения – направляющими косинусами.

В тех механических задачах, где ось Z является осью симметрии, угол Θ удобно отсчитывать вниз от положительного направления оси Z (рис. 7.4, в).

Для рис. 7.4, в равенство (7.15) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_j A_\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + A_j A_\Theta \begin{pmatrix} x_\Theta \\ y_j \\ z_R \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

Сохраняется матрица A_φ . Матрица A_Θ по рис. 7.4, в получается транспонированием матрицы A_Θ по рис. 7.4, б относительно главной диагонали.

Формулы для расчёта скорости и ускорения по рис. 7.4, в имеют соответственно вид (7.16), (7.20) и (7.22), (7.26). В соответствии с (7.27) в них видоизменяется запись столбцевых матриц.

Применительно к рис. 7.4, в формулы (7.17), (7.18), (7.21), (7.26) имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} = v_x &= R\dot{\Theta} \cos j \cos \Theta - R\dot{j} \sin \Theta \sin j + \dot{R} \cos j \sin \Theta; \\
\dot{y} = v_y &= R\dot{\Theta} \sin j \cos \Theta + R\dot{j} \sin \Theta \cos j - \dot{R} \sin j \sin \Theta; \\
\dot{z} = v_z &= -R\dot{\Theta} \sin \Theta + \dot{R} \cos \Theta;
\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$v = \sqrt{R^2 \dot{\Theta}^2 + R^2 \dot{j}^2 \sin^2 \Theta + \dot{R}^2}; \tag{7.29}$$

$$\dot{x}_\Theta = v_\Theta = R\dot{\Theta}; \quad \dot{y}_j = v_j = R\dot{j} \sin \Theta; \quad \dot{x}_R = v_R = \dot{R} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}
a_x &= \ddot{x}_\Theta \cos j \cos \Theta - \ddot{y}_j \sin j + \ddot{x}_R \cos j \sin \Theta; \\
a_y &= \ddot{x}_\Theta \sin j \cos \Theta + \ddot{y}_j \cos j + \ddot{x}_R \sin j \sin \Theta; \\
a_z &= -\ddot{x}_\Theta \sin \Theta + \ddot{x}_R \cos \Theta.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_\Theta &= a_\Theta = R\ddot{\Theta} + 2\dot{R}\dot{\Theta} - R\dot{j}^2 \sin \Theta \cos \Theta; \\
\ddot{y}_j &= a_j = R\ddot{j} \sin \Theta + 2(\dot{R} \sin \Theta - R\dot{\Theta} \cos \Theta)\dot{j}; \\
\ddot{x}_R &= a_R = \ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{j}^2 \sin^2 \Theta.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Искомые кинематические параметры (7.30) и (7.32) показаны на рис. 7.4. в. Модуль ускорения точки М найдётся из (7.32) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_\Theta^2 + \ddot{y}_j^2 + \ddot{x}_R^2} = \sqrt{a_\Theta^2 + a_j^2 + a_R^2}. \tag{7.33}$$

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки М в сферических координатах матричным методом. Для численного расчёта можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Пример 7.3 (№ 12.39 [7]):

Вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ . Рука со схватом поворачивается на угол Θ и выдвигается на расстояние R . Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$.

Решение:

Кинематическая и расчётная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в сферической системе координат, изображена на рис. 7.5. Координаты центра схвата (точка М) в неподвижной системе координат хуз при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ выражаются формулой (7.27).

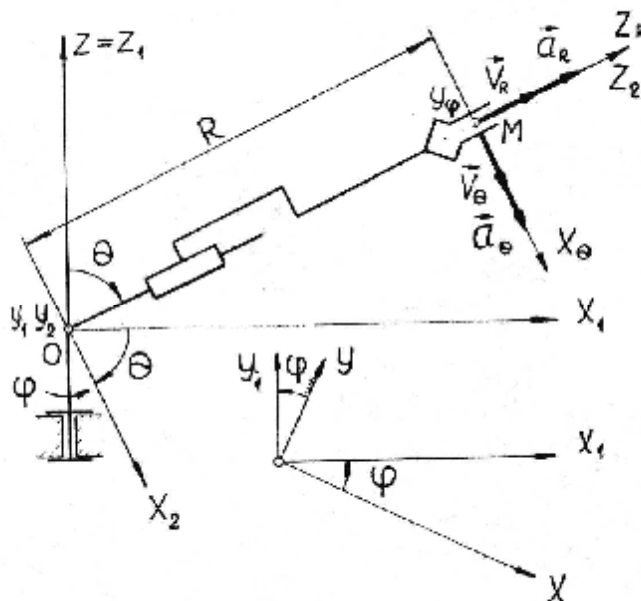


Рис. 7.5

Скорость и ускорения центра схвата определяются из (7.29) и (7.33).

При заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (7.27), где роль параметра играет время t . Они имеют вид

$$x = R \sin \Theta \cos \varphi, y = R \sin \Theta \sin \varphi, z = R \cos \Theta. \quad (7.34)$$

При заданных $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A^T , получим из формулы (7.27). Они имеют вид

$$\begin{aligned} R &= x \cos j \sin \Theta + y \sin j \sin \Theta + z \cos \Theta, \\ j &= \arctg(y/x), \\ \Theta &= \arctg\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Уравнения (7.34) и (7.35) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$, так и при $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Изложенную методику расчёта скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в сферической системе координат.

7.4. Расчёт кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом

Расчётная схема исполнительного механизма представлена на рис. 7.6. Механизм состоит из поворотного устройства с вертикальной осью вращения (на рисунке не показанной, угол поворота – φ) и двух звеньев l_1 , l_2 , расположенных в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 (углы поворота звеньев – θ_1 и θ_2). Координаты точки

М в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом. Система XYZ поворотом на угол φ переводится в подвижную систему $X_1Y_1Z_1$ таким образом, что механизм размещается в вертикальную плоскость Y_1OZ_1 . Следующим преобразованием переводим систему координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$ поворотом вокруг оси OX_1 на угол θ_1 . Затем, перемещая начало координат $X_2Y_2Z_2$ на длину l_1 , получим систему координат $X_3Y_3Z_3$. Поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ вокруг оси OX_3 на угол θ_2 получим систему координат $X_4Y_4Z_4$, которую перемещаем на длину l_2 и окончательно получим систему $X_5Y_5Z_5$. Для каждого поворота определяются матрицы A_{q_1}, A_{q_2}, A_j , с помощью которых определяются координаты точки М. Анализом установлено, что при других способах преобразования координат усложняются матрицы перехода и, следовательно, в целом весь расчёт.

Координаты точки М в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_j A_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_j A_{q_1} A_{q_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_j A_{q_1} A_{q_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

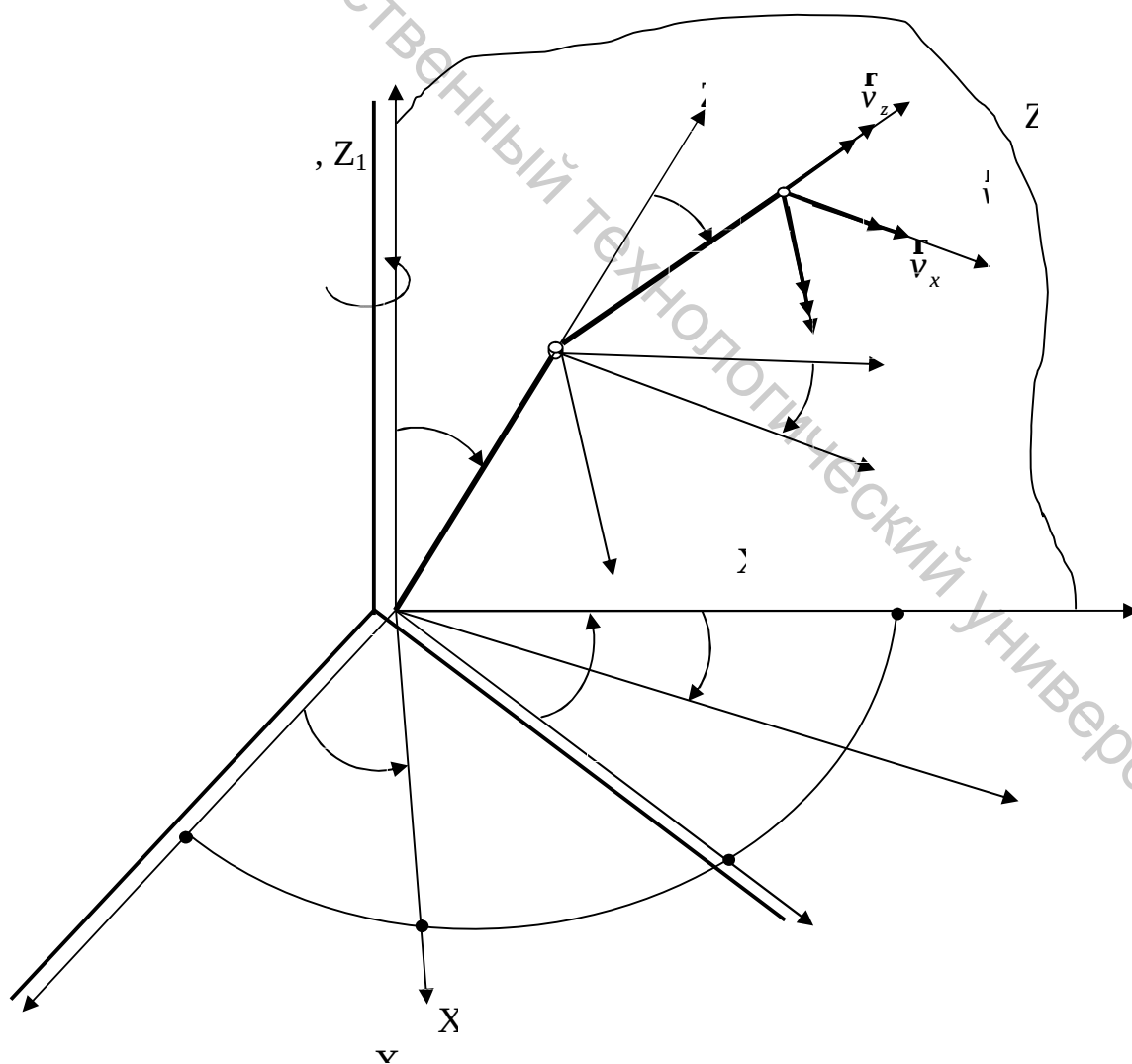


Рис. 7.6

Принимаем, что $x_5, y_5, z_5=0$ и получаем новое равенство:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_j A_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_j A_{q_1} A_{q_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

Из формулы (7.37) определяются проекции вектора точки М на неподвижные оси координат XYZ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_M &= -l_1 \sin j \sin q_1 - l_2 \sin j \sin(q_1 + q_2), \\ y_M &= l_1 \cos j \sin q_1 + l_2 \cos j \sin(q_1 + q_2), \\ z_M &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Вектор скорости $\dot{\mathbf{v}}$ точки М в системе XYZ определяется дифференцированием текущих координат равенства (7.37) из выражения

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_j A_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_j \dot{A}_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left(A_j \dot{A}_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1 + A_j A_{q_1} \dot{A}_{q_2} \dot{q}_2 + \dot{A}_j A_{q_1} A_{q_2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Из формулы (7.39) определяются проекции вектора скорости точки М на неподвижные оси координат XYZ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= -l_1 (\cos j \sin q_1 \dot{q}_1 + \sin j \cos q_1 \dot{q}_1) - l_2 (\cos j \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 + \sin j \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)), \\ \dot{y} = v_y &= l_1 (-\sin j \sin q_1 \dot{q}_1 + \cos j \cos q_1 \dot{q}_1) + l_2 (-\sin j \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 + \cos j \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)), \\ \dot{z} = v_z &= -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 + l_2 (-\sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Модуль скорости точки М найдётся из равенств (7.40) по формуле

$$v = \sqrt{l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_1 \sin(q_1 + q_2))^2}. \quad (7.41)$$

В свою очередь вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}_M$ точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$

$$\dot{\mathbf{r}}_M = A^T \dot{\mathbf{r}}, \quad (7.42)$$

где A^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_{q_2}^T A_{q_1}^T A_j^T$.

Векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}}_M$ в равенствах (7.39) и (7.42) представляют разложение одного и того же вектора $\dot{\mathbf{v}}$ по разным базисам систем координат XYZ и $X_5 Y_5 Z_5$. С учётом (7.39) равенство (7.42) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{r}}_M = A^T \dot{A}_j A_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T A_j \dot{A}_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T \left(A_j \dot{A}_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1 + A_j A_{q_1} \dot{A}_{q_2} \dot{q}_2 + \dot{A}_j A_{q_1} A_{q_2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Из формулы (7.43) определяются проекции вектора скорости точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\dot{x}_5 = v_{x_5} = 0, \quad \dot{y}_5 = v_{y_5} = l_1 \dot{q}_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2, \quad \dot{z}_5 = v_{z_5} = l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_1 \sin(q_1 + q_2). \quad (7.44)$$

Модуль скорости точки М определяется из равенств (7.44) формулой (7.41), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки М в системе координат XYZ матричным методом. Вектор ускорения $\ddot{\mathbf{a}}$ точки М определится дифференцированием равенства (7.39)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} A_j A_{q_1} \dot{q}_1^2 + A_j A_{q_1} \ddot{q}_1 + 2A_j A_{q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_j A_{q_1} \ddot{q}_2 + A_j A_{q_1} \dot{q}_1^2 + A_j A_{q_1} \ddot{q}_1 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ & + (2A_j A_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2A_j A_{q_1} A_{q_2} \ddot{q}_1 + 2A_j A_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \ddot{q}_2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1^2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \ddot{q}_1 \\ & + A_j A_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_2^2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \ddot{q}_2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_j A_{q_1} A_{q_2} \ddot{q}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Из формулы (6.72) определяются проекции вектора ускорения точки М на неподвижные оси координат XYZ . Модуль ускорения точки М определяется из равенств (7.45) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_5^2 + \ddot{y}_5^2 + \ddot{z}_5^2} = \sqrt{a_{x_5}^2 + a_{y_5}^2 + a_{z_5}^2}. \quad (7.46)$$

Значения $a_{x_5}, a_{y_5}, a_{z_5}$ приведены ниже в (7.48).

Вектор ускорения $\ddot{\mathbf{a}}_M$ точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$ (см. рис. 7.6)

$$\ddot{\mathbf{a}}_M = A^T \ddot{\mathbf{a}}. \quad (7.47)$$

С учётом (7.45) из равенства (7.47) получим проекции вектора ускорения точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_5 = a_{x_5} &= 0, \\ \ddot{y}_5 = a_{y_5} &= l_1 \ddot{q}_1 + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin q_2, \\ \ddot{z}_5 = a_{z_5} &= l_1 \ddot{q}_1 \sin q_1 + l_1 \dot{q}_1^2 \cos q_1 + l_2 \ddot{q}_1 \sin(q_1 + q_2) + l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin 2(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Искомые кинематические параметры (7.44) и (7.48) показаны на рис. 7.6. Модуль ускорения точки М определяется формулой (7.46), а направление ускорения – направляющими косинусами.

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки М двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом. Для численного расчёта можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Пример 7.4 (№ 12.40 [7]):

Вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ . Рука со схватом состоит из двух звеньев, каждый из которых может поворачиваться на свой угол, первое звено на угол θ_1 , второе – на угол θ_2 . Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $\varphi(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$.

Решение:

Кинематическая и расчётная схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности изображена на рис. 7.7. Координаты центра схвата (точка М) в неподвижной системе координат XYZ при заданных $\varphi(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ выражаются

формулой (7.37). Скорость и ускорения центра схвата определяются из (7.44) и (7.48).

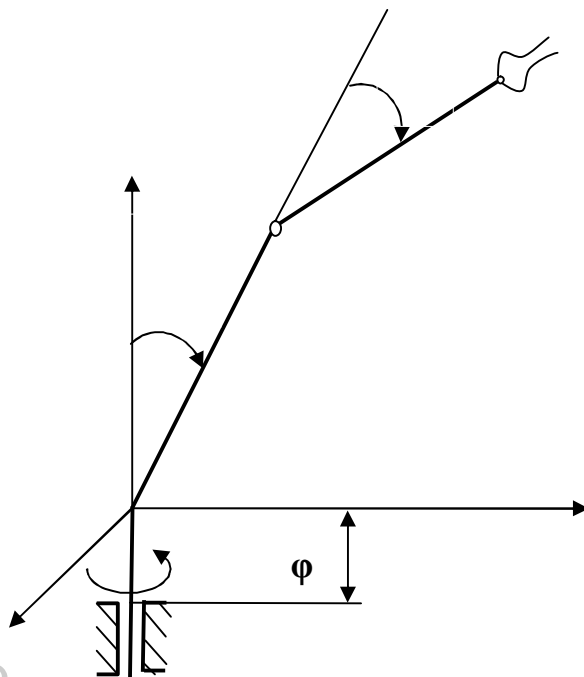


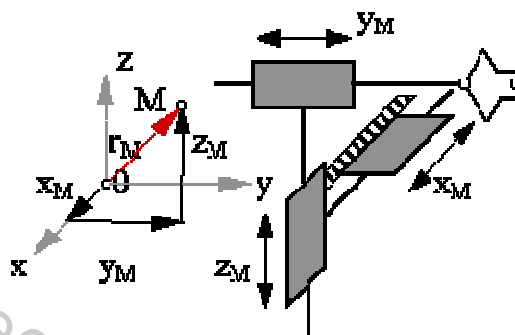
Рис. 7.7

При заданных $\varphi=\varphi(t)$, $\theta_1=\theta_1(t)$, $\theta_2=\theta_2(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (7.38), где роль параметра играет роль t . Используя транспонированную матрицу A^T , при заданных $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ получим траекторию центра схвата в подвижных координатных осях $X_5 Y_5 Z_5$.

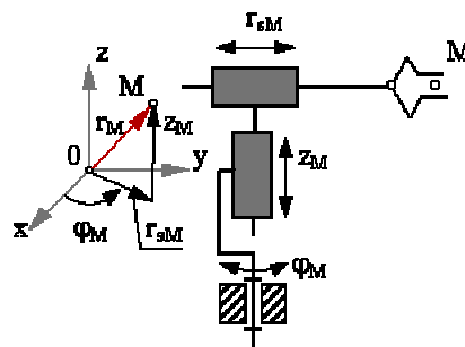
Изложенную методику расчета скорости и ускорения можно использовать для двухзвенных и многозвенных исполнительных механизмов с тремя и более степенями подвижности, имеющие исходные расчетные кинематические и конструктивные параметры роботов –манипуляторов в виде $\varphi=\varphi(t)$, $l_1, l_2, \dots, l_k$, $\theta_1=\theta_1(t)$, $\theta_2=\theta_2(t)$, $\dots, \theta_k=\theta_k(t)$.

7.5. Кинематический анализ методов расчета пространственных исполнительных механизмов

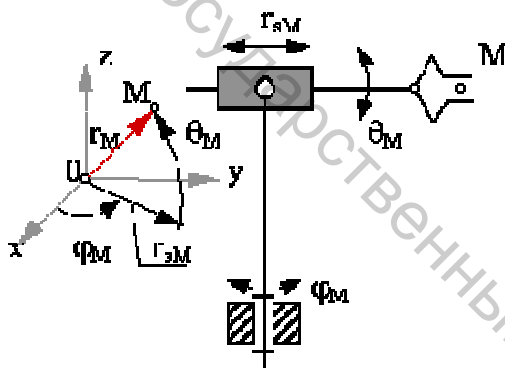
Промышленные роботы классифицируются по следующим признакам: по основным координатным перемещениям, числу степеней подвижности, конструктивному исполнению, типу силового привода, характера выполняемых операций, степени специализации, области применения, грузоподъемности, мобильности и схемам расположения приводов. Для расчета перемещений центра схвата робота используются плоская прямоугольная, пространственная прямоугольная, плоская полярная, цилиндрическая, сферическая, ангулярная цилиндрическая и ангулярная сферическая системы координат (рис. 7.8). От выбора системы координат зависит расчет кинематических параметров роботов. Робот является звеном в технологическом процессе и должен выполнять свои функции абсолютно точно.



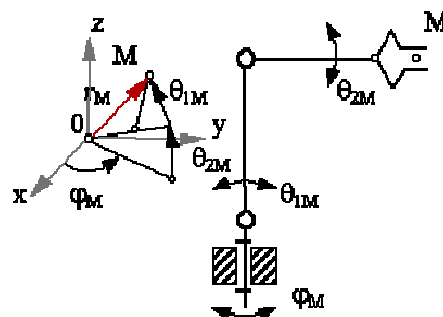
а) прямоугольная (декартова)



б) цилиндрическая



в) сферическая



г) угловая (ангулярная)

ким процессом. На рис. 7.8 представлены схемы роботов, работающих: по рис. 7.8, а в пространственной прямоугольной системе координат, по рис. 7.8, б в цилиндрической системе координат, по рис. 7.8, в в сферической системе координат и по рис. 7.8, г в ангулярной (угловой) системе координат.

Существует различные методы расчета геометрических и кинематических параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Расчет кинематических параметров исполнительного механизма в цилиндрической системе координат рассмотрен в работе [2]. Расчет кинематических параметров робота-манипулятора с тремя степенями подвижности в сферической системе координат рассмотрен в работе [3]. Рассмотрим схему руки манипулятора промышленного робота фирмы ASEA, работающего в ангулярной системе координат. К трехзвенному механизму добавлены (рис. 7.9): для привода звена 2 - простейший кулисный механизм, образованный звеньями 4,5 и 2; для привода звена 3 - цепь, состоящая из кулисного механизма (звенья 6,7 и 8) и шарнирного четырехзвенника (звенья 8,9,2 и 3). В рычажном механизме робота можно выделить кинематическую цепь руки (звенья 1,2 и 3) и кинематические цепи приводов. Манипуляторы, использующие принцип размещения приводов на основании, имеют более сложные механизмы. Однако увеличение числа звеньев и кинематических пар компенсируется уменьшением масс и моментов инерции, подвижных звеньев манипулятора. Кроме того, замкнутые кинематические цепи (звенья 1, 5, 4, 2, 3, 9, 6,

Р
ис.
7.8

П
ри
этом
трае
ктор
ия
движ
ения
схва
та и
его
скор
ость
опре
деля
ются
техн
олог
ичес

7) повышают точность и жесткость механизма. Манипуляторы, использующие принципы комбинированного размещения приводов по рис. 7.9 (часть приводов на основании, часть на подвижных звеньях), обладают лучшими энергетическими и динамическими характеристиками, а также более высокой точностью.

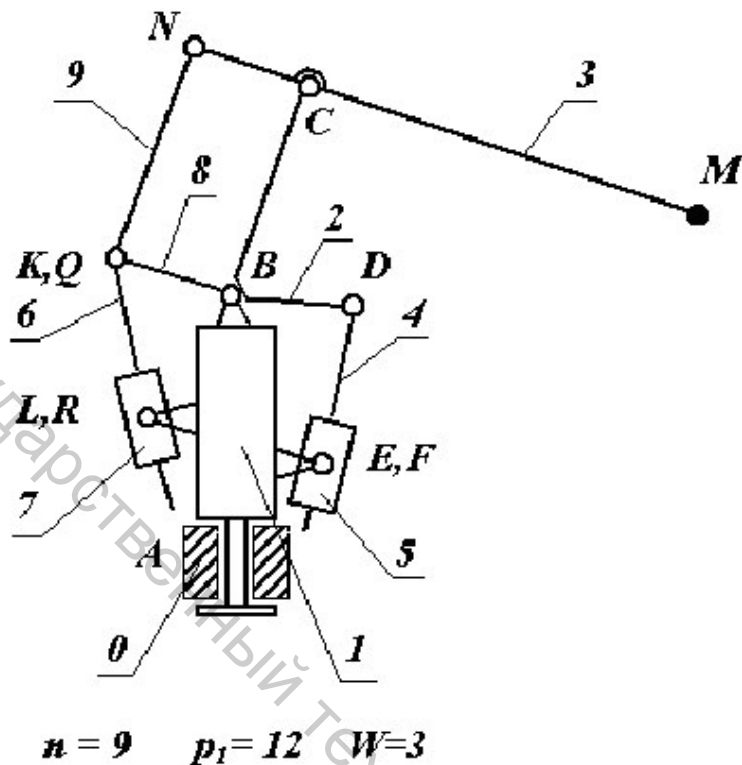


Рис. 7.9

Рассмотрим кинематическую схему робота **SANCIO** фирмы **SKILAM** (рис. 7.10), шестизвенный исполнительный механизм которого работает в сферической системе координат. В таком роботе веса приводов и звеньев воспринимаются кинематическими парами. В такой структурной схеме механизма необходимо увеличение размеров кинематических пар. Однако в целом получен существенный выигрыш по энергетическим и динамическим показателям.

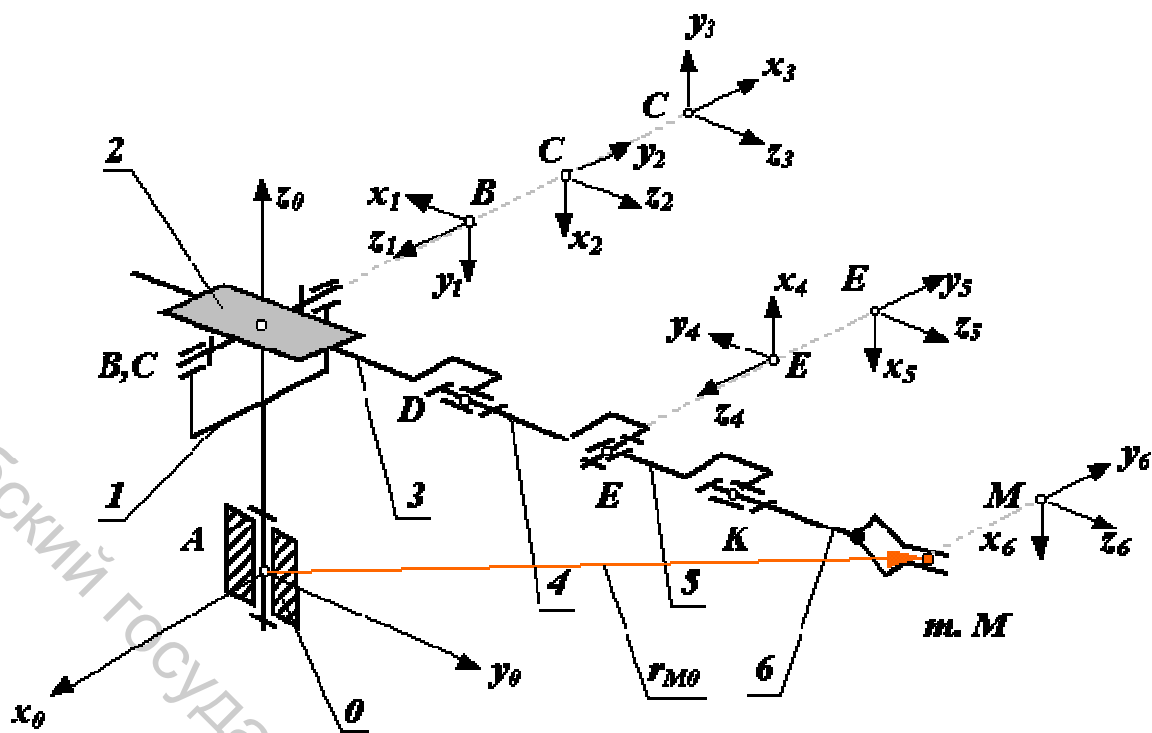


Рис. 7.10

Установлено, что наиболее простые методы расчета следует использовать для роботов, работающих в пространственной прямоугольной и в цилиндрической системах координат по рис. 7.8, а и 7.8, б. Векторный метод расчета кинематических параметров исполнительных механизмов следует использовать для роботов, звенья которых расположены в одной плоскости. Кинематическим анализом двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности установлено, что векторный метод достаточно сложен и неприменим для пространственных схем размещения звеньев роботов-манипуляторов. При таком методе расчета определяются проекции звеньев на неподвижные оси координат и векторов скорости и ускорения на эти оси [4, 5].

Основная задача кинематики – определение функции положения. Для пространственных механизмов наиболее эффективными методами решения этой задачи являются векторный метод и метод преобразования координат. При решении прямой задачи о положении схвата манипулятора обычно используют метод преобразования координат. Для манипуляторов из множества методов преобразования координат [6, 7], которые отличаются друг от друга правилами выбора осей локальных систем координат, обычно используется метод Денавита и Хартенберга.

1. Для звена i ось z_i направляется по оси кинематической пары, образуемой им со звеном $(i+1)$. Начало координат размещают в геометрическом центре этой пары.

2. Ось x_i направляется по общему перпендикуляру к осям z_{i-1} и z_i с направлением от z_{i-1} к z_i . Если оси z_{i-1} и z_i совпадают, то x_i перпендикулярна к ним и направлена произвольно. Если они пересекаются в центре кинематической пары, то начало координат располагается в точке пересечения, а ось x_i направляется по правилу векторного произведения $\bar{x}_i = \bar{z}_i \times \bar{z}_{i-1}$ (кратчайший поворот оси z_i до

совмещения с z_{i-1} при наблюдении с конца x_i должен происходить против часовой стрелки).

3. Ось y_i направляется так, чтобы система координат была правой.

В прямой задаче необходимо определить положение схвата манипулятора и связанной с ним системы координат $Mx_n y_n z_n$ по отношению к неподвижной или базовой системе координат $Kx_0 y_0 z_0$, что осуществляется последовательными переходами из системы координат звена i в систему координат звена $i-1$. Согласно принятому методу, каждый переход включает в себя последовательность четырех движений: двух поворотов и двух параллельных переносов, осуществляемых в определенной последовательности (рис. 7.11).

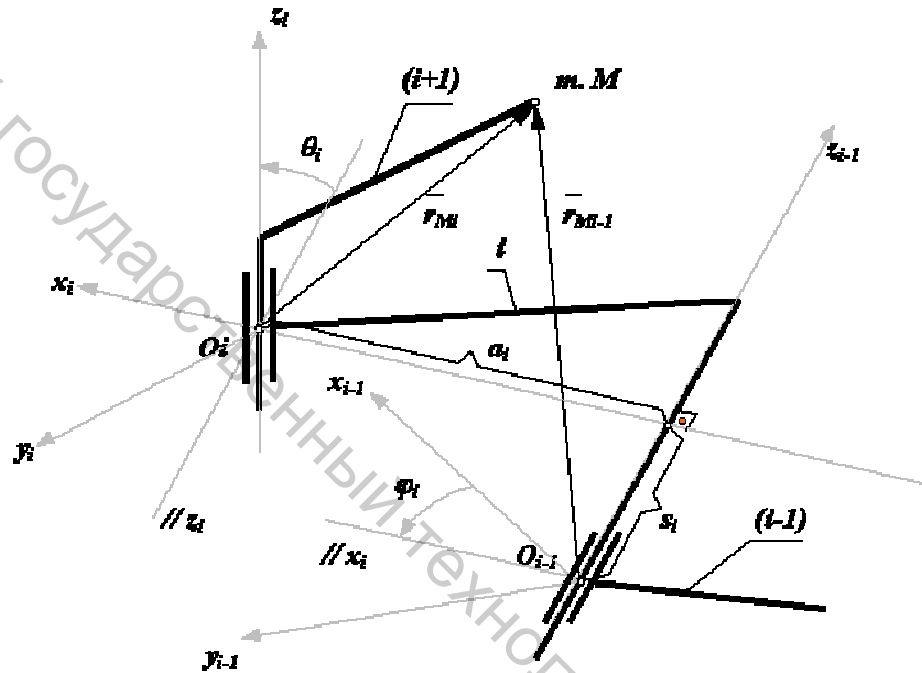


Рис. 7.11

При переходе используются два вида матриц: матрицы M , определяющие отношение между системами координат соседних звеньев; матрицы T , определяющие положение и ориентацию каждого звена механизма в неподвижной или базовой системе координат. При этом воспользуемся однородными координатами трехмерного проективного пространства PR^3 , в которых движение евклидова пространства R^3 можно представить линейным преобразованием

$$\bar{r}_i = M_{ij} \cdot \bar{r}_j, \text{ где } M_{ij} - \text{матрица } 4 \times 4 \text{ вида } \begin{vmatrix} U_{ij} & b \\ 000 & 1 \end{vmatrix}.$$

Последнее преобразование эквивалентно преобразованию в евклидовом пространстве $\bar{r}_i = U_{ij} \cdot \bar{r}_j + b$ где $|\bar{r}_i, \bar{r}_j| \in R^3$. То есть преобразованию, которое включает поворот, определяемый матрицей U_{ij} размерностью 3×3 , и параллельный перенос, задаваемый вектором b размерностью 3. В однородном пространстве положение точки будут определять не три x, y и z , а четыре величины x', y', z' и t' , которые удовлетворяют следующим соотношениям: $x = x'/t', y = y'/t', z = z'/t'$. При этом принимают $t' = 1$. В матрице поворота U_{ij} элементами u_{ij} являются направляющие

косинусы углов между новой осью i и старой осью j . Вектор $\bar{b} = (x, y, z)$ - трехмерный вектор, определяющий положение начала новой системы координат i в старой системе j . Выбор расположения осей определяет трудоемкость решаемой задачи. При решении прямой задачи необходимо определить положение выходного звена как функцию перемещений в приводах; в обратной задаче заданное положение выходного звена представляется как функция перемещений в приводах. Расположение и ориентация подвижных систем координат должны обеспечивать выполнение решаемых задач. При использовании метода Денавита и Хартенберга матрицы перехода их системы O_i в систему O_{i-1} можно представить в виде: $M_i = M_i^q \cdot M_i^a \cdot M_i^s \cdot M_i^j$. В матрицах переменные s_i и j_i соответствуют относительным перемещениям звеньев в кинематических парах и являются обобщенными координатами манипулятора, определяющими в рассматриваемом положении конфигурацию механизма. Переменные a_i и q_i определяются конструктивным исполнением звеньев манипулятора. В процессе движения они остаются неизменными.

Положение некоторой произвольной точки M в системе координат звена i определяется вектором r_{Mi} , а в системе координат звена $(i-1)$ – вектором r_{Mi-1} . Эти радиусы связаны между собой матрицей M_i перехода из i -ой системы координат в $(i-1)$ -ю, следующим уравнением:

$$\bar{r}_{Mi-1} = M_i \bar{r}_{Mi},$$

где

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos \varphi_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \varphi_i & \sin \varphi_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \theta_i \cdot \cos \varphi_i & -\cos \varphi_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \sin \varphi_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Установлено, что при расчете кинематических параметров центра схвата пространственных исполнительных механизмов следует использовать преимущественно сферическую и угловую системы координат. При этом наиболее пригоден для программного расчета на компьютере матричный метод.

Глава VIII

ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. Поступательное движение твердого тела

Простейшими движениями твердого тела являются поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.

Траектории точек тела при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть получены одна из другой путем параллельного смещения.

Основные свойства поступательного движения: при поступательном движении все точки твердого тела описывают одинаковые траектории и имеют в данный момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче кинематики точки. Например, для спарника АВ, изображенного на рис. 8.1 скорость и ускорение любой точки спарника равна скорости и ускорению точки А.

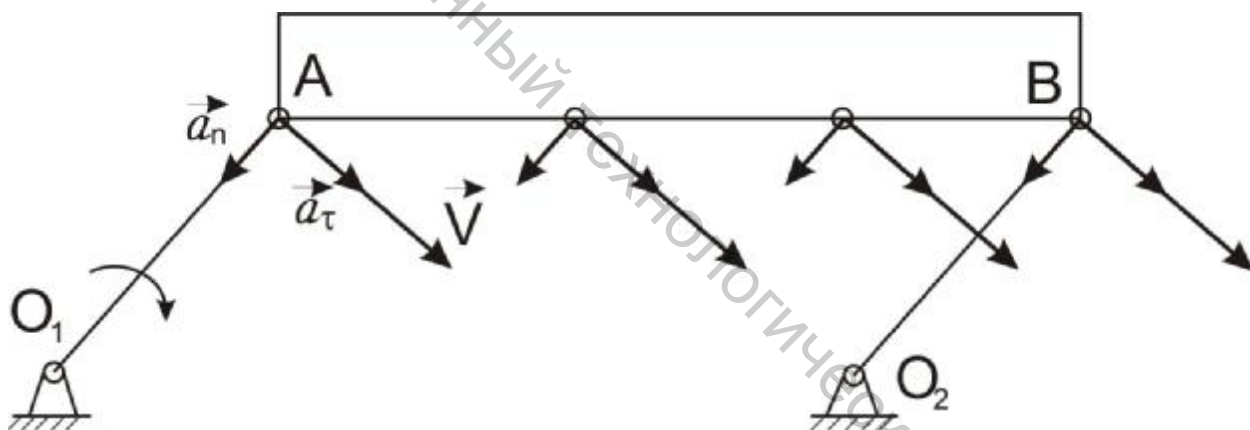
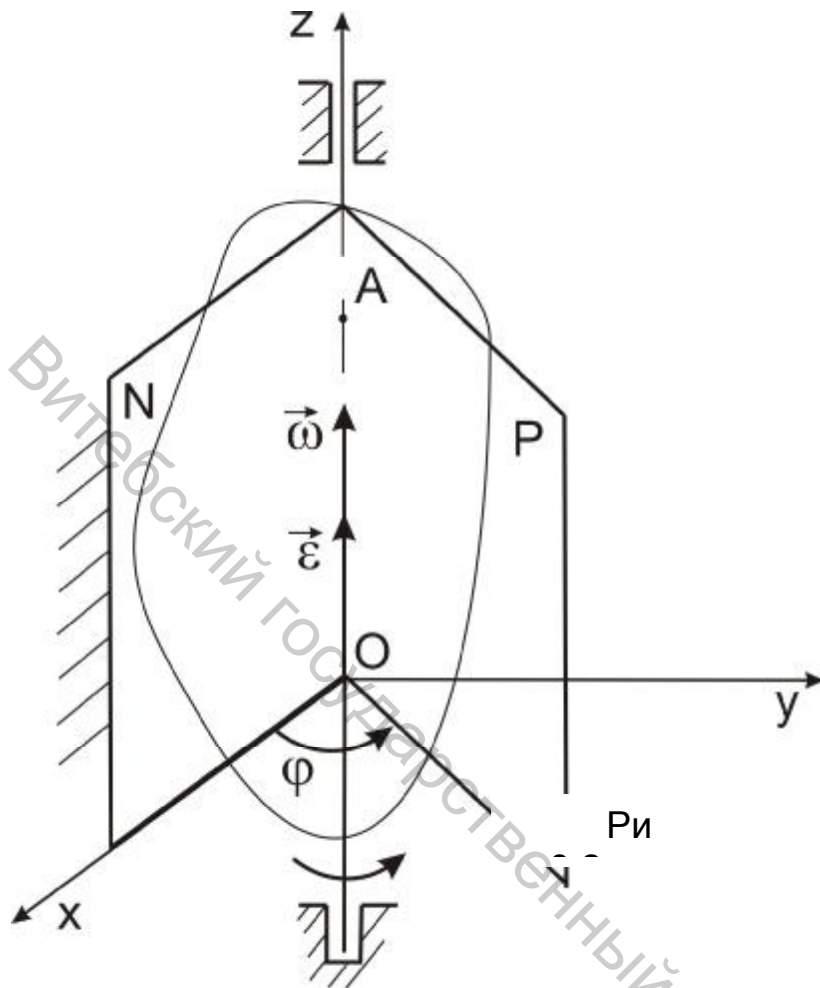


Рис. 8.1

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\dot{V}$ называют скоростью поступательного движения твердого тела, а ускорение $\dot{a}$ — ускорением поступательного движения твердого тела. Векторы $\dot{V}$ и $\dot{a}$ можно изображать приложенными к любой точке твердого тела.

8.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение твердого тела, имеющего две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения.



Возьмем две полуплоскости N и P, ограниченные осью z, которая является осью вращения (рис. 8.2). Полуплоскость N неподвижна, а полуплоскость P неизменно связана с твердым телом. Положение твердого тела определяется двугранным углом φ между этими полуплоскостями. Угол поворота измеряется в радианах или оборотах и является функцией времени:

$$j = f(t) \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) является уравнением (законом) вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угол φ измеряют в радианах. Если за какой-то промежуток времени тело

совершает N оборотов, то угол поворота

$$j = 2\pi N \quad (8.2)$$

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота и равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{dj}{dt} = \dot{j} \quad (8.3)$$

Вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости направлен по оси вращения в ту сторону, с которой вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловая скорость измеряется в рад/сек = с^{-1} , об/мин. Если тело совершает n об/мин, то угловую скорость в рад/сек найдем по формуле

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1} \quad (8.4)$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости во времени. Угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла поворота тела по времени:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 j}{dt^2}, \quad \text{или } \epsilon = \ddot{j} \quad (8.5)$$

Вектор $\vec{\epsilon}$ углового ускорения совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$ угловой скорости, если вращение тела ускоренное (рис. 8.2), и направлен прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное.

Угловое ускорение измеряется в $1/\text{сек}^2$, об/мин 2 .

Если угловая скорость ω постоянна, то вращение называется равномерным ($\epsilon = 0$) и происходит по закону

$$j = j_0 + \omega t. \quad (8.6)$$

Если угловое ускорение постоянно ($\epsilon = \text{Const}$), то такое вращение называется равнопеременным и происходит согласно уравнениям

$$\omega = \omega_0 \pm \epsilon t, \quad (8.7)$$

$$j = j_0 + \omega_0 t \pm \frac{\epsilon t^2}{2}. \quad (8.8)$$

Пример 8.1:

Диск, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, имеет в момент $t_1 = 3$ сек угловую скорость $\omega_1 = 6\pi \text{ с}^{-1}$. Определить число оборотов N диска, которые он сделает за 6 сек.

Решение:

Для определения углового ускорения диска используем формулу (8.7)

$$\omega_1 = \omega_0 + \epsilon \cdot t_1, \text{ Т. к. } \omega_0 = 0, \text{ то}$$

$$\epsilon = \frac{\omega_1}{t_1} = 2\pi \text{ с}^{-2}.$$

Определим угол поворота, на который повернется тело за 6 сек:

$$j = j_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2},$$

или, учитывая, что $j_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, получим, что $j = 36\pi \text{ рад.}$

Зная формулу (8.2), окончательно найдем число оборотов:

$$N = \frac{j}{2\pi}, \text{ или } N = 18 \text{ оборотов.}$$

8.3. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Траекторией точки M вращающегося твердого тела является окружность, радиус которой равен кратчайшему расстоянию $h = O_1M$ от точки до оси вращения (рис. 8.3).

Для определения скорости и ускорения точек твердого тела используются формулы, полученные при естественном способе задания движения.

Скорость точки M алгебраически определяется выражением:

$$V = \frac{dS}{dt} = \omega h. \quad (8.9)$$

Модуль скорости точки M определяем по формуле

$$V = h|\omega|. \quad (8.10)$$

Векторное выражение скорости точки M вращающегося твердого тела равно

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (8.11)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке M твердого тела (рис. 8.3, а).

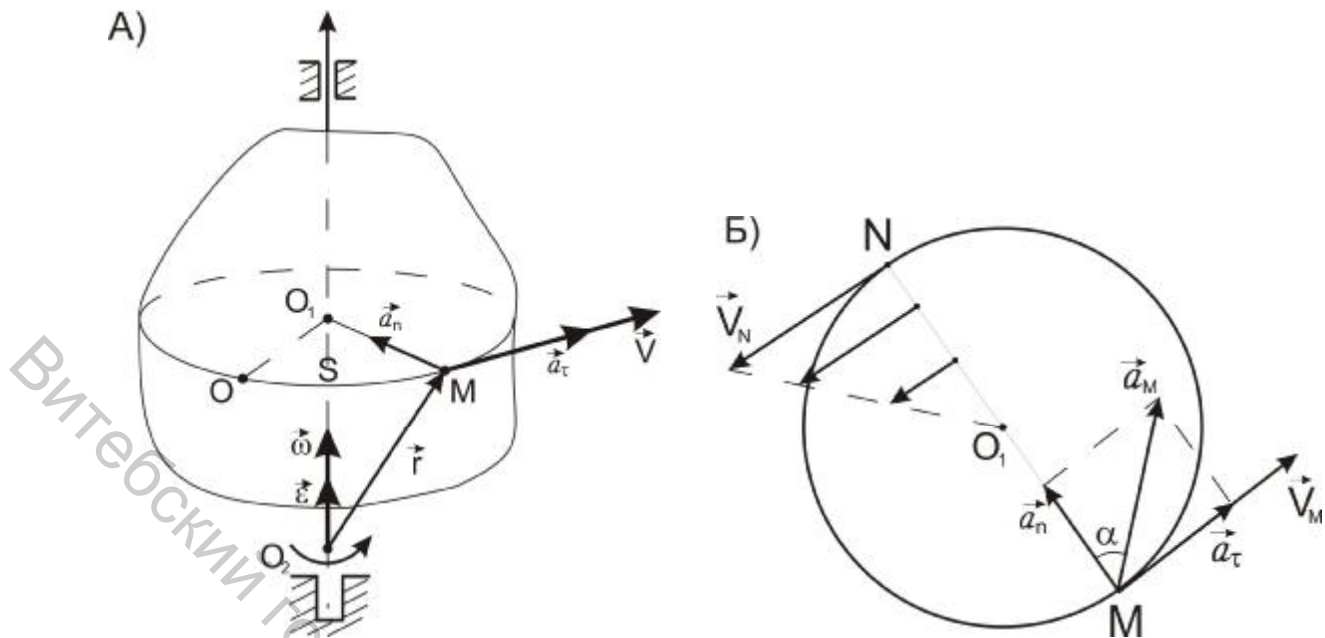


Рис. 8.3

Ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{e} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V},$$

где касательное ускорение $\vec{a}_t = \vec{e} \times \vec{r}$, нормальное ускорение $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Таким образом, ускорение точки вращающегося твердого тела геометрически складывается из нормального и касательного ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (8.12)$$

Нормальное ускорение направлено от точки по перпендикуляру к оси вращения и модуль этого ускорения равен:

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \omega^2 h, \text{ где } r = O_1M = h. \quad (8.13)$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории и это ускорение равно:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = e \cdot h. \quad (8.14)$$

При ускоренном вращении вектор касательного ускорения $\vec{a}_t$ и вектор скорости $\vec{V}$ направлены в одну сторону по касательной к описываемой точкой окружности (рис. 8.3, б). При замедленном вращении векторы $\vec{a}_t$ и $\vec{V}$ направлены в противоположные стороны.

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = h\sqrt{e^2 + \omega^4}. \quad (8.15)$$

Угол, образуемый вектором $\vec{a}$ ускорения точки М с радиусом O_1M , определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{e}{w^2} . \quad (8.16)$$

При решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется придерживаться такой последовательности:

- 1) выбрать систему координат так, чтобы одна из осей (например, ось z) совпала с осью вращения;
- 2) составить уравнение вращательного движения твердого тела:

$$j = f(t);$$

- 3) вычислить угловую скорость и угловое ускорение твердого тела;
- 4) зная угловую скорость твердого тела, определить значения скорости точки твердого тела и ее нормальное ускорение;
- 5) используя значение углового ускорения, определить касательное ускорение точки;
- 6) по найденным значениям нормального и касательного ускорений определить полное ускорение точки твердого тела.

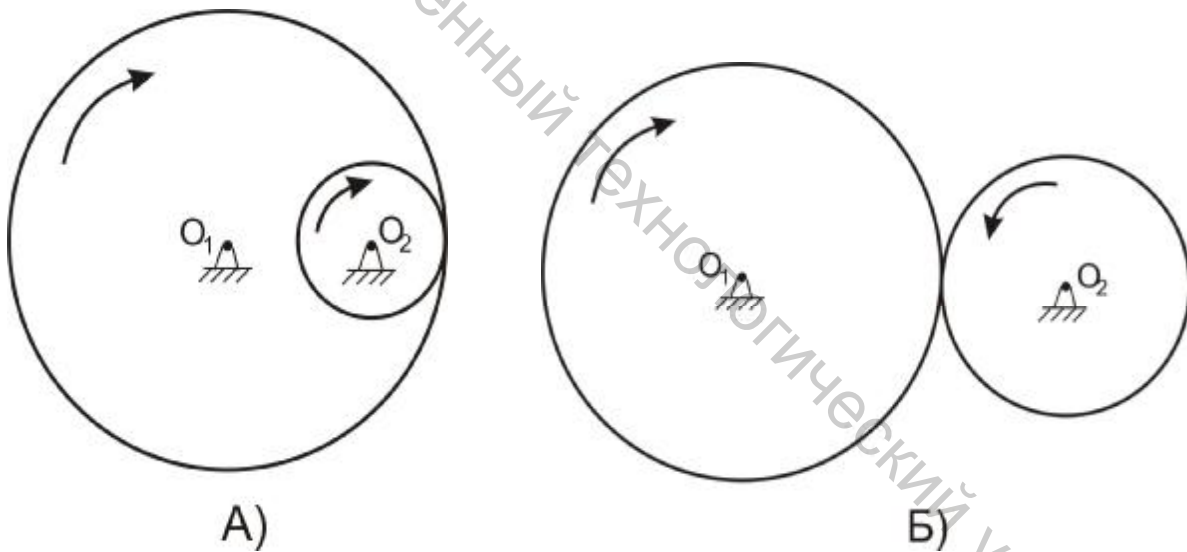


Рис. 8.4

При решении задач о движении механизмов, преобразующих простейшие движения, следует пользоваться формулами кинематики точки и формулами кинематики твердого тела, вращающегося вокруг оси.

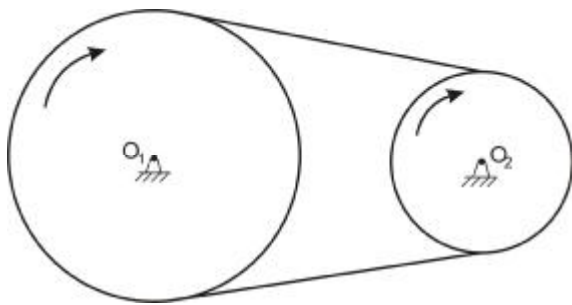


Рис. 8.5

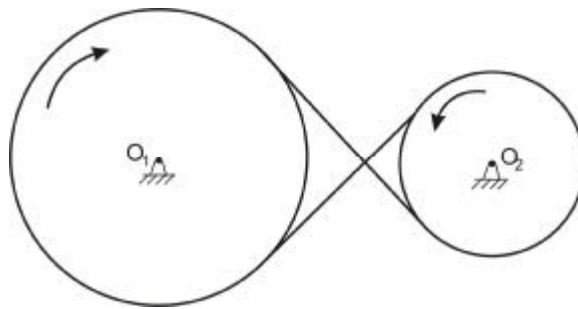


Рис. 8.6

Преобразование вращения одного твердого тела вокруг неподвижной оси во вращение второго твердого тела вокруг другой неподвижной оси осуществляется посредством зубчатого или фрикционного зацепления двух колес (рис. 8.4, а, б), или при помощи ременной передачи (рис. 8.5, 8.6).

При внутреннем зацеплении (рис. 8.4, а) и нескрещивающейся ременной передаче (рис. 8.5) направления вращений обоих колес совпадают. При внешнем зацеплении (рис. 8.4, б) и скрещивающейся ременной передаче (рис. 8.6) направление вращения колес противоположно. Модули скоростей точек на ободе зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равны. Угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов и радиусам:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (8.17)$$

Пример 8.2:

Шкив 1 радиуса r вращается так, что угол поворота изменяется по закону $j = 2\pi t^2$. Он соединен бесконечным ремнем со шкивом 2, радиус которого равен радиусу шкива 1. На одном валу со шкивом 2 жестко закреплен барабан 3 радиусом R , на который намотан трос, перемещающий груз 4. Определить ускорение точки М шкива 3, перемещение, скорость и ускорение груза 4 при $t=1$ с. (рис. 8.7).

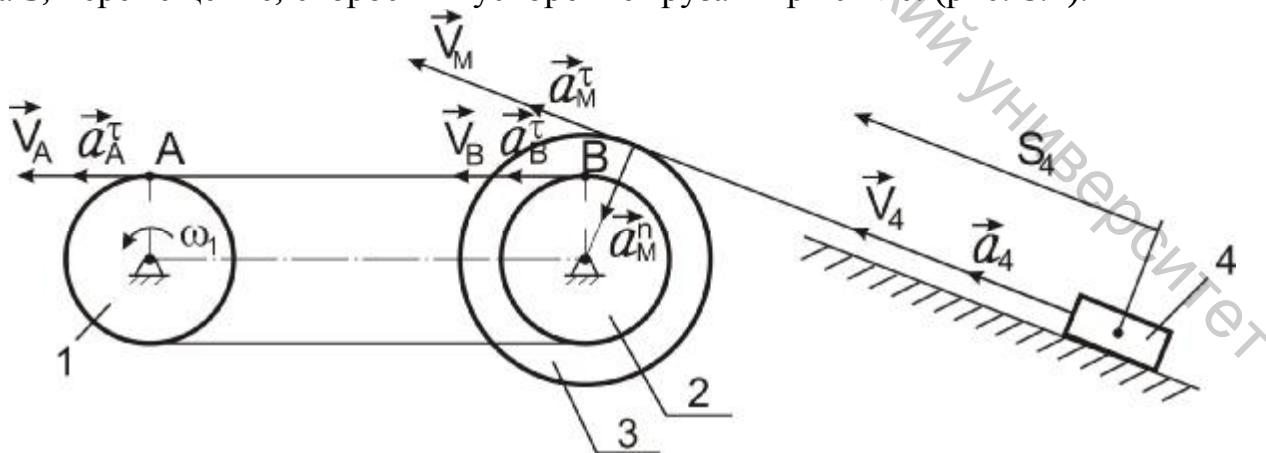


Рис. 8.7

Решение:

Определим угловую скорость и угловое ускорение шкива 1:

$$w_1 = \frac{dj_1}{dt} = 4pt, \text{ при } t=1\text{с.}, w_1 = 4p \text{ с}^{-1}.$$

$$e_1 = \frac{dw_1}{dt} = 4p \text{ с}^{-2}.$$

Так как все точки ремня имеют равные перемещения, скорости и касательные ускорения, то $S_A=S_B$, или $r_1j_1=r_2j_2$, т. е. $j_1=j_2$, углы поворота шкивов 1 и 2 равны между собой. Так как $V_A=V_B$, то $r_1w_1=r_2w_2$, отсюда $w_1=w_2$.

Из равенства касательных ускорений точек А и В следует, что

$$a_A^t = a_B^t, \quad r_1e_1 = r_2e_2, \text{ т. е. } e_1 = e_2.$$

Угол поворота барабана 3 равен углу поворота шкива 2, т. к. барабан жестко связан со шкивом 2, т. е. $j_1=j_2=j_3$, $w_3=w_2$, $e_3=e_2$.

Тогда перемещение точки М шкива 3: $S_M = Rj_3 = Rj = 2pRt^2$.

Скорость точки М: $V_M = Rw_3 = 4pRt$.

Касательное ускорение точки М: $a_M^t = Re_3 = 4pR$.

Нормальное ускорение точки М: $a_M^n = Rw_3^2 = 16p^2Rt^2$.

Ускорение точки М: $a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{16p^2R^2 + (16p^2Rt^2)^2}$

Значение ускорения точки М: $a_M = 4pR\sqrt{1+16p^2}$.

Линейные перемещения, скорости и ускорения всех точек троса одинаковы и соответственно равны перемещению, скорости и касательному ускорению точки М обода барабана. Тогда получим, что перемещение груза 4:

$$S_4 = S_M = 2pRt^2, \text{ при } t=1 \text{ с.}, S_4 = 2pR.$$

Скорость груза 4: $V_4 = V_M = 4pRt$, при $t=1$ с., $V_4 = 4pR$.

Ускорение груза 4: $a_4 = a_M^t = 4pR$.

Глава IX

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

9.1. Уравнения плоского движения твердого тела

Плоским движением твердого тела называют такое движение, при котором траектории всех точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоское движение часто называют плоскопараллельным. При плоском движении все точки твердого тела, лежащие на перпендикуляре, восстановленном к неподвижной плоскости, имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения. Следовательно, изучение плоского движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры, являющейся сечением твердого тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости.

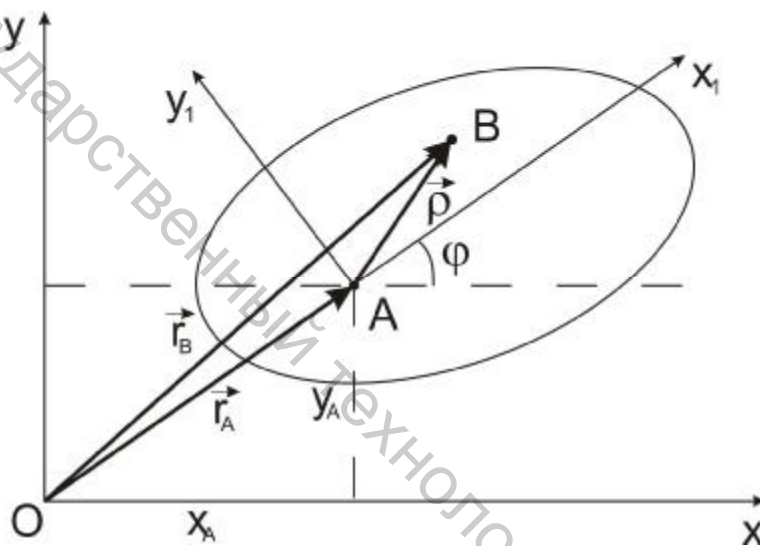


Рис. 9.1

Перемещение плоской фигуры можно заменить двумя простыми перемещениями: поступательным движением вместе с произвольной точкой А, называемой полюсом, и вращательным вокруг этой точки (рис. 9.1). При этом угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение вращения не зависят от выбора полюса.

Таким образом, движение плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, можно определить тремя уравнениями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad j = f_3(t), \quad (9.1)$$

где x_A , y_A – координаты полюса А, который является началом подвижной системы x_1y_1 , угол j – угол поворота подвижных осей относительно неподвижных. Уравнения (9.1) называются уравнениями движения плоской фигуры. Первых два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры вместе с полюсом, а третье уравнение – вращение плоской фигуры вокруг полюса.

Уравнения движения произвольной точки В плоской фигуры имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= x_A + x_1 \cos j - y_1 \sin j, \\y &= y_A + x_1 \sin j + y_1 \cos j,\end{aligned}\quad (9.2)$$

где x, y —координаты точки В в неподвижной системе координат; x_A, y_A —координаты полюса А; x_1, y_1 — координаты точки В в системе координат x_1, y_1 , жестко связанный с плоской фигурой; j —угол поворота подвижной системы координат (рис. 9.1).

Используя векторно-матричную символику, уравнения (9.2) можно представить в форме

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + A\vec{r}, \quad (9.3)$$

где A —матрица поворота на плоскости:

$$A = \begin{pmatrix} \cos j & -\sin j \\ \sin j & \cos j \end{pmatrix}.$$

9.2. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей

Скорость любой точки В плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{V}_A$ и скорости $\vec{V}_{BA}$ точки В во вращательном движении вокруг полюса (рис. 9.2):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (9.4)$$

причем $\vec{V}_{BA} \perp AB$ и численно $V_{BA} = \omega \cdot |AB|$ (рис. 9.2).

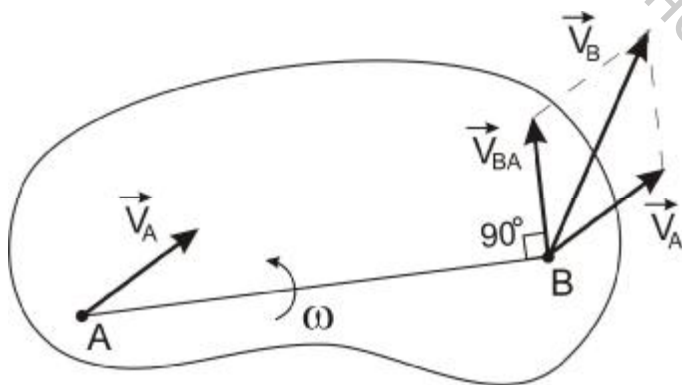


Рис. 3.2

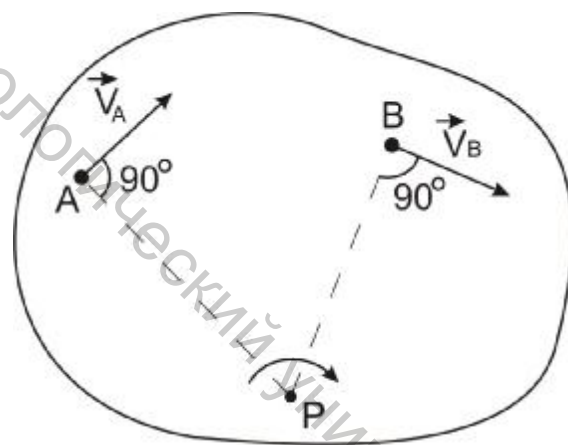


Рис. 3.3

Равенство (9.4) можно представить в виде

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.5)$$

где $\vec{r}$ —радиус-вектор, проведенный из полюса в точку В.

Из равенства (9.4) следует теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

При непоступательном движении плоской фигуры ($w \neq 0$) в каждый данный момент времени существует точка Р плоской фигуры, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей.

Если известны скорость $\vec{V}_A$ какой-либо точки А плоской фигуры и угловая скорость этой фигуры, то, повернув вектор $\vec{V}_A$ на 90° в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок

$$AP = \frac{V_A}{w}, \quad (3.6)$$

получим точку Р, которая является мгновенным центром скоростей (рис. 3.3).

Если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей. Отрезки АР, ВР называются мгновенными радиусами, а скорости всех точек плоской фигуры являются в данный момент скоростями этих точек при вращении фигуры вокруг мгновенного центра скоростей. Их модули равны произведению модуля угловой скорости на величину мгновенного радиуса, а вектора скоростей перпендикулярны к мгновенным радиусам.

Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны мгновенным радиусам:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = w. \quad (9.7)$$

Эта формула определяет значение угловой скорости фигуры.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей.

1. Скорости точек А и В плоской фигуры параллельны между собой, перпендикулярны отрезку АВ, направлены в одну сторону и не равны по модулю. Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения прямой, проходящей через концы векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, с продолжением отрезка АВ (рис. 9.4, а).

Из подобия треугольников видно, что $AP = \frac{V_A}{V_A - V_B} AB$.

2. Скорости точек А и В плоской фигуры параллельны между собой, перпендикулярны отрезку АВ и направлены в разные стороны. В этом случае мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения прямой, проходящей через концы векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, и отрезком АВ (рис. 9.4, б), причем

$$AP = \frac{V_A}{V_A + V_B} AB.$$

3. Если скорости двух точек А и В плоской фигуры параллельны между собой и не перпендикулярны АВ (рис. 9.4, в), то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности ($AP = \infty$), а угловая скорость вращения плоской фигуры равна:

$$w = \frac{V_A}{AP} = 0.$$

Движение в этом случае называется мгновенно-поступательным, скорости всех точек плоской фигуры равны.

4. Если скорости точек А и В плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны отрезку АВ (рис. 9.4, г), то мгновенный центр скоростей

находится в бесконечности ($AP = \infty$). Очевидно, что и в этом случае угловая скорость плоской фигуры равна нулю и движение плоской фигуры будет мгновенно-поступательным.

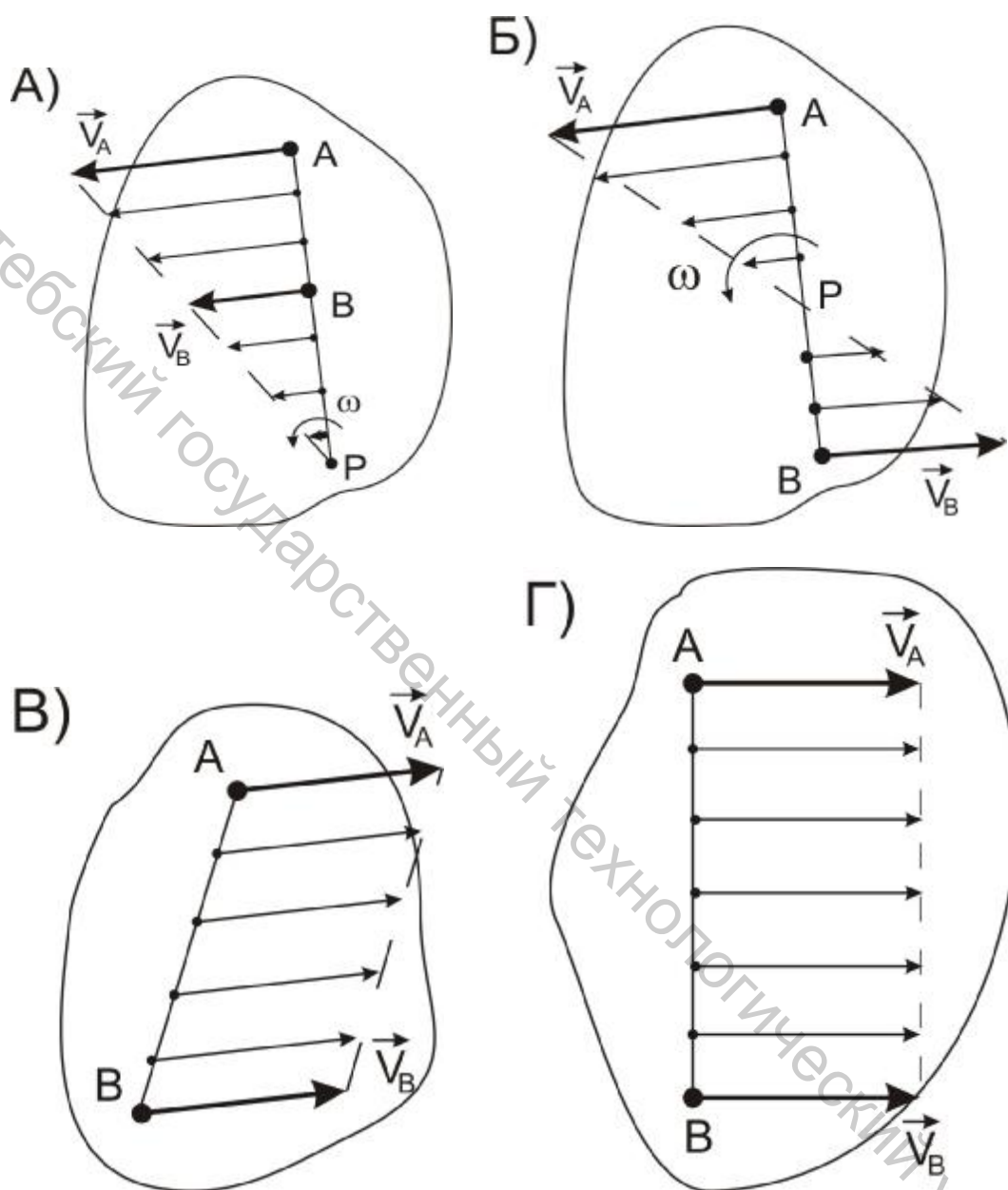


Рис. 9.4

Следует заметить, что при мгновенном поступательном движении только скорости точек плоской фигуры одинаковы, а ускорения точек в общем случае различны.

Если требуется найти скорости нескольких точек, то наиболее эффективным является решение задач при помощи мгновенного центра скоростей. Если же требуется найти скорость какой-либо одной точки, то удобно применять к решению задачи либо формулу (9.4), либо теорему о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки.

При решении задач на движение плоских механизмов, представляющих собой совокупность стержней или колес, или тех и других вместе, рассматривают

последовательно движение отдельных звеньев механизма. При этом следует начинать с того звена, движение которого задано. При переходе от одного звена к другому определяют скорости и ускорения тех точек, которые являются общими для двух соседних звеньев. Мгновенный центр скоростей, угловые скорости и угловые ускорения следует находить для каждого звена в отдельности.

Пример 9.1:

Колесо радиусом $R=0,5$ катится без скольжения по прямолинейному рельсу. Скорость центра колеса в данный момент времени $V_C = 3$ м/с. Определить скорости точек А, В, D и угловую скорость колеса (рис. 9.5, а).

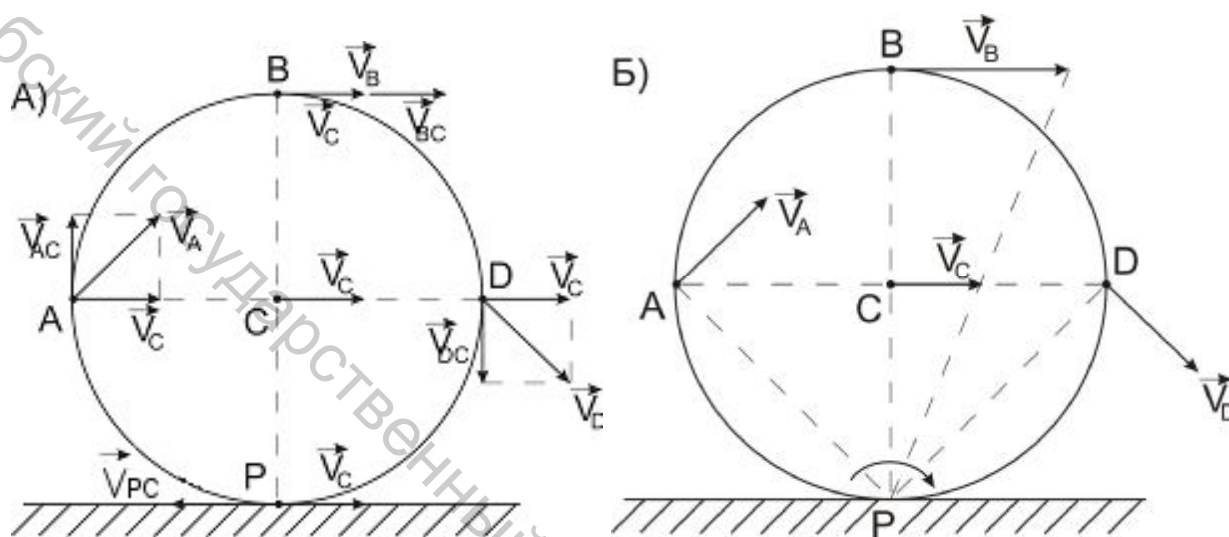


Рис. 9.5

Решение:

1-й способ.

Для определения скоростей точек А, В, D применим формулу (9.4). Примем точку С за полюс, тогда скорость любой точки колеса будет равна геометрической сумме скорости полюса и скорости вращения этой точки вокруг полюса:

$$\dot{V}_A = \dot{V}_C + \dot{V}_{AC}, \quad \dot{V}_B = \dot{V}_C + \dot{V}_{BC}, \quad \dot{V}_D = \dot{V}_C + \dot{V}_{DC} \quad (9.8)$$

Так как колесо катится по рельсу без скольжения, то скорость точки касания колеса с рельсом равна нулю, т. е. $V_P = 0$, и точка Р является мгновенным центром скоростей колеса.

Так как $\dot{V}_P = \dot{V}_C + \dot{V}_{PC}$, а $\dot{V}_P = 0$, то получим, что $\dot{V}_{PC} = -\dot{V}_C$. Численно $V_{PC} = V_C$. Учитывая, что расстояния от точек Р, А, В, D до полюса С равны, получим, что вращательные скорости этих точек вокруг полюса тоже равны:

$$V_{AC} = V_{BC} = V_{DC} = V_{PC} = V_C$$

Векторы $\dot{V}_{AC}$, $\dot{V}_{BC}$, $\dot{V}_{DC}$ перпендикулярны соответствующим радиусам колеса и направлены в сторону вращения. Тогда

$$V_A = \sqrt{V_C^2 + V_{AC}^2} = V_C \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ м/с},$$

$$V_B = V_C + V_{BC} = 6 \text{ м/с}, \quad (9.9)$$

$$V_D = \sqrt{V_C^2 + V_{DC}^2} = 3\sqrt{2} \text{ м/с}$$

$$\text{Угловая скорость колеса: } \omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ с}^{-1} \quad (9.10)$$

2-й способ.

Так как точка Р—мгновенный центр скоростей (рис. 9.5, б), то для определения скоростей точек А, В, D достаточно применить формулу (9.7), из которой видно, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_C}{CP}, \text{ откуда } V_A = V_C \frac{AP}{CP}.$$

Так как $AP = PD = R\sqrt{2}$, то скорости V_A и V_D численно равны между собой:

$$V_A = V_C \frac{R\sqrt{2}}{R} = V_C \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ м/с},$$

$$V_D = V_C \frac{PD}{PC} = V_C \frac{R\sqrt{2}}{R} = V_C \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ м/с}.$$

Аналогично:

$$\frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}, \text{ или } V_B = V_C \frac{BP}{CP} = 2V_C = 6 \text{ м/с}.$$

Скорости $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, $\vec{V}_D$ направлены перпендикулярно соответствующим мгновенным радиусам AP , BP , DP в сторону вращения колеса.

Пример 9.2:

Плоский механизм состоит из четырех стержней и ползуна, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Известно, что $O_1A=20$ см, $AB=40$ см, $O_2B=20$ см, угловая скорость ω_1 кривошипа O_1A равна 2 с^{-1} . Определить для заданного положения механизма скорости точек В, D, К и угловые скорости стержней 2, 3, 4 если $AK=KB$ (рис. 9.6).

Решение: Стержень 1 совершает вращательное движение. Зная угловую скорость стержня и его длину определим скорость точки А:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 40 \text{ см/с}. \quad (9.11)$$

Вектор $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно O_1A в сторону вращения кривошипа.

Стержень 2 совершает плоскопараллельное движение. Так как точка В одновременно принадлежит стержню O_2B , который вращается вокруг оси O_2 , то вектор скорости точки В перпендикулярен стержню O_2B . Численное значение скорости точки В определим по теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую АВ, соединяющую эти точки. Получим:

$$V_A = V_B \cos 60^\circ, \text{ откуда } V_B = 80 \text{ см/с}. \quad (9.12)$$

Для определения угловой скорости стержня 2 построим мгновенный центр скоростей этого стержня: восстанавливаем перпендикуляры из точек А и В к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ до взаимного пересечения, получаем точку C_2 . Тогда

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_2}, \text{ где } AC_2 = AB \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{ см}.$$

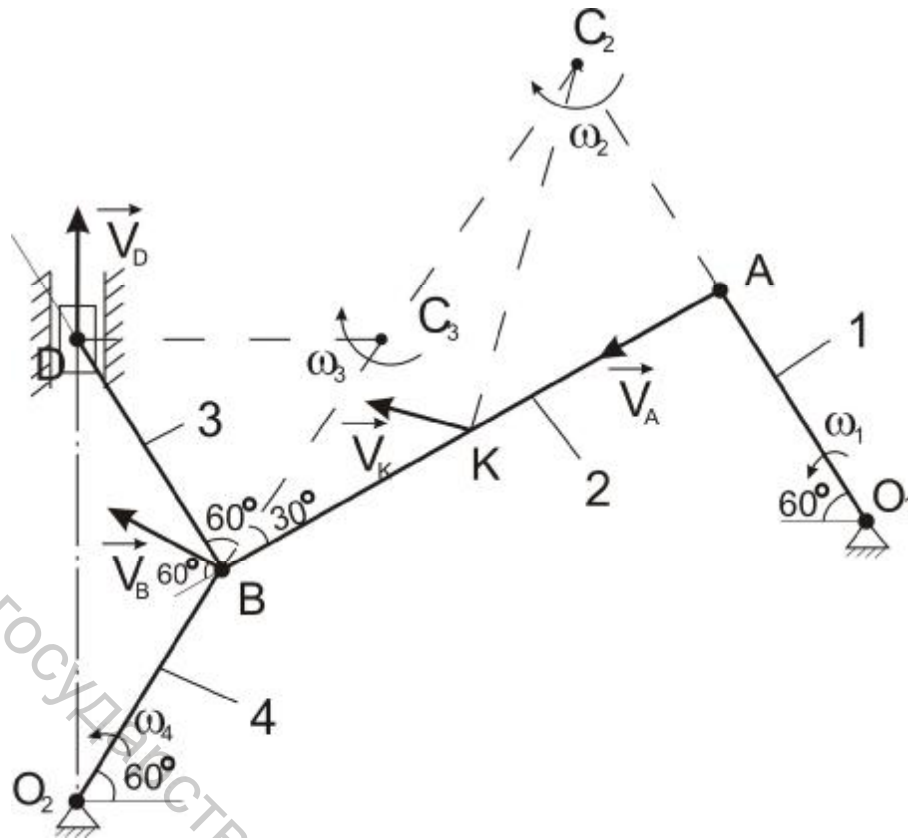


Рис. 9.6

Получим, что

$$w_2 = \frac{V_A}{AB \operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ с}^{-1}. \quad (9.13)$$

Скорость точки К можно определить, используя формулу (9.7)

$$V_K = w_2 \cdot KC_2, \text{ где } KC_2 = \sqrt{AK^2 + (AC_2)^2} = 20\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ см.}$$

$$\text{Тогда } V_K = \sqrt{3} \cdot 20\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 53 \text{ см/с.} \quad (9.14)$$

Вектор $\vec{V}_K$ перпендикулярен отрезку KC_2 и направлен в сторону угловой скорости w_2 .

Зная скорость точки В, можно определить угловую скорость стержня O_2B :

$$w_4 = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{80}{20} = 4 \text{ с}^{-1}. \quad (9.15)$$

Для определения скорости точки D учтем, что ползун D совершает возвратно-поступательное движение в вертикальных направляющих. Вектор $\vec{V}_D$ направлен по вертикали вверх. С другой стороны, точка D принадлежит стержню 3, который участвует в плоскопараллельном движении. Численное значение скорости точки D определим по теореме о проекциях скоростей двух точек на прямую BD, проходящую через эти точки:

$$V_B \cos 30^\circ = V_D \cos 30^\circ, \text{ или } V_D = V_B = 80 \text{ см/с.}$$

Угловую скорость стержня 3 можно определить, зная положение мгновенного центра скоростей, который будет находиться в точке C_3 . Тогда $w_3 = \frac{V_B}{BC_3}$.

Так как треугольник BDC_3 –равносторонний, то $BC_3=BD$. Учитывая, что треугольник BO_2D –равнобедренный, имеем, что $BD=BO_2=20$ см. Значит, $BC_3=20$ см.

Окончательно получим: $w_3 = \frac{80}{20} = 4 \text{ с}^{-1}$.

9.3. Ускорение точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений

Ускорение любой точки плоской фигуры можно определить двумя способами:

1) как векторную сумму ускорения точки в поступательном движении вместе с выбранным полюсом и ускорения во вращательном движении плоской фигуры вокруг этого полюса;

2) как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений, причем мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю.

При использовании первого способа в качестве полюса выбирают точку, ускорение которой известно или может быть определено. Тогда ускорение некоторой точки определяется равенством

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (9.16)$$

где $\vec{a}_A$ –ускорение точки, принятой за полюс; $\vec{a}_{BA}$ –ускорение точки В во вращательном движении вокруг полюса А.

Учитывая, что ускорение точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса складывается из векторной суммы тангенциального (касательного) и нормального ускорений точки В относительно полюса А, равенство (9.16) можно представить в виде (рис. 9.7):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t. \quad (9.17)$$

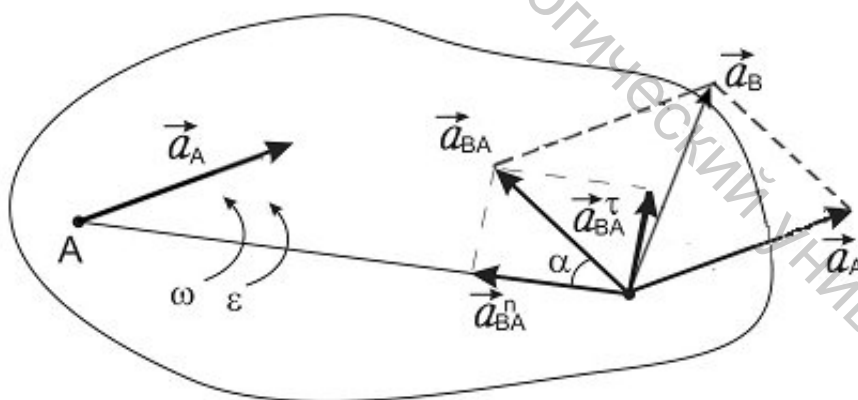


Рис. 9.7

Численно $a_{BA}^n = w^2 \cdot AB$, $a_{BA}^t = e \cdot AB$, при этом вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль АВ (от точки В к точке А), а вектор $\vec{a}_{BA}^t$ перпендикулярен к АВ и направлен в сторону углового ускорения e плоской фигуры.

Угол α между векторами $\vec{a}_{BA}^t$ и $\vec{a}_{BA}^n$ (рис. 9.7) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{a}_{BA}^t|}{a_{BA}^n} = \frac{|e|}{w^2}. \quad (9.18)$$

Следующий метод определения ускорения точек плоской фигуры заключается в использовании понятия мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Чтобы определить положение мгновенного центра ускорений для данного момента времени, необходимо:

1) повернуть полупрямую, по которой направлен вектор $\vec{a}$ ускорения некоторой точки A, вокруг точки A на острый угол $\alpha = \arctg \frac{|e|}{w^2}$ в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное;

2) на полученной полупрямой отложить отрезок (рис. 9.8)

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{w^4 + e^2}}. \quad (9.19)$$

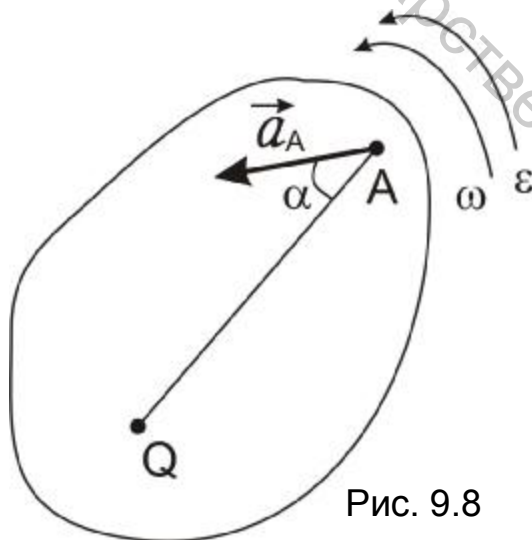


Рис. 9.8

Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент определяется как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений.

Таким образом, модули ускорений точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы этих ускорений составляют с отрезками, соединяющими эти точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол $\alpha = \arctg \frac{|e|}{w^2}$.

Отметим два частных случая.

1. Пусть $e = 0$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|e|}{w^2} = 0$ и $\alpha = 0$, следовательно, ускорение $\vec{a}_A$ любой точки A движущейся плоской фигуры направлено по прямой AQ, т. е. проходит через мгновенный центр ускорений. Мгновенный центр ускорений Q в этом случае находится в точке пересечения прямых, по которым направлены ускорения двух каких-либо точек фигуры.

2. Пусть $w = 0$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ и $\alpha = 90^\circ$, следовательно, ускорение $\vec{a}_A$ любой точки фигуры перпендикулярно к AQ. В этом случае мгновенный центр ускорений Q находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из двух каких-либо точек движущейся фигуры к ускорениям этих точек.

Существуют два типа задач на определение ускорений точек плоской фигуры. При решении задач рекомендуется соблюдать следующую последовательность:

А. Если заданы скорость и ускорение одной точки А плоской фигуры и направление скорости и ускорения другой точки В фигуры, а требуется определить ускорения точек плоской фигуры, то:

1. находим мгновенный центр скоростей, восстанавливая перпендикуляры к скоростям двух точек плоской фигуры, и определяем мгновенную угловую скорость плоской фигуры;

2. определяем нормальное ускорение точки В при вращении фигуры вокруг оси, проходящей через точку А, которую принимаем за полюс;

3. приравняв нулю сумму проекций всех слагаемых равенства (9.17) на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения точки А, находим из этого равенства модуль неизвестного касательного ускорения;

4. определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному значению касательного ускорения;

5. по формуле (9.17) определяем ускорение любой точки плоской фигуры.

Б. Если заданы ускорения двух точек плоской фигуры и требуется определить положение мгновенного центра ускорений и ускорение любой точки плоской фигуры, то:

1) рассматривая точку А как полюс, проектируем на прямую АВ, соединяющую точки А и В, равенство: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$;

2) находим из полученного равенства величину a_{BA}^n и затем величину мгновенной угловой скорости плоской фигуры;

3) проектируя то же векторное равенство на направление, перпендикулярное к АВ, находим величину касательного ускорения a_{BA}^t и, далее, мгновенное угловое ускорение плоской фигуры;

4) находим положение мгновенного центра ускорений, используя формулы (9.18) и (9.19).

Пример 9.3:

Жесткий прямой угол АМЕ движется так, что точка А остается все время на неподвижной прямой Оу, тогда как другая сторона МЕ проходит через вращающийся шарнир В. Расстояние $AM = OB = a$. Скорость V_A точки А постоянна. Определить ускорение точки М как функцию угла j (рис. 9.9).

Решение:

Жесткий угол АМЕ совершает плоскопараллельное движение. Для определения ускорения точки М применим формулу (9.17), приняв точку А за полюс:

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{MA}^n + \mathbf{a}_{MA}^t. \quad (9.20)$$

Так как скорость точки А постоянна, то ускорение точки А равно нулю и равенство (9.20) примет вид:

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{MA}^n + \mathbf{a}_{MA}^t. \quad (9.21)$$

Вектор $\mathbf{a}_{MA}^n$ направлен вдоль АМ от точки М, а вектор $\mathbf{a}_{MA}^t$ перпендикулярен к АМ.

Найдем значение a_{MA}^n :

$$a_{MA}^n = w^2 \cdot AM,$$

где w – угловая скорость жесткого угла АМЕ. Для определения угловой скорости w направим векторы скоростей точек А и В и построим мгновенный центр скоростей Р звена АМЕ. Тогда $w = \frac{V_A}{AP}$.

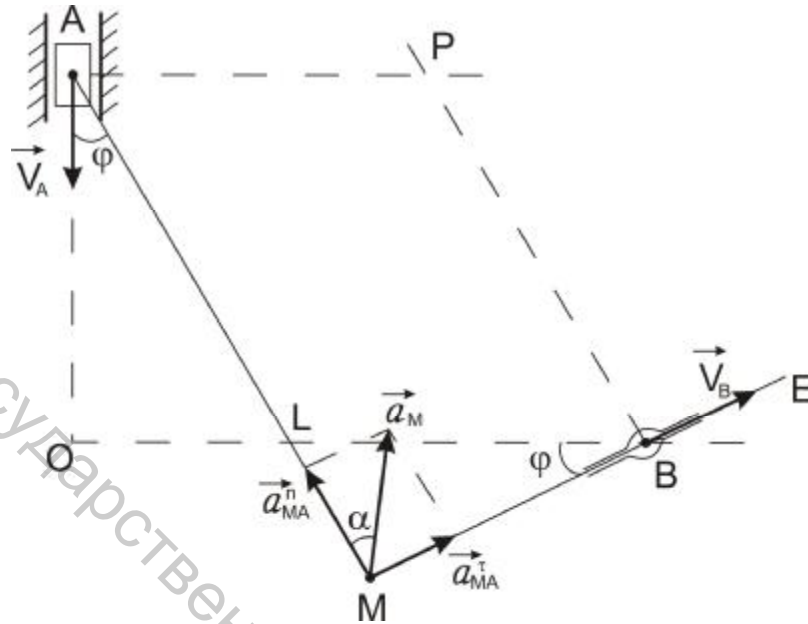


Рис. 9.9

Из треугольника BLM определим, что $AP=BL$. Так как $OB=a$, то $BL = a - OL = a - LM$. Тогда $\sin j = \frac{LM}{a - LM}$, откуда $LM = \frac{a \sin j}{1 + \sin j}$, а $BL = AP = \frac{a}{1 + \sin j}$.

Получим, что угловая скорость

$$w = \frac{V_A(1 + \sin j)}{a}. \quad (9.22)$$

Тогда $a_{MA}^n = \frac{V_A^2(1 + \sin j)^2}{a}$.

Ускорение a_{MA}^t определим по формуле $a_{MA}^t = e \cdot AM$, где e – угловое ускорение угла АМЕ.

Для определения углового ускорения e продифференцируем равенство (9.22) по времени:

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{V_A}{a} \dot{j} \cos j.$$

Учитывая, что $\dot{j} = w$, подставим значение w и получим:

$$e = \frac{V_A^2}{a^2} (1 + \sin j) \cos j. \quad (9.23)$$

Значение a_{MA}^t примет вид: $a_{MA}^t = \frac{V_A^2}{a} (1 + \sin j) \cos j$.

Модуль ускорения точки М

$$a_M = \sqrt{(a_{MA}^n)^2 + (a_{MA}^t)^2} = \sqrt{\frac{V_A^4}{a^2}(1 + \sin j)^4 + \frac{V_A^4}{a^2}(1 + \sin j)^2 \cos^2 j} = \frac{V_A^2}{a} \sqrt{2}(1 + \sin j)^{\frac{3}{2}} \quad (9.24)$$

Для определения направления вектора $\vec{a}_M$ найдем значение угла α , образуемого вектором $\vec{a}_M$ с отрезком AM:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{w^2} = \frac{\cos j}{1 + \sin j} \quad (9.25)$$

Преобразуем числитель и знаменатель правой части равенства (9.25):

$$\cos j = 1 - 2 \sin^2 \frac{j}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{j}{2} \right) = 2 (\sin 45^\circ - \sin \frac{j}{2}) (\sin 45^\circ + \sin \frac{j}{2}) = 2 \sin(45^\circ + \frac{j}{2}) \times$$

$$\times \sin(45^\circ - \frac{j}{2})$$

$$1 + \sin j = \sin 90^\circ + \sin j = 2 \sin(45^\circ + \frac{j}{2}) \cos(45^\circ - \frac{j}{2})$$

$$\text{Окончательно получим, что } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{j}{2}). \quad (9.26)$$

Пример 9.4:

Определить для заданного положения механизма скорость и ускорение точки В, а также угловую скорость и угловое ускорение колеса 2, если длина кривошипа ОА равна 50 см, радиус колеса 2 равен 30 см, угловая скорость кривошипа ОА постоянна и $w_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$, колесо 1 вращается с постоянной угловой скоростью $w_1 = 4 \text{ с}^{-1}$. Угловые скорости кривошипа ОА и колеса 1 направлены в разные стороны (рис. 9.10).

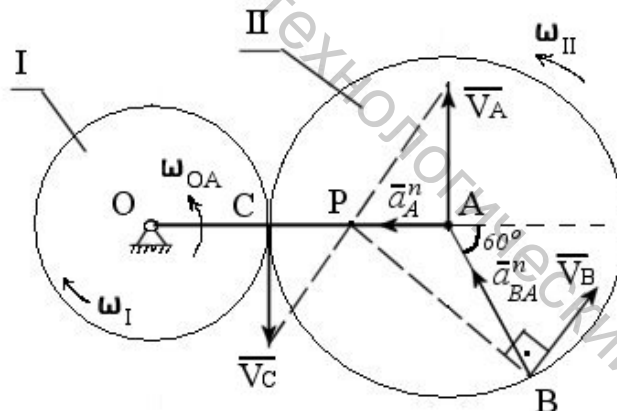


Рис. 9.10

Решение:

А. Определение скорости точки В и угловой скорости колеса 2.

Так как кривошип ОА равномерно вращается вокруг неподвижной точки О, то скорость точки А $V_A = w_{OA} \cdot OA = 100 \text{ см/с}$. (9.27)

Вектор $\vec{V}_A$ перпендикулярен ОА и направлен в сторону w_{OA} .

Определим скорость V_C точки С зацепления колес 1 и 2 во вращении колеса 1 вокруг оси О:

$$V_C = w_1 \cdot OC = 80 \text{ см/с} \quad (9.28)$$

Вектор $\vec{V}_C$ перпендикулярен ОС и направлен в сторону w_1 .

Учитывая, что колесо 2 совершает плоскопараллельное движение, а точки А и С принадлежат колесу 2, определим положение мгновенного центра скоростей колеса 2.

Так как скорости точек А и С перпендикулярны отрезку АС и направлены в противоположные стороны, то для определения мгновенного центра скоростей достаточно провести прямую через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ до пересечения с отрезком АС. Полученная точка Р является мгновенным центром скоростей колеса 2, при этом $AP = \frac{V_A}{V_A + V_C} AC = 16,67 \text{ см.}$

$$\text{Угловая скорость колеса 2 } \omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{100}{16,67} = 6 \text{ с}^{-1}. \quad (9.29)$$

Направление угловой скорости колеса 2 показано на рисунке.

Тогда скорость точки В

$$V_B = \omega_2 \cdot BP, \text{ где } BP = \sqrt{AP^2 + AB^2 - 2 \cdot AP \cdot AB \cos 120^\circ}.$$

Подставив численные значения величин, получим:

$$BP = \sqrt{(16,67)^2 + 30^2 + 16,67 \cdot 30} = 40,96 \text{ см.}$$

Получим, что скорость точки В окончательно равна:

$$V_B = 6 \cdot 40,96 = 245,76 \text{ см/с.} \quad (9.30)$$

Вектор $\vec{V}_B$ направлен перпендикулярно отрезку ВР в сторону ω_2 .

Б. Определение ускорения точки В и углового ускорения колеса 2.

Угловое ускорение колеса 2 определим по формуле

$$e_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A}{AP} \right). \quad (9.31)$$

При равномерном вращении кривошипа ОА и колеса 1 получим, что

$$AP = \text{Const. Тогда } e_2 = \frac{1}{AP} \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^t}{AP} = 0. \quad (9.32)$$

Определим ускорение точки А во вращательном движении кривошипа вокруг оси. Тогда $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t$. (9.33)

Так как кривошип вращается равномерно, то $a_A^t = 0$.

Получим, что нормальное ускорение точки А равно:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 200 \text{ см/с}^2 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен от точки А к оси вращения О. Зная ускорение точки А примем ее за полюс и определим ускорение точки В по формуле

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t. \quad (9.34)$$

Нормальное ускорение точки В по отношению к полюсу А определяется формулой $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 36 \cdot 30 = 1080 \text{ см/с}^2 = 10,8 \text{ м/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль отрезка АВ от точки В к полюсу А.

Касательное ускорение точки В по отношению к полюсу А определяется формулой $a_{BA}^t = e_2 \cdot AB$, т. к. $e_2 = 0$, то $a_{BA}^t = 0$.

Модуль ускорения точки В равен:

$$a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2 + 2a_A^n \cdot a_{BA}^n \cos 60^\circ}. \quad (9.35)$$

Подставим численные значения в равенство (3.35) и окончательно получим

$$a_B = \sqrt{2^2 + 10,8^2 + 2 \cdot 10,8} = 11,93 \text{ м/с}^2. \quad (9.36)$$

Глава X

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

10.1. Абсолютное, переносное и относительное движение точки

Сложное движение точки—это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

Рассмотрим сложное движение точки M , перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую условно будем называть неподвижной (рис. 10.1).

Движение точки M по отношению к подвижным осям координат называется относительным движением. Скорость и ускорение точки по отношению к подвижным осям называются относительной скоростью и относительным ускорением. Эти величины будем обозначать $\vec{V}_r$ и $\vec{a}_r$.

Переносным называется движение относительно неподвижной системы отсчета той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M . Следовательно, переносной скоростью и переносным ускорением будем считать скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M . Переносную скорость и переносное ускорение обозначаем $\vec{V}_e$ и $\vec{a}_e$.

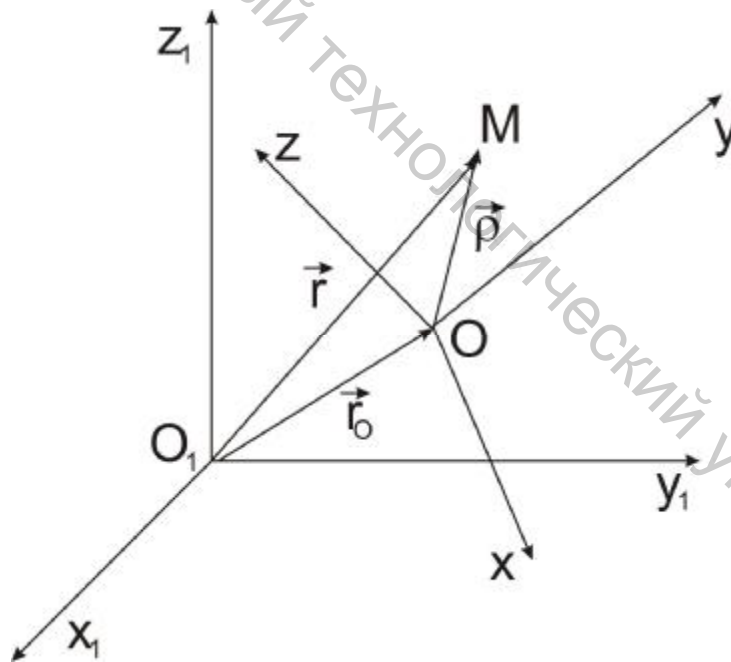


Рис. 10.1

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным движением. Скорость и ускорение точки в этом движении называется абсолютной скоростью и абсолютным ускорением. Эти величины обозначаются $\vec{V}_a$ и $\vec{a}_a$.

Если точка одновременно участвует в относительном и переносном движениях, то ее абсолютное движение называют сложным, а ее относительное и переносное движения называются составляющими движениями.

10.2. Скорость точки в абсолютном, относительном и переносном движениях

Если точка М участвует в сложном движении, то справедлива теорема, согласно которой абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скорости этой точки:

$$\dot{\vec{V}}_a = \dot{\vec{V}}_e + \dot{\vec{V}}_r. \quad (10.1)$$

Для определения переносной скорости мысленно останавливается относительное движение и переносная скорость вычисляется по правилам кинематики твердого тела, т. е. как скорость той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпала движущаяся точка.

Для определения относительной скорости точки следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительную скорость по правилам кинематики точки.

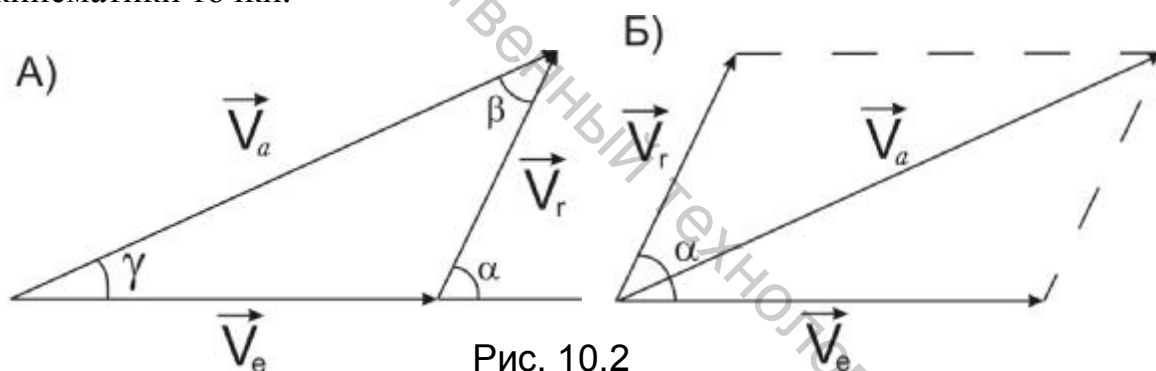


Рис. 10.2

С помощью уравнения (10.1) величину абсолютной скорости можно определить геометрически и аналитически. Для геометрического метода решения данной задачи можно построить замкнутый треугольник скоростей (рис. 10.2, а) или параллелограмм скоростей (рис. 10.2, б).

Тогда абсолютная скорость определяется формулами

$$\frac{V_a}{\sin(180^\circ - a)} = \frac{V_e}{\sin b} = \frac{V_r}{\sin g} \quad (10.2)$$

$$\text{или } V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos a}, \quad (10.3)$$

где β и γ – углы, образуемые вектором $\dot{\vec{V}}_a$ с векторами $\dot{\vec{V}}_e$ и $\dot{\vec{V}}_r$.

При применении метода проекций достаточно выбрать оси координат и спроектировать равенство (10.1) на эти оси:

$$\begin{aligned} V_{ax} &= V_{ex} + V_{rx}, \\ V_{ay} &= V_{ey} + V_{ry}, \\ V_{az} &= V_{ez} + V_{rz}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Модуль абсолютной скорости находится по ее проекциям:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}. \quad (10.5)$$

Направление абсолютной скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(V_a, x) = \frac{V_{ax}}{V}, \quad \cos(V_a, y) = \frac{V_{ay}}{V}, \quad \cos(V_a, z) = \frac{V_{az}}{V}. \quad (10.6)$$

10.3. Ускорение точки в абсолютном, относительном и переносном движениях. Ускорение Кориолиса

Зависимость между ускорениями точки в абсолютном, относительном и переносном движениях определяется теоремой сложения ускорений (теоремой Кориолиса), согласно которой ускорение точки в абсолютном движении равно геометрической сумме переносного ускорения $\vec{a}_e$, относительного ускорения $\vec{a}_r$ и ускорения Кориолиса $\vec{a}_k$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k. \quad (10.7)$$

Для определения относительного ускорения точки следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительное ускорение по правилам кинематики точки. Для определения переносного ускорения мысленно останавливаем относительное движение точки и вычисляем переносное ускорение по правилам кинематики твердого тела, как ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.

Кориолисово ускорение $\vec{a}_k$ равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки:

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r), \quad (10.8)$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r). \quad (10.9)$$

Направление кориолисова ускорения можно определить по правилу векторного произведения или по правилу Н. Е. Жуковского (рис. 10.3).

Согласно правилу векторного произведения, вектор ускорения Кориолиса направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{V}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

Согласно правилу Н. Е. Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса необходимо вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ спроектировать на плоскость, перпендикулярную к вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$ (оси переносного вращения тела), и полученную проекцию повернуть в этой плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения.

Если вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, то достаточно повернуть вектор $\vec{V}_r$ на 90° в направлении переносного вращения.

В этом случае ускорение Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e V_r, \text{ т. к. } \alpha = 90^\circ \quad (10.10)$$

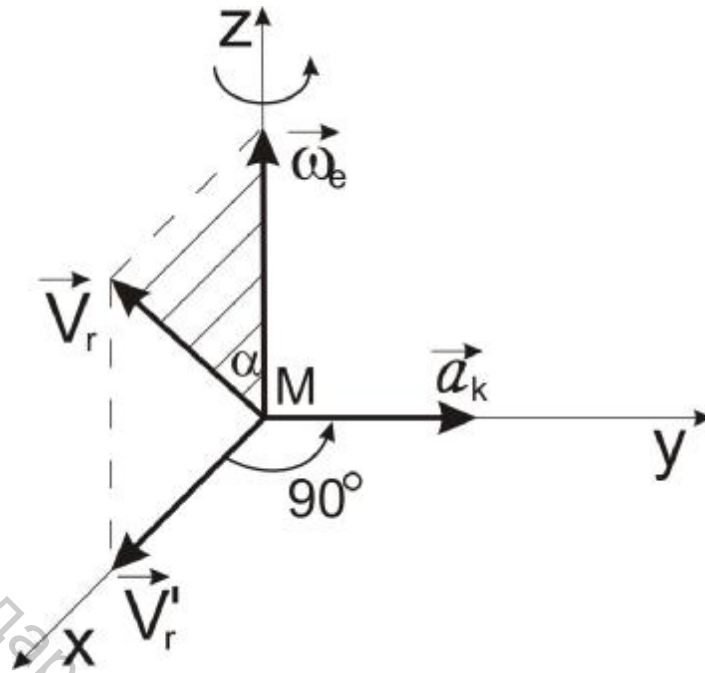


Рис. 10.3

Из выражений (10.10) и (10.11) следует, что кориолисово ускорение обращается в нуль в следующих случаях:

1) если $\dot{\mathbf{r}}_e = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль;

2) если $\dot{V}_r = 0$, т. е. когда относительная скорость точки в данный момент времени обращается в нуль;

3) если векторы относительной скорости точки и переносной угловой скорости параллельны между собой, т. е. $\dot{V}_r \parallel \dot{\mathbf{r}}_e$, тогда $\sin(\dot{\mathbf{r}}_e, \dot{V}_r) = 0$.

Если траектории точки в относительном и переносном движениях криволинейны, то целесообразно ускорения точки в этих движениях разлагать на нормальные и тангенциальные составляющие:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t, \quad \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t. \quad (10.11)$$

Тогда равенство (10.7) можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_k. \quad (10.12)$$

Абсолютное ускорение определим методом проекций. Для этого выберем какую-нибудь систему координат хуz и спроектируем векторное равенство (10.12) на каждую из этих осей:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_{ex}^n + a_{ex}^t + a_{rx}^n + a_{rx}^t + a_{kx}, \\ a_{ay} &= a_{ey}^n + a_{ey}^t + a_{ry}^n + a_{ry}^t + a_{ky}, \\ a_{az} &= a_{ez}^n + a_{ez}^t + a_{rz}^n + a_{rz}^t + a_{kz}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Модуль абсолютного ускорения определяется по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}. \quad (10.14)$$

Направляющие косинусы равны:

$$\cos(\mathbf{a}_a, x) = \frac{a_{ax}}{a}, \quad \cos(\mathbf{a}_a, y) = \frac{a_{ay}}{a}, \quad \cos(\mathbf{a}_a, z) = \frac{a_{az}}{a}. \quad (10.15)$$

10.4. Методика решения задач

При решении задач необходимо соблюдать следующую последовательность.

1. Разложить сложные движения точки на составляющие, определив относительное и переносное движения.
2. Выбрать две системы координат: неподвижную (абсолютную) и подвижную (относительную).
3. По уравнениям относительного и переносного движений определить положение точки и тела в данный момент времени.
4. Мысленно остановить переносное движение и определить скорость и ускорение точки в относительном движении.
5. Для определения кинематических характеристик переносного движения необходимо мысленно остановить относительное движение точки и определить скорость и ускорение точки в переносном движении.

При этом следует иметь в виду, что необходимо определять скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Иначе говоря, в переносном движении точка рассматривается неразрывно связанной с движущимся телом, поэтому ее скорость и ускорение необходимо определять из вида движения твердого тела.

6. По известным величинам угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти ускорение Кориолиса и его вектор изобразить на рисунке.
7. Пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютной скорости и абсолютного ускорения на оси координат. По найденным проекциям абсолютной скорости и абсолютного ускорения определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение по модулю и направлению.

Пример 10.1:

Прямоугольник ABCD (рис. 10.4, а) приводится в движение посредством двух кривошипов O_1D и O_2C равной длины, вращающихся по закону $j = \frac{pt^3}{6}$ рад. По дуге полуокружности радиуса R , расположенной в плоскости прямоугольника, от точки A движется точка M согласно уравнению $AM = 6pt^2$ см. Для момента времени $t=1$ с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M , если $O_1D=O_2C=20$ см, $O_1O_2=DC$, $R=18$ см.

Решение:

1. Так как точка M совершает сложное движение, то это движение разложим на две составляющие движения: переносное—движение точки вместе с прямоугольником ABCD и относительное—движение точки M по дуге полуокружности радиуса $R=18$ см согласно уравнению $AM = S_r = 6pt^2$ см.

2. Определим положение прямоугольника ABCD и точки М на дуге полуокружности в момент времени $t=1$ с после начала движения.

Положение прямоугольника определяется углом j , который при $t=1$ с равен:

$$j = \frac{p}{6} \text{ рад, или } j = 30^\circ. \quad (\text{рис.10.4, б})$$

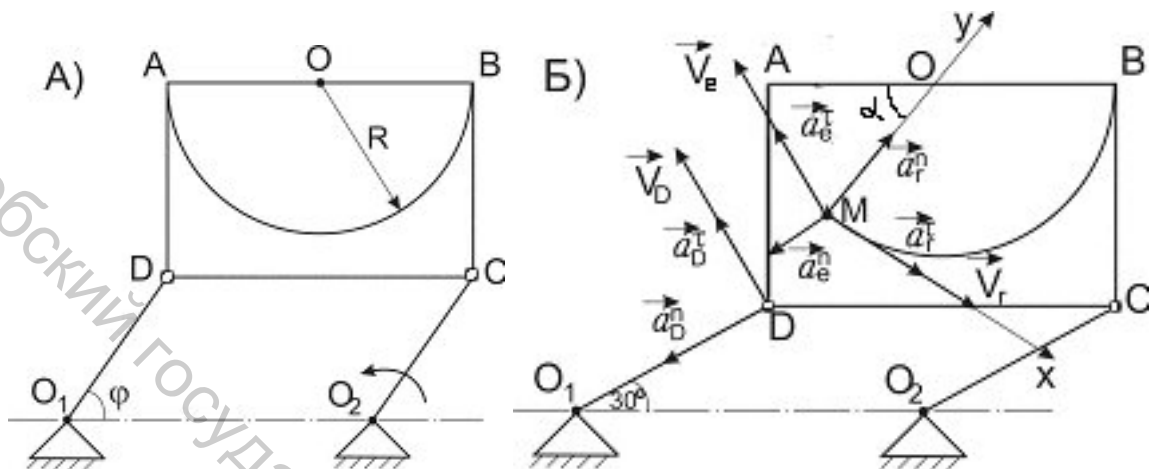


Рис. 10.4

Положение точки М на полуокружности определяется величиной центрального угла α и радиуса полуокружности:

$$\alpha = \frac{S_r}{R}, \text{ или при } t=1 \text{ с, } \alpha = \frac{6p}{18} = \frac{p}{3} = 60^\circ$$

Следовательно, в данный момент времени положение точки М соответствует указанному на рис. 10.4, б.

3. Определим абсолютную скорость точки

Величина относительной скорости

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 12pt, \text{ при } t=1 \text{ с, } V_r = 12p = 37,68 \text{ см/с.}$$

Вектор относительной скорости направлен по касательной к траектории относительного движения.

Для определения переносной скорости точки М мысленно остановим ее относительное движение и, рассматривая движение прямоугольника, определим скорость той точки, с которой в данный момент времени совпадает точка М. Так как прямоугольник совершает поступательное движение, то скорости всех его точек равны по величине и направлению. Чтобы определить скорость точки М в переносном движении, достаточно определить скорость любой точки прямоугольника ABCD. Определим скорость точки D. Тогда $\dot{V}_e = \dot{V}_D$. Величина этой скорости

$$V_e = V_D = w_{O_1D} \cdot O_1D,$$

где w_{O_1D} –угловая скорость кривошипа O_1D .

$$\text{Величина угловой скорости } w_{O_1D} = \frac{dj}{dt} = \frac{3pt^2}{6} = \frac{pt^2}{2}.$$

При $t=1$ с, $\omega_{O_1D} = \frac{p}{2} = 1,57 \text{ с}^{-1}$.

Модуль переносной скорости $V_e = V_D = 1,57 \cdot 20 = 31,4 \text{ см/с}$.

Вектор $\vec{V}_e$, как и вектор $\vec{V}_D$, направлен перпендикулярно звену O_1D в сторону его вращения.

Абсолютную скорость точки М определяем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Проектируем это векторное равенство на оси x и y , указанные на рисунке 10.4, б. Получим

$$V_{ax} = V_r - V_e \cos 30^\circ = 37,68 - 31,4 \cdot 0,87 = 10,36 \text{ см/с},$$

$$V_{ay} = V_e \cdot \cos 60^\circ = 15,7 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2} = 18,81 \text{ см/с}.$$

4. Определим абсолютное ускорение точки М.

Ускорение точки в относительном движении, при естественном способе задания этого движения, равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t.$$

Касательное ускорение в относительном движении

$$a_r^t = \frac{dV_r}{dt} = 12p = 37,68 \text{ см/с}^2.$$

Вектор касательного ускорения совпадает с вектором относительной скорости.

Нормальное ускорение в относительном движении равно

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{37,68^2}{18} = 78,88 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу к центру полуокружности, описываемой точкой М в относительном движении.

Учитывая, что переносное движение – поступательное, имеем, что ускорение точки М в переносном движении равно ускорению точки D кривошипа: $\vec{a}_e = \vec{a}_D = \vec{a}_D^n + \vec{a}_D^t$.

Величина касательного ускорения точки в переносном движении

$$a_e^t = a_D^t = e_{O_1D} \cdot O_1D,$$

где e_{O_1D} – угловое ускорение кривошипа O_1D .

$$e_{O_1D} = \frac{d}{dt} \omega_{O_1D} = \frac{2pt}{2} = pt, \text{ при } t=1 \text{ с, } e_{O_1D} = p = 3,14 \text{ с}^{-2}.$$

Тогда $a_e^t = a_D^t = 3,14 \cdot 20 = 62,8 \text{ см/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_e^t$, как и вектор $\vec{a}_D^t$, направлен перпендикулярно кривошипу O_1D в сторону углового ускорения и совпадает с вектором $\vec{V}_e$.

Нормальное ускорение точки М в переносном движении

$$a_e^n = a_D^n = \omega_{O_1D}^2 \cdot O_1D = 49,3 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{r}_D^n$ направлен от точки D к точке O_1 , а вектор $\vec{a}_e^n$ имеет одинаковое с ним направление (рис. 10.4, б).

Так как переносное движение в данном случае поступательное, то ускорение Кориолиса равно нулю, т. е. $\vec{a}_k = 0$.

Абсолютное ускорение точки M определится равенством

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n.$$

Модуль абсолютного ускорения найдем методом проекций. Спроектировав это векторное равенство на оси x и y, получим

$$a_{ax} = a_r^t - a_e^t \cos 30^\circ - a_e^n \cos 60^\circ = 37,68 - 62,8 \cdot 0,87 - 49,3 \cdot 0,5 = -41,61 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{ay} = a_r^n + a_e^t \cos 60^\circ - a_e^n \cos 30^\circ = 78,88 + 62,8 \cdot 0,5 - 49,3 \cdot 0,87 = 67,39 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Тогда } a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 79,2 \text{ см/с}^2.$$

Пример 10.2:

Диск радиусом $R=20$ см вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O, согласно уравнению $j = \frac{p}{2}(2t^3 - t^2)$. По ободу диска от точки A движется точка M согласно уравнению $AM = 10pt^2$ см. Для момента времени $t=1$ с определить величину абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M (рис. 10.5).

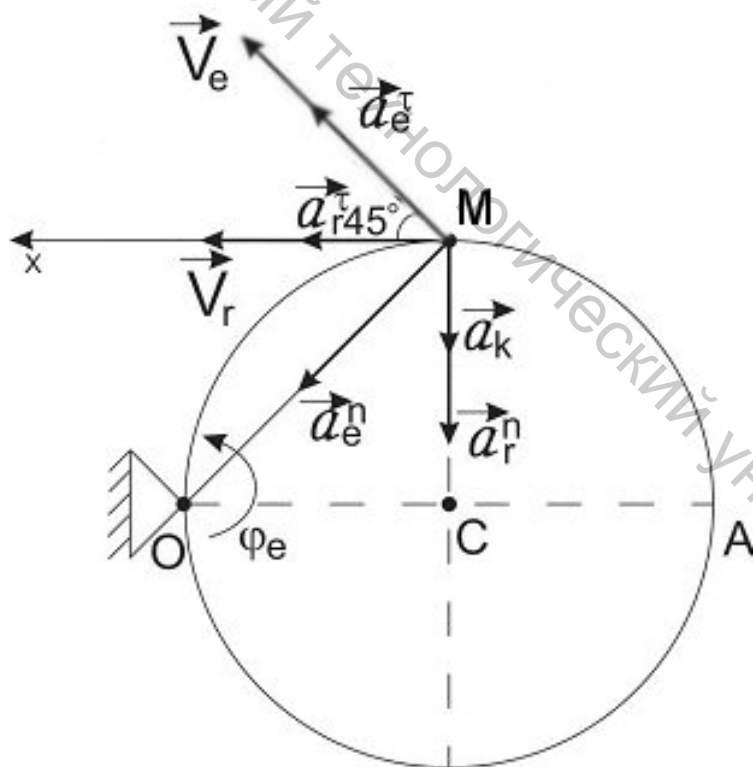


Рис. 10.5

Решение:

Убедимся, что точка M совершает сложное движение. Действительно, точка M движется по ободу диска и вместе с диском вращается вокруг оси O.

Движение точки М по ободу диска по заданному закону $S_r = AM = 10pt^2$ будет относительным, вращение диска вокруг оси О – переносным.

Установим положение точки М на относительной траектории в данный момент времени, определив для этого значение центрального угла $\angle ACM = a$.

$$a = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{10p}{20} = \frac{p}{2}, \text{ т. е. } \angle ACM = 90^\circ.$$

Положение точки М в данный момент времени указано на рисунке.

Абсолютная скорость точки М определяется геометрической суммой относительной и переносной скоростей

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_r + \dot{\mathbf{V}}_e.$$

Относительное движение точки является криволинейным. Поэтому вектор $\dot{\mathbf{V}}_r$ относительной скорости направлен по касательной к ободу диска в точке М. Значение относительной скорости

$$V_r = \frac{dS}{dt} = 20pt, \text{ при } t=1 \text{ с } V_r = 20p \text{ см/с.}$$

Переносное движение, т. е. движение диска, является вращательным. Поэтому вектор $\dot{\mathbf{V}}_e$ переносной скорости, т. е. скорости той точки диска, с которой в данный момент совпала точка М, будет направлен перпендикулярно отрезку ОМ в сторону вращения диска. По модулю

$$V_e = |w_e|OM, \text{ где } w_e = \frac{dj_e}{dt} = \frac{p}{2}(6t^2 - 2t).$$

При $t=1$ с $w_e = 2p \text{ с}^{-1}$. Значение $OM = R\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ см}$.

Тогда $V_e = 2p \cdot 20\sqrt{2} = 40p\sqrt{2} \text{ см/с}$.

Модуль абсолютной скорости определяем по формуле

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos 45^\circ} = \sqrt{(20p)^2 + (40p\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 20p \cdot 40p\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 226,71 \text{ см/с}.$$

Для определения абсолютного ускорения точки М используем формулу абсолютного ускорения точки в развернутом виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_k.$$

Относительное нормальное ускорение равно

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = \frac{V_r^2}{R} = 20p^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к его центру С.

Относительное касательное ускорение

$$a_r^t = \frac{dV_r}{dt} = 20p \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{a}_r^t$ совпадает с направлением вектора относительной скорости. Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n = w_e^2 OM = 4p^2 \cdot 20\sqrt{2} = 80p^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{a}_e^n$ направлен вдоль ОМ к оси вращения О. Переносное касательное ускорение $a_e^t = e_e \cdot OM$, где угловое ускорение $e_e = \frac{dw_e}{dt} = \frac{p}{2}(12t - 2)$, при $t=1$ с $e_e = 5p \text{ с}^{-2}$.

Тогда $a_e^t = 5p \cdot 20\sqrt{2} = 100p\sqrt{2} \text{ см/с}^2$.

Так как угловая скорость w_e и угловое ускорение e_e одинаковы по знаку, то вектор $\dot{\mathbf{a}}_e^t$ совпадает с направлением вектора $\dot{\mathbf{V}}_e$ переносной скорости.

Ускорение Кориолиса определим по формуле

$$\dot{\mathbf{a}}_k = 2(\dot{\mathbf{w}}_e \times \dot{\mathbf{V}}_r).$$

Так как вектор $\dot{\mathbf{V}}_r$ относительной скорости лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то для определения направления кориолисова ускорения достаточно вектор $\dot{\mathbf{V}}_r$ относительной скорости повернуть в сторону вращения на 90° в плоскости диска. По модулю кориолисово ускорение равно

$$a_k = 2|w_e||V_r|\sin(\dot{\mathbf{w}}_e, \dot{\mathbf{V}}_r) = 2|w_e||V_r|\sin 90^\circ, \text{ или } a_k = 2 \cdot 2p \cdot 20p = 80p^2 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения найдем методом проекций:

$$a_x = a_r^t + a_e^n \cos 45^\circ + a_e^t \cos 45^\circ = 120p + 80p^2 = 1166,4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r^n + a_k + a_e^n \cos 45^\circ - a_e^t \cos 45^\circ = 160p^2 - 100p = 1255,2 \text{ см/с}^2.$$

Окончательно, модуль абсолютного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

Пример 10.3:

Обруч радиуса $R=0,5 \text{ м}$, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости, приводит в движение кольцо M , надетое на обруч и неподвижный стержень AB . Стержень AB параллелен линии наибольшего ската наклонной плоскости. Определить абсолютные скорость и ускорение кольца M для положения механизма, показанного на рисунке, если $V_c = 2 \text{ м/с}$, $a_c = 2 \text{ м/с}^2$, $l=0,75 \text{ м}$ (рис. 10.6).

Решение:

Сложное движение кольца M разложим на составляющие: относительное—движение кольца M по обручу и переносное—движение кольца M вместе с обручем по отношению к неподвижной наклонной плоскости. В данной задаче абсолютным движением является движение кольца по неподвижному стержню AB . Следовательно, вектора абсолютной скорости и абсолютного ускорения кольца будут направлены вдоль стержня AB .

Абсолютная скорость кольца M будет определена геометрической суммой относительной и переносной скоростей:

$$\dot{\mathbf{V}}_M = \dot{\mathbf{V}}_e + \dot{\mathbf{V}}_r$$

Вектор относительной скорости $\dot{\mathbf{V}}_r$ направлен по касательной к обручу (рис. 10.6).

Переносное движение, т. е. движение обруча, является плоскопараллельным. Для определения переносной скорости $\dot{\mathbf{V}}_e$ необходимо найти скорость той точки обруча, с которой в данный момент времени совпадает кольцо M . Точка P —мгновенный центр скоростей обруча, следовательно, вектор переносной скорости

будет перпендикулярен отрезку РМ в сторону поворота обруча вокруг мгновенного центра скоростей. Угловая скорость обруча:

$$\omega_e = \frac{V_c}{CP} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

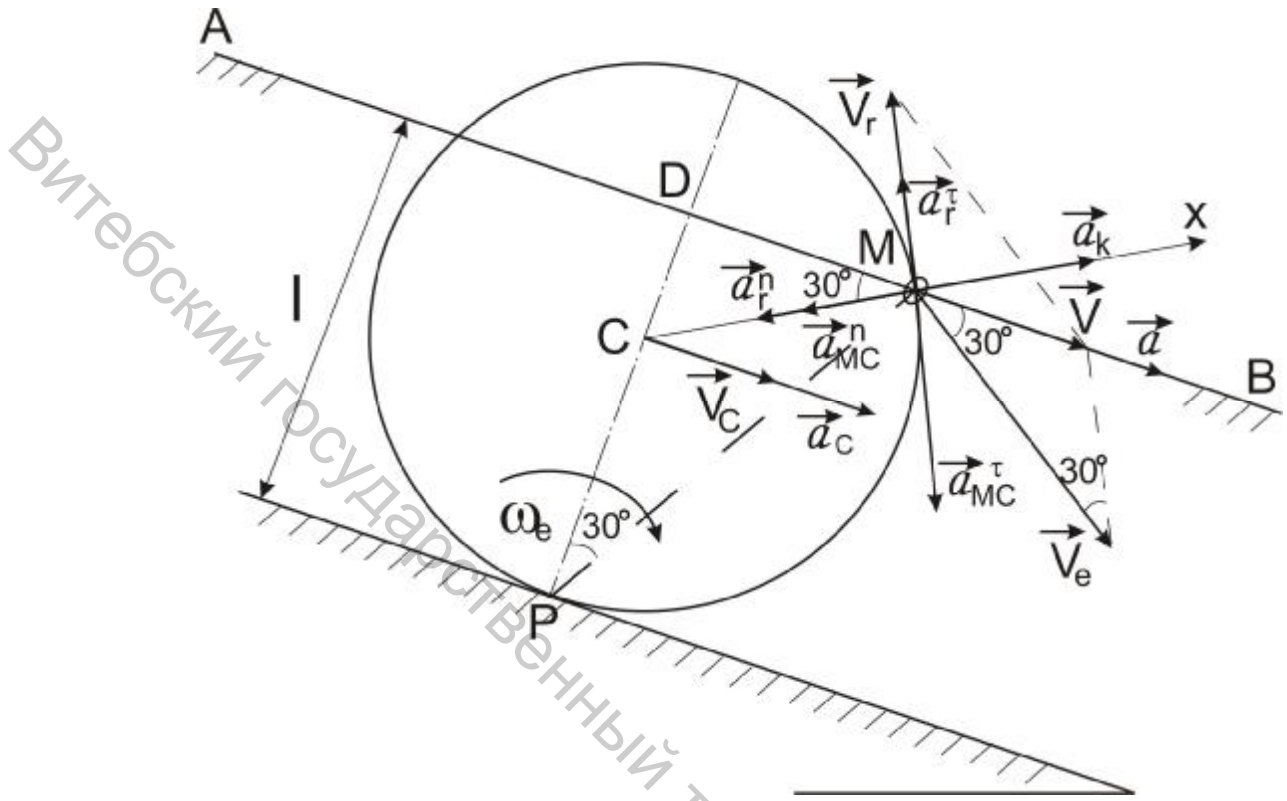


Рис. 10.6

Тогда численно переносная скорость $V_e = \omega_e \cdot PM$.

Определим значение РМ. Учитывая, что $CD=0,25$ м, а $CM=0,5$ м, получим, что $\angle CMD = 30^\circ$. Тогда $DM = CM \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ м. Из прямоугольного треугольника РDM получим

$$PM = \sqrt{PD^2 + DM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ м.}$$

Из этого же треугольника получаем, что $\angle CPM = 30^\circ$. Получим значение переносной скорости:

$$V_e = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ м/с.}$$

Построим параллелограмм скоростей, из которого видно, что $V_r = V = \frac{V_e}{2 \cos 30^\circ} = 2 \text{ м/с}$. Следовательно, абсолютная скорость кольца М $V_M = 2 \text{ м/с}$.

Перейдем к определению абсолютного ускорения кольца М. Абсолютное ускорение кольца М равно: $\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$. Так как относительным движением кольца М является движение по обручу, то относительное ускорение $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t$.

Переносное ускорение кольца М будет равно ускорению той точки обруча в плоскопараллельном движении, с которой в данный момент совпадает кольцо М. Приняв центр обруча за полюс, получим, что переносное ускорение будет определено векторной суммой

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{MC}^n + \mathbf{a}_{MC}^t.$$

Направление ускорения Кориолиса определим следующим образом: так как вектор относительной скорости $\dot{V}_r$ перпендикулярен оси переносного вращения, проходящей через МЦС, то достаточно повернуть вектор $\dot{V}_r$ на 90° в сторону вращения обруча.

Окончательно получим, что абсолютное ускорение кольца определится следующим векторным равенством

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{MC}^n + \mathbf{a}_{MC}^t + \mathbf{a}_k.$$

Для определения абсолютного ускорения кольца М спроектируем это равенство на ось х, проходящую через радиус СМ обруча

$$a \cos 30^\circ = -a_r^n + a_C \cos 30^\circ - a_{MC}^n + a_k.$$

Численное значение нормального ускорения кольца в относительном движении

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение кольца М при вращении обруча вокруг полюса С равно $a_{MC}^n = \omega_e^2 MC = 16 \cdot 0,5 = 8 \text{ м/с}^2$.

Численно ускорение Кориолиса $a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 16 \text{ м/с}^2$.

Окончательно получим: $a \frac{\sqrt{3}}{2} = -8 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 + 16$, т.е. абсолютное ускорение кольца М $a = 2 \text{ м/с}^2$.

Глава XI

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

11.1. Кинематические уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

Движение твердого тела, при котором одна точка тела все время остается неподвижной, называется вращательным движением тела вокруг неподвижной точки или сферическим движением.

Твердое тело с одной закрепленной точкой имеет три степени свободы. Три параметра, определяющие положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, называются углами Эйлера.

Свяжем жестко с телом подвижную систему $Ox_1y_1z_1$, выбрав начало координат в неподвижной точке O . Линия ON пересечения неподвижной плоскости xOy и подвижной плоскости x_1Oy_1 называется линией узлов.

Угол прецессии $\gamma = \angle xON$ отсчитывается от оси Ox к линии узлов ON так, чтобы поворот вокруг оси z происходил против хода часовой стрелки. Угол прецессии γ лежит в неподвижной плоскости xOy .

Угол собственного вращения $j = \angle NOx_1$ отсчитывается от линии узлов ON к оси x_1 так, чтобы поворот вокруг оси z_1 происходил против хода часовой стрелки. Этот угол расположен в подвижной плоскости x_1Oy_1 .

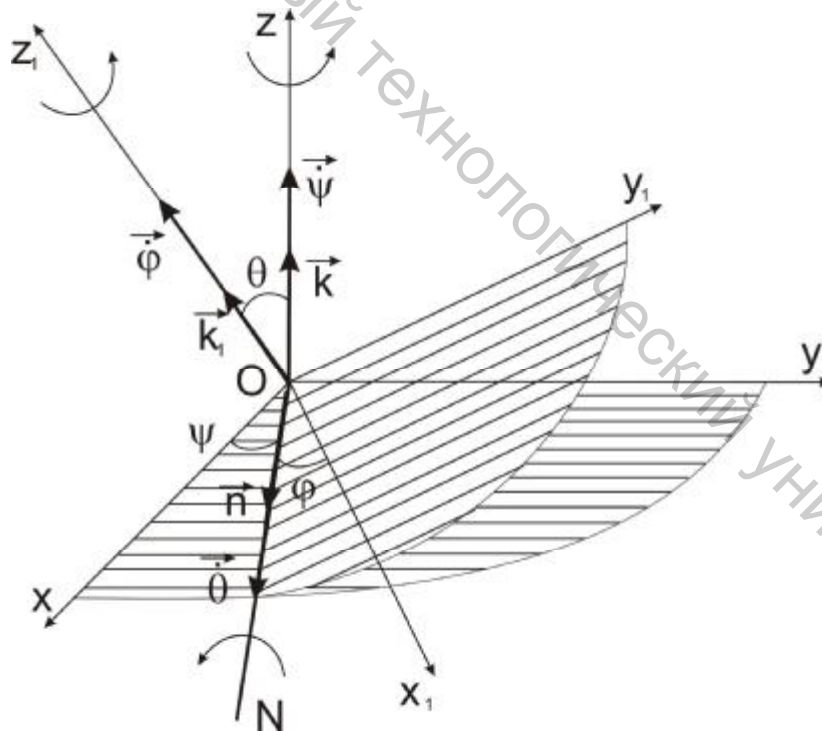


Рис. 11.1

Угол нутации $q = \angle zOz_1$ отсчитывается от оси z к оси z_1 так, чтобы соответствующий поворот вокруг линии узлов происходил против хода часовой стрелки.

Кинематические уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки имеют вид:

$$y = y(t), \quad j = j(t), \quad q = q(t). \quad (11.1)$$

Уравнения (11.1) определяют закон движения твердого тела с неподвижной точкой.

11.2. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при вращении вокруг неподвижной точки

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как результат сложения мгновенных вращений тела вокруг пересекающихся осей Oz , Oz_1 и ON . Результирующее вращение происходит вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O , с мгновенной угловой скоростью $\dot{\mathbf{w}}$, равной векторной сумме составляющих угловых скоростей (рис. 11.1), т. е.

$$\dot{\mathbf{w}} = y\dot{\mathbf{k}} + j\dot{\mathbf{k}}_1 + q\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{w}}_1 + \dot{\mathbf{w}}_2 + \dot{\mathbf{w}}_3, \quad (11.2)$$

где $y\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{w}}_1$, $j\dot{\mathbf{k}}_1 = \dot{\mathbf{w}}_2$, $q\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{w}}_3$.

Прямая, по которой направлен вектор мгновенной угловой скорости, называется мгновенной осью. Скорости всех точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси, в данный момент равны нулю.

Если угол нутации постоянный, то $w_3 = q\dot{\mathbf{n}} = 0$. В этом случае

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_1 + \dot{\mathbf{w}}_2 = \dot{\mathbf{w}}_e + \dot{\mathbf{w}}_r, \quad (11.3)$$

т. е. движение твердого тела можно рассматривать как совокупность переносного и относительного мгновенных вращений вокруг осей Oz и Oz_1 . Если переносное и относительное мгновенные вращения являются равномерными, то движение твердого тела с неподвижной точкой называется регулярной прецессией.

Проекции угловой скорости на неподвижные и подвижные оси координат вычисляются по известным углам Эйлера с помощью формул

$$\dot{\mathbf{w}} = y\dot{\mathbf{k}} + j\dot{\mathbf{k}}_1 + q\dot{\mathbf{n}}, \quad (11.4)$$

где $\dot{\mathbf{k}}$, $\dot{\mathbf{k}}_1$, $\dot{\mathbf{n}}$ — орты осей z и z_1 и линии узлов ON :

$$\begin{aligned} w_x &= j\dot{\mathbf{k}} \sin y \sin q + q\dot{\mathbf{k}} \cos y, \\ w_y &= -j\dot{\mathbf{k}} \cos y \sin q + q\dot{\mathbf{k}} \sin j, \\ w_z &= j\dot{\mathbf{k}} \cos q + y\dot{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где w_x , w_y , w_z — проекции угловой скорости на неподвижные оси координат.

$$\begin{aligned} w_{x_1} &= y\dot{\mathbf{k}} \sin q \sin j + q\dot{\mathbf{k}} \cos j, \\ w_{y_1} &= y\dot{\mathbf{k}} \sin q \cos j - q\dot{\mathbf{k}} \sin j, \\ w_{z_1} &= y\dot{\mathbf{k}} \cos q + j\dot{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где w_{x_1} , w_{y_1} , w_{z_1} — проекции угловой скорости на подвижные оси координат.

Модуль мгновенной угловой скорости

$$w = \sqrt{y\dot{\mathbf{k}}^2 + j\dot{\mathbf{k}}^2 + q\dot{\mathbf{k}}^2 + 2y\dot{\mathbf{k}}j\dot{\mathbf{k}} \cos q}. \quad (11.7)$$

Геометрическое место мгновенных осей, отмеченное в неподвижном пространстве, называется неподвижным аксоидом. Уравнение неподвижного аксоида

$$\frac{x}{w_x} = \frac{y}{w_y} = \frac{z}{w_z}. \quad (11.8)$$

Подвижным аксоидом называется геометрическое место мгновенных осей в движущемся теле. Уравнение подвижного аксоида

$$\frac{x_1}{w_{x_1}} = \frac{y_1}{w_{y_1}} = \frac{z_1}{w_{z_1}}. \quad (11.9)$$

Угловое ускорение $\dot{\vec{e}}$ равно первой производной по времени от угловой скорости: $\dot{\vec{e}} = \frac{d\vec{w}}{dt}$. (11.10)

Производная от переменного вектора по скалярному аргументу представляет собой вектор, направленный по касательной к дифференцируемому вектору (рис. 11.2, а, б).

В случае регулярной прецессии (рис. 11.2, в) годографом будет окружность радиуса $r = OA \sin \alpha = w \sin \alpha$. Вектор $\vec{OA} = \vec{r}$ является радиусом-вектором точки А, т. е. конца вектора $\vec{w}$. Поэтому

$$\dot{\vec{e}} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{V}_A, \text{ или } \vec{V}_A = \vec{w}_e \times \vec{OA} = \vec{w}_e \times \vec{r}.$$

$$\text{Таким образом } \dot{\vec{e}} = \vec{w}_e \times \vec{r} = \vec{w}_e \times \vec{w}_r. \quad (11.11)$$

$$\text{Модуль углового ускорения } e = w_e w \sin(\vec{w}_e, \vec{w}) = w_e w_r \sin(\vec{w}_e, \vec{w}_r). \quad (11.12)$$

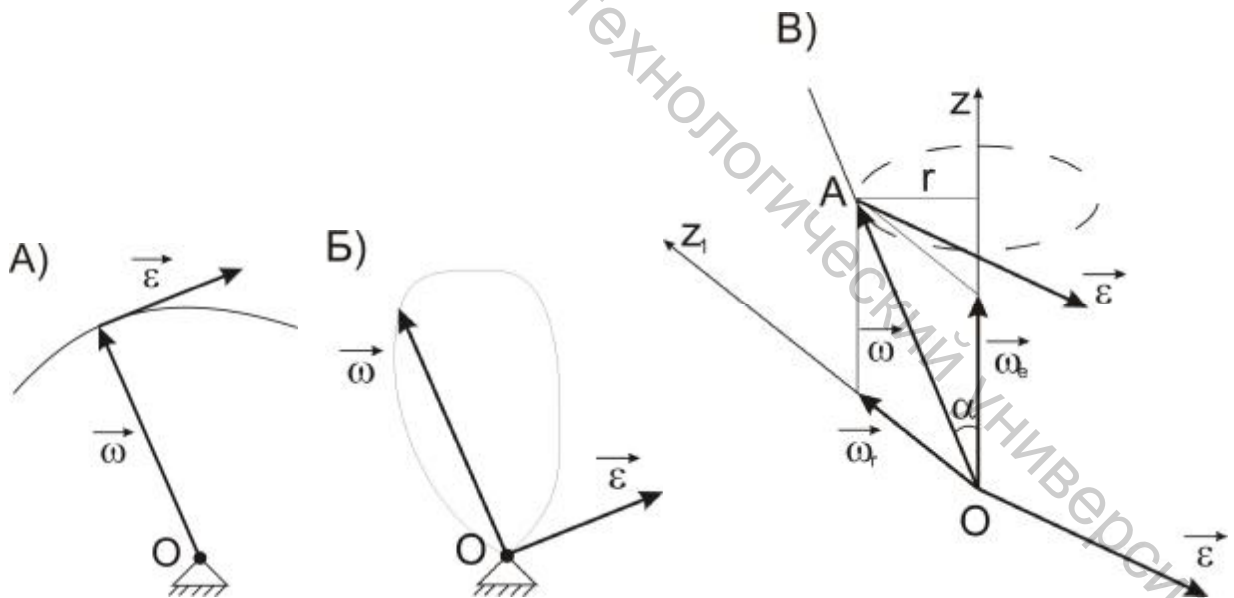


Рис. 11.2

Если известны проекции вектора $\vec{w}$ на неподвижные оси координат, то можно найти проекции вектора $\dot{\vec{e}}$:

$$e_x = \frac{dw_x}{dt}, e_y = \frac{dw_y}{dt}, e_z = \frac{dw_z}{dt}. \quad (11.13)$$

Проекции углового ускорения на подвижные оси:

$$e_{x_1} = \frac{dw_{x_1}}{dt}, e_{y_1} = \frac{dw_{y_1}}{dt}, e_{z_1} = \frac{dw_{z_1}}{dt}. \quad (11.14)$$

11.3. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Так как движение тела с неподвижной точкой можно рассматривать в каждый момент как вращательное вокруг мгновенной оси, то скорость любой точки тела можно определить по формуле Эйлера:

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}, \quad (11.15)$$

где $\dot{\mathbf{V}}$ – скорость точки, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, проведенный из неподвижного центра, $\dot{\mathbf{w}}$ – угловая скорость твердого тела (рис. 11.3). Модуль скорости точки тела в данный момент определяется равенством

$$V = wR, \quad (11.16)$$

где R – кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси.

Проекции скорости на неподвижные оси координат определяются формулами

$$V_x = w_y z - w_z y, V_y = w_z x - w_x z, V_z = w_x y - w_y x, \quad (11.17)$$

где x, y, z – координаты точки, w_x, w_y, w_z – проекции угловой скорости на неподвижные оси x, y, z .

Проекции скорости на подвижные оси x_1, y_1, z_1 равны

$$V_{x_1} = w_{y_1} z_1 - w_{z_1} y_1, V_{y_1} = w_{z_1} x_1 - w_{x_1} z_1, V_{z_1} = w_{x_1} y_1 - w_{y_1} x_1. \quad (11.18)$$

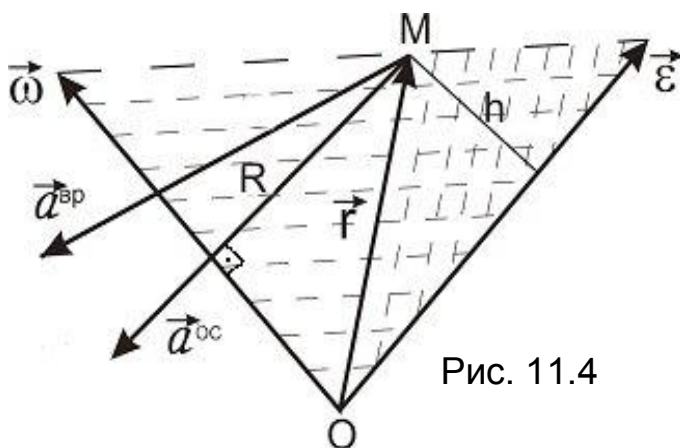


Рис. 11.4

Ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, равно векторной сумме вращательного и осестремительного ускорений (теорема Ривальса):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{oc} + \mathbf{a}^{ep}, \quad (11.19)$$

где $\mathbf{a}^{oc} = \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{V} = \dot{\mathbf{w}} \times (\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r})$,
 $\mathbf{a}^{ep} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$.

Модуль осестремительного ускорения

$$a^{oc} = w^2 R, \quad (11.20)$$

где R – кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси. Это ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на мгновенную ось (рис. 11.4).

Модуль вращательного ускорения

$$a^{ep} = eh, \quad (11.21)$$

где h —кратчайшее расстояние от точки до оси вектора углового ускорения (рис. 11.4). Направление вращательного ускорения определяется по правилу векторного произведения.

Осестремительное и вращательное ускорения, вообще говоря, не взаимно перпендикулярны.

Модуль ускорения точки можно определить по формуле

$$a = \sqrt{(a^{oc})^2 + (a^{ep})^2 + 2a^{oc}a^{ep}\cos(\vec{a}^{oc}, \vec{a}^{ep})}. \quad (11.22)$$

Пример 11.1:

Конус А обегает 120 раз в минуту неподвижный конус В. Высота конуса $OO_1=10$ см. Определить переносную угловую скорость ω_e конуса вокруг оси z , относительную угловую скорость конуса вокруг оси OO_1 , абсолютное угловое ускорение конуса, скорости и ускорения точек С и D подвижного конуса (рис. 11.5).

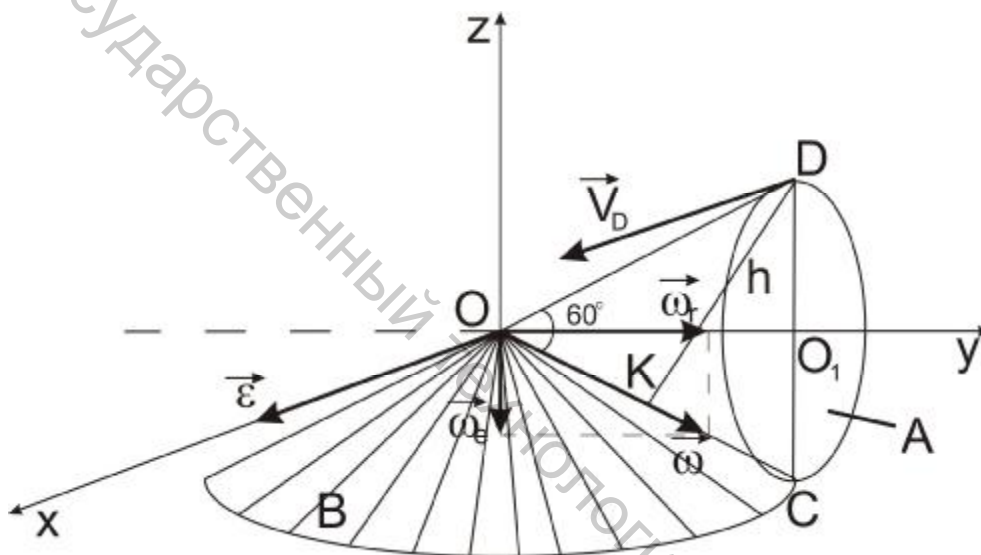


Рис. 11.5

Решение:

1. Определение угловых скоростей.

Мгновенная ось подвижного конуса А совпадает с образующей ОС, по которой конус соприкасается с неподвижной поверхностью конуса В. Переносную угловую скорость можно определить по формуле

$$\omega_e = \frac{pn}{30}, \text{ где } n=120 \text{ об/мин.}$$

Тогда $\omega_e = 4\pi \text{ с}^{-1}$. Составляющие вращения конуса происходят в разных направлениях: относительное—вокруг оси OO_1 против часовой стрелки, переносное—вокруг оси z по часовой стрелке. Вектор абсолютной угловой скорости направлен по оси ОС. Исходя из векторного равенства (11.3) можно построить параллелограмм (рис. 11.5).

Получим, что абсолютная угловая скорость $w_a = \frac{w_e}{\sin 30^\circ} = 8p \text{ с}^{-1}$.

Относительная угловая скорость $w_r = w_a \cos 30^\circ = 4p\sqrt{3} \text{ с}^{-1}$.

2. Определение углового ускорения конуса.

Угловое ускорение конуса определим по формуле (11.11)

$$\dot{\vec{e}} = \vec{w}_e \times \vec{w}_r.$$

Вектор $\dot{\vec{e}}$ углового ускорения конуса А в данном случае совпадает с положительным направлением оси х. Численно

$$e = w_e w_r \sin \frac{P}{2} = 16\sqrt{3}p^2 \text{ рад/с}^2.$$

3. Определение скоростей и ускорений точек С и D конуса.

Скорость точки С, лежащей на мгновенной оси вращения, равна нулю:

$$V_C = 0.$$

Скорость точки D определим как вращательную вокруг мгновенной оси:

$$V_D = w DK = 80p \text{ см/с, т. к. } DK = OO_1 = 10 \text{ см.}$$

Вектор $\dot{V}_D$ скорости точки D перпендикулярен плоскости уOz и параллелен оси х.

Ускорение точки С определим по формуле

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{oc} + \vec{a}_C^{ep}.$$

Так как точка С лежит на мгновенной оси вращения, то осеостремительное ускорение точки С равно нулю. Вращательное ускорение точки С $a_C^{ep} = e \cdot OC$, где ОС—кратчайшее расстояние от точки С до

вектора углового ускорения,

$$\text{при этом } OC = \frac{OO_1}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ см.}$$

$$\text{Тогда } a_C^{ep} = 16\sqrt{3}p^2 \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} = 320 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_C^{ep}$ перпендикулярен плоскости векторов $\dot{\vec{e}}$ и $\vec{OC}$ и направлен так, как указано на рис. 11.6. Этот вектор определяет ускорение точки С.

Ускорение точки D $\vec{a}_D = \vec{a}_D^{oc} + \vec{a}_D^{ep}$.

Осеостремительное ускорение точки D численно равно $a_D^{oc} = w^2 DK$.

Учитывая, что $DK = OO_1 = 10 \text{ см}$, получим $a_D^{oc} = (8p)^2 10 = 640p^2 \text{ см/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_D^{oc}$ осеостремительного ускорения направлен по перпендикуляру DK, опущенному из точки D на мгновенную ось.

Вращательное ускорение a_D^{ep} численно равно: $a_D^{ep} = e \cdot OD$, где OD— кратчайшее расстояние от точки D до вектора углового ускорения, $OD = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ см}$. Тогда

$$a_D^{ep} = 16\sqrt{3}p^2 \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} = 320p^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_D^{ep}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{e}$ и $\vec{OD}$, и направлен так, как показано на (рис.11.6).

Определим ускорение точки D как длину диагонали параллелограмма:

$$a_D = \sqrt{(a_D^{oc})^2 + (a_D^{ep})^2 + 2a_D^{oc}a_D^{ep}\cos 120^\circ} = 554,26 \text{ p}^2 \text{ см/с}^2.$$

Пример 11.2:

Диск ОА радиуса $R = 4\sqrt{3}$ см, вращаясь вокруг неподвижной точки О, обкатывает неподвижный конус с углом при вершине, равным 60° . Найти угловую скорость вращения диска вокруг его оси симметрии, если ускорение a_A точки А диска по модулю постоянно и равно 48 см/с^2 (рис. 5.7).

Решение:

Будем считать относительное вращение диска происходящим против хода часовой стрелки. Тогда вектор $\vec{w}_r$ искомой угловой скорости будет лежать на оси симметрии диска. Переносное вращение диска будет происходить по ходу часовой стрелки вокруг оси z и вектор $\vec{w}_e$ угловой скорости переносного вращения будет направлен по вертикали вниз. Мгновенная ось диска совпадает с образующей конуса, по которой диск соприкасается с неподвижной поверхностью конуса. Вектор абсолютной угловой скорости направлен по оси ОВ.

Заданное ускорение точки А можно представить векторным равенством

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{oc} + \vec{a}_A^{ep}$$

Так как точка А принадлежит мгновенной оси вращения, то $a_A^{oc} = 0$. Получим, что $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ep}$, или численно $a_A^{ep} = 48 \text{ см/с}^2$.

Вращательное ускорение точки С $a_A^{ep} = e \cdot OA$, где e –угловое ускорение конуса, $OA=R$ –кратчайшее расстояние от точки А до вектора углового ускорения.

Угловое ускорение конуса определим по формуле

$$\vec{e} = \vec{w}_e \times \vec{w}_r.$$

Вектор $\vec{e}$ углового ускорения диска в данном случае совпадает с положительным направлением оси x. Из параллелограмма угловых скоростей получим: $w_e = \frac{w_r}{\sin 30^\circ} = 2w_r$. Тогда значение углового ускорения будет равно

$$e = w_e w_r \sin 120^\circ = w_r^2 \sqrt{3}.$$

Зная численное значение вращательного ускорения точки А и угловое ускорение диска, получим $48 = w_r^2 \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$, откуда искомая относительная угловая скорость будет равна $4 = w_r^2$, $w_r = 2$.

Глава XII

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

12.1. Общие замечания

Пусть тело A совершает некоторое движение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Введем следующие определения: движение тела A относительно неподвижной системы координат называется абсолютным; относительным называется движение твердого тела относительно подвижной системы координат; переносным называется движение подвижной системы координат относительно неподвижной.

В этом случае твердое тело совершает составное или сложное движение. Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений.

Будем рассматривать составные движения твердого тела, которые складываются из двух вращательных движений вокруг пересекающихся или параллельных осей. Особое практическое значение имеют те задачи, в которых рассматриваются планетарные и дифференциальные зубчатые механизмы.

Планетарной зубчатой передачей называется передача, у которой одно колесо неподвижно, а остальные колеса приводятся в движение кривошипом, ось вращения которого совпадает с осью неподвижного колеса. Оси остальных колес находятся на кривошипе. Колеса планетарного механизма с неподвижными осями называются солнечными или центральными, а с подвижными – планетарными или сателлитами. Звено, несущее оси сателлитов, называется водилом.

Зубчатый механизм с подвижными осями, число степеней свободы которого больше единицы, называется дифференциальным. В простейшем случае дифференциальный механизм имеет две степени свободы, т. е. два звена механизма могут обладать независимыми друг от друга движениями. Введем понятие передаточного отношения. Передаточным отношением i_{lm} между звеньями l и m механизма передачи вращательного движения называется отношение угловой скорости w_l звена l к угловой скорости w_m звена m :

$$i_{lm} = \frac{w_l}{w_m} . \quad (12.1)$$

Пусть имеется сложная передача, состоящая из n звеньев. Передаточное отношение сложной передачи равно произведению промежуточных передаточных отношений:

$$i_{1n} = \frac{w_1}{w_n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)n} . \quad (12.2)$$

Рассмотрим внешнее зацепление двух круглых цилиндрических колес с параллельными осями (рис. 12.1, а).

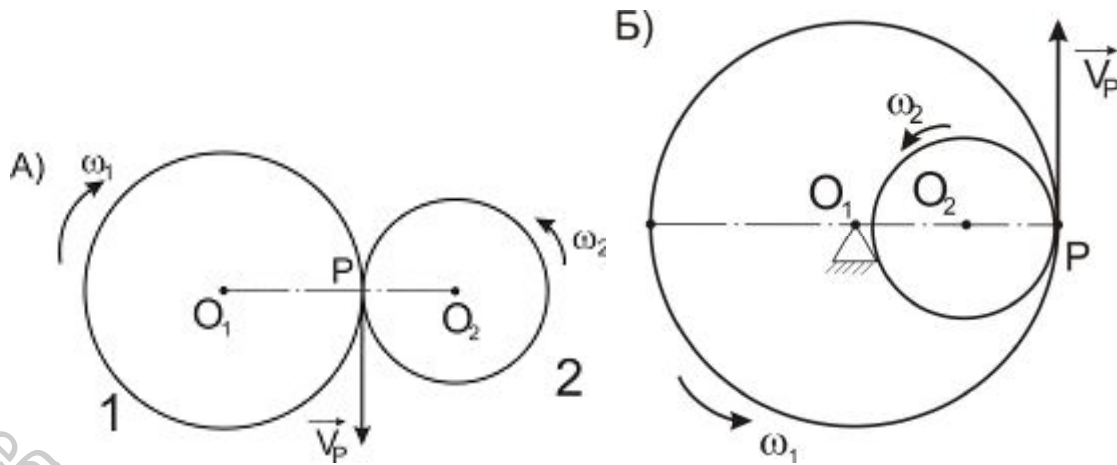


Рис. 12.1

Пусть R_1 и R_2 —радиусы начальных окружностей этих колес, а ω_1 и ω_2 —их угловые скорости. В данном случае направления вращения ведущего и ведомого колес противоположны. Так как соприкасающиеся в данный момент точки начальных окружностей, находящихся в зацеплении зубчатых колес, должны иметь общую скорость, то, обозначая величину этой скорости через V_p и полагая $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$, получим

$$V_p = \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2, \text{ или} \\ i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{z_2}{z_1} = \text{Const}, \quad (12.3)$$

где z_1 и z_2 —числа зубьев соответствующих колес. Шагом зацепления называется расстояние между двумя одноименными точками двух смежных зубьев, измеренные по начальной окружности. Отношение радиусов начальных окружностей, находящихся в зацеплении колес, можно заменить отношением чисел их зубьев, потому что шаг зацепления у этих колес должен быть одинаков и, следовательно, радиусы начальных окружностей этих колес прямо пропорциональны числам их зубьев. Знак минус в формуле (12.3) показывает, что при внешнем зацеплении ведущее и ведомое колеса вращаются в разные стороны, и, следовательно, их угловые скорости имеют разные знаки. В случае внутреннего зацепления двух круглых цилиндрических колес с параллельными осями (рис.12.1, б) оба колеса вращаются в одну и ту же сторону, поэтому

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (12.4)$$

В этом случае передаточное отношение равно обратному отношению радиусов начальных окружностей или чисел зубьев и всегда является положительным числом.

12.2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

При сложении вращений твердого тела, происходящих вокруг параллельных осей, могут встречаться три случая.

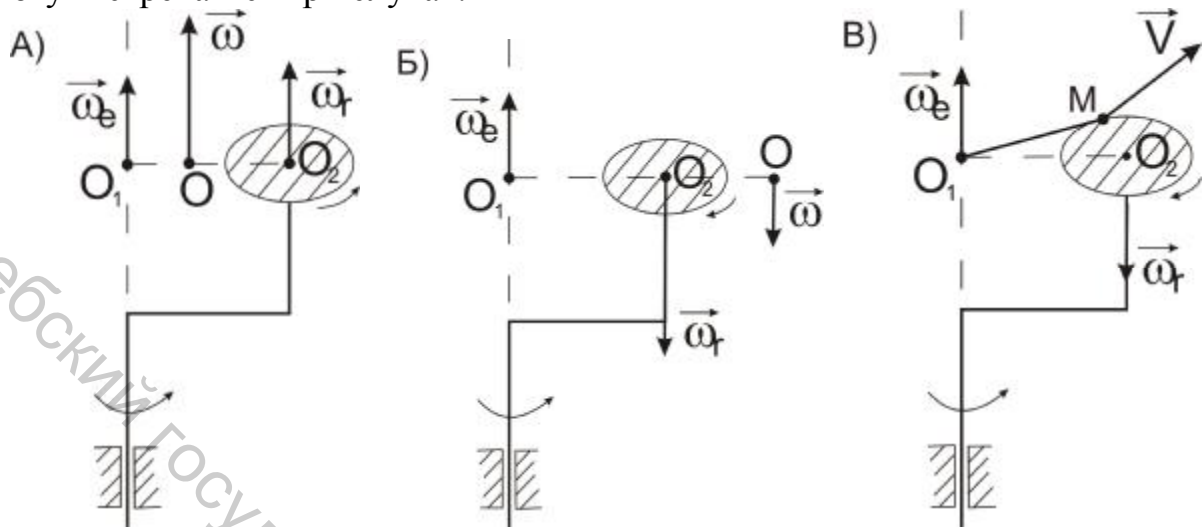


Рис. 12.2

1. Переносная w_e и относительная w_r угловые скорости одного направления (рис. 12.2, а).

В этом случае модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей составляющих угловых скоростей

$$w = w_e + w_r, \quad (12.5)$$

а вектор абсолютной угловой скорости направлен в ту же сторону, что и составляющие угловые скорости, и делит расстояние между осями составляющих вращений внутренним образом на части, обратно пропорциональные относительной и переносной угловым скоростям

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{w_r}{w_e}.$$

(12.6)

2. Если же векторы $\vec{w}_e$ и $\vec{w}_r$ направлены в противоположные стороны и не равны друг другу по модулю, то абсолютная угловая скорость направлена в сторону большего из них и по модулю равна разности их модулей

$$w = |w_r - w_e|.$$

(12.7)

При этом вектор абсолютной угловой скорости делит расстояние между осями составляющих вращений внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям переносной и относительной угловых скоростей

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{w_r}{w_e}. \quad (12.8)$$

3. Переносное и относительное вращения направлены в разные стороны, а модули их угловых скоростей равны (рис. 12.2, в).

Совокупность двух мгновенных вращений твердого тела вокруг параллельных осей с равными по величине, но противоположно направленными угловыми

скоростями, т. е. $\vec{w}_r = -\vec{w}_e$, называется парой вращений. В этом случае абсолютная угловая скорость равна нулю, а распределение абсолютных скоростей в теле такое же, как при поступательном движении, причем абсолютная скорость любой точки тела в данный момент равна вектору-моменту указанной пары:

$$\vec{V} = \vec{r}(\vec{w}_e, \vec{w}_r) ; \quad V = w_e \cdot O_1O_2 = w_r \cdot O_1O_2. \quad (12.9)$$

При решении задач на определение угловых скоростей планетарных и дифференциальных зубчатых передач обычно применяются формулы Виллиса, которые определяют зависимость между угловыми скоростями зубчатых колес дифференциальных и планетарных передач в случае внешнего и внутреннего зацеплений. В случае внешнего зацепления двух колес (рис. 12.3, а) зависимость между угловыми скоростями колес определяется формулой

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1} = -i_{12}, \quad (12.10)$$

где w — угловая скорость водила; R_1, R_2 — радиусы колес; z_1, z_2 — числа зубцов.

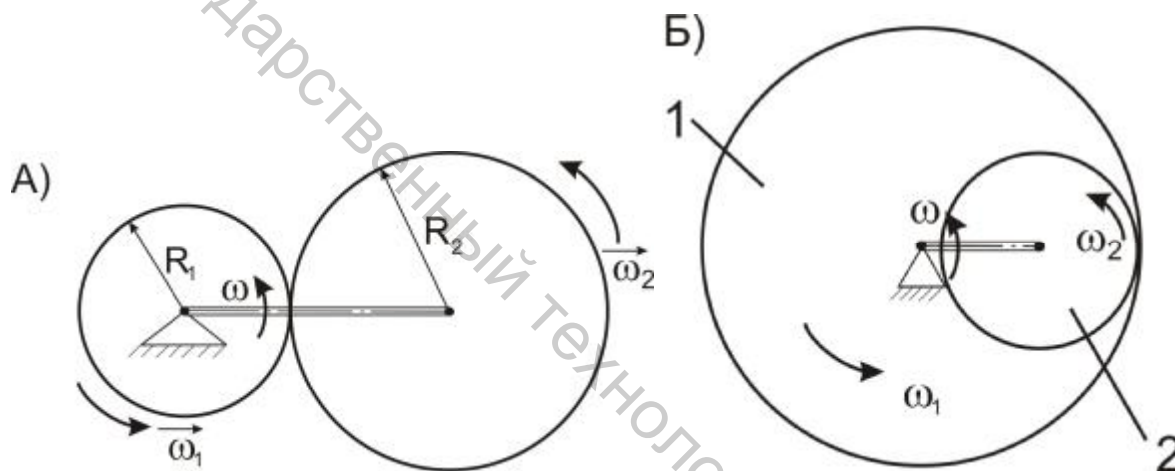


Рис. 12.3

В случае внутреннего зацепления двух колес (рис. 12.3, б) эта зависимость имеет вид:

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = i_{12}. \quad (6.11)$$

Пример 12.1:

В дифференциальном механизме ведущими звеньями являются колесо 1 и водило Н, несущее ось двойного сателлита 2–2'. Зная угловые скорости w_1 и w_H колеса 1 и водила Н, а также числа зубьев всех колес, найти угловую скорость колеса 3.

Решение:

1-й способ (метод Виллиса).

Применим формулу Виллиса к звеньям 1 и 3 (рис. 12.4, а). Получим

$$\frac{w_3 - w_H}{w_1 - w_H} = i_{31} \quad (12.12)$$

Передаточное отношение: $i_{31} = i_{32'} \cdot i_{21}$. При этом $i_{32'} = \frac{z_2'}{z_3}$ и это передаточное отношение положительно, так как колеса имеют внутреннее зацепление.

Передаточное отношение $i_{21} = -\frac{z_1}{z_2}$. Это передаточное отношение отрицательно, т. к. колеса 2 и 1 имеют внешнее зацепление. Таким образом

$$i_{31} = -\frac{z_2' \cdot z_1}{z_3 \cdot z_2} \text{ и выражение (12.12) примет вид: } \frac{w_3 - w_H}{w_1 - w_H} = -\frac{z_2' \cdot z_1}{z_3 \cdot z_2}.$$

Окончательно получим

$$w_3 = w_H - \frac{z_2' \cdot z_1}{z_3 \cdot z_2} (w_1 - w_H). \quad (12.13)$$

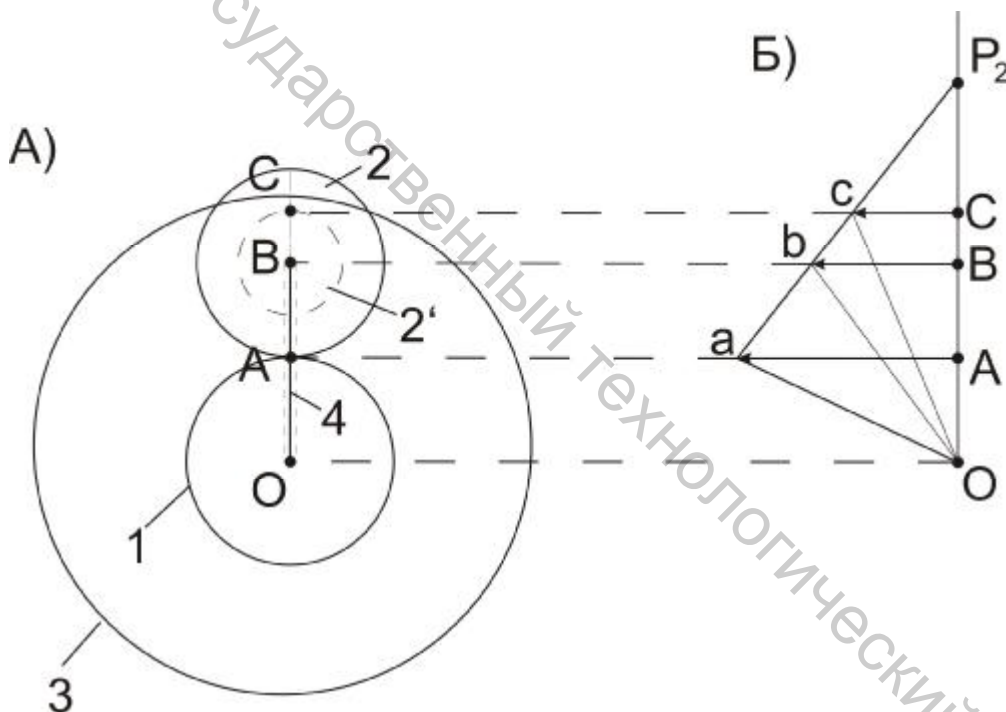


Рис. 12.4

2-й способ (метод мгновенных центров скоростей).

Так как звенья планетарного или дифференциального механизма совершают плоскопараллельное движение, то при анализе такого механизма можно применить теорию плоскопараллельного движения. В частности, воспользуемся методом мгновенных центров скоростей (рис. 12.4, б). Радиусы колес механизма обозначим через R_1, R_2, R_2', R_3 . Получим

$$V_A = R_1 w_1, \quad V_B = w_H (R_1 + R_2).$$

На рис. 12.4, б скорость точки А касания колес 1 и 2 изображена в виде вектора $\vec{Aa}$, а скорость точки В—в виде вектора $\vec{Bb}$. Зная скорости точек А и В, через концы a и b этих скоростей проводим прямую и в точке пересечения этой прямой с продолжением прямой АВ получаем точку P_2 , которая является мгновенным

центром скоростей сдвоенного колеса 2–2'. Скорость точки С касания колес 2' и 3 изобразится на рисунке вектором $\overrightarrow{CS}$. Зная скорость точки С колеса 3, можно найти угловую скорость этого колеса

$$w_3 = \frac{V_C}{R_3}.$$

Определим угловую скорость колеса 3, используя следующие уравнения

$$V_A = R_1 w_1 = w_2 (P_2 C + R_2 + R_2), \quad (12.14)$$

$$V_B = (R_1 + R_2) w_H = w_2 (P_2 C + R_2), \quad (12.15)$$

$$V_C = w_2 P_2 C. \quad (12.16)$$

где w_2 – угловая скорость колеса 2–2' вокруг мгновенного центра скоростей P_2 .

Вычитая из равенства (12.14) равенство (12.15), получим

$$R_1 w_1 - (R_1 + R_2) w_H = w_2 R_2, \text{ откуда } w_2 = \frac{1}{R_2} [R_1 w_1 - (R_1 + R_2) w_H]. \quad (12.17)$$

Разделив равенство (12.14) на равенство (12.15), имеем:

$$\frac{R_1 w_1}{(R_1 + R_2) w_H} = \frac{P_2 C + R_2 + R_2}{P_2 C + R_2}, \text{ откуда}$$

$$P_2 C = \frac{R_2 (R_1 + R_2) w_H}{R_1 w_1 - (R_1 + R_2) w_H} - R_2. \quad (12.18)$$

Подставляя выражения (12.17) и (12.18) в равенство (12.16), получим

$$V_C = w_2 P_2 C = (R_1 + R_2) w_H - \frac{R_2 R_1}{R_2} w_1 + \frac{R_2 R_1}{R_2} w_H + R_2 w_H = (R_1 + R_2 + R_2) w_H - \frac{R_1 R_2}{R_2} (w_1 - w_H).$$

Так как $R_3 = R_1 + R_2 + R_2$, то $V_C = R_3 w_H - \frac{R_1 R_2}{R_2} (w_1 - w_H).$

Отсюда $w_3 = \frac{V_C}{R_3} = w_H - \frac{R_1 R_2}{R_2 R_3} (w_1 - w_H).$

Заменив отношение радиусов отношением чисел зубьев, окончательно получим $w_3 = w_H - \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} (w_1 - w_H).$

Пример 12.2:

Линейка АВ эллипсографа приводится в движение кривошипом ОС, который вращается с угловой скоростью w_O вокруг оси О против хода часовой стрелки. Определить относительную угловую скорость линейки по отношению к кривошипу и ее абсолютную угловую скорость (рис. 12.5), если $OA = AC = BC = l$.

Решение:

Так как точки А и В движутся прямолинейно, то мгновенный центр скоростей линейки будет находиться в точке пересечения перпендикуляров к траектории этих точек. Разложим абсолютное вращение линейки вокруг точки Р на два составляющих вращения: переносное вращение вместе с кривошипом ОС вокруг оси О (P_e) с угловой скоростью $w_e = w_O$ и относительное вращение по отношению к кривошипу с угловой скоростью w_r . Центром этого вращения P_r является ось

шарнира С, так как точка С является общей для линейки и кривошипа. Так как точка Р лежит вне отрезка $P_e P_r$, то направление относительного вращения противоположно направлению переносного и модуль абсолютной угловой скорости равен разности модулей угловых скоростей w_e и w_r . При таком положении точки Р направление абсолютного вращения совпадает с направлением относительного вращения.

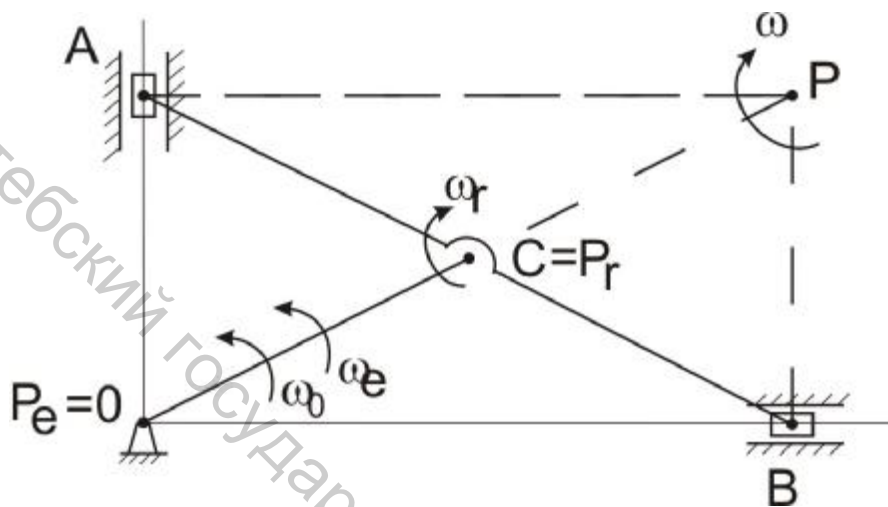


Рис. 12.5

Определим модули относительной и абсолютной угловых скоростей линейки из соотношения

$$\frac{w_r}{w_e} = \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{2OC}{OC} = 2, \text{ отсюда } w_r = 2w_e = 2w_o.$$

Тогда $w = w_r - w_e = 2w_o - w_o = w_o$.

12.3. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей

Если твердое тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, то одно из этих движений принимается за переносное вращение, а второе—за относительное.

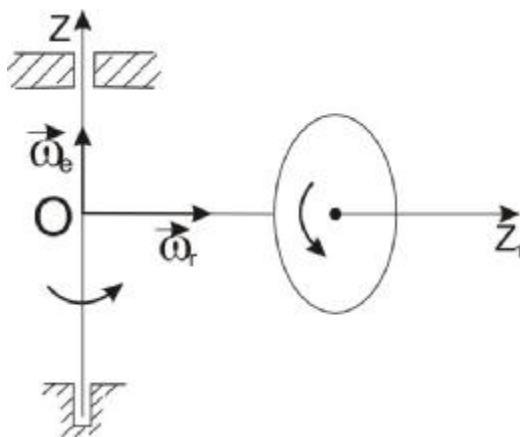


Рис. 12.6

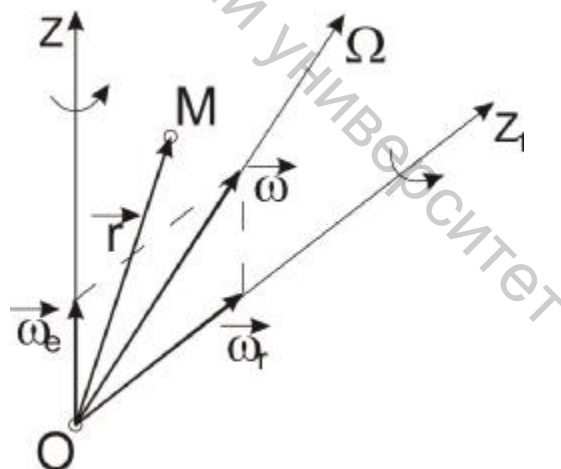


Рис. 12.7

Примером такого движения является совокупность вращения диска вокруг оси Oz_1 и его вращения вместе с осью Oz_1 вокруг оси Oz (рис. 12.6). Вращение диска вместе с осью Oz_1 вокруг оси Oz представляет собой переносное вращение, а его вращение вокруг оси Oz_1 – относительное.

Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенных вращениях вокруг пересекающихся осей z и z_1 (рис. 12.7). Тогда абсолютная угловая скорость определяется по формуле

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (12.19)$$

Таким образом, результирующее движение является вращением твердого тела вокруг неподвижной точки и для определения кинематических характеристик можно применять теорию, рассмотренную в соответствующей главе.

Рассмотрим другой способ определения скоростей и ускорений точек твердого тела.

Если вращение твердого тела вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ принять за относительное, а вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ – за переносное, то абсолютную скорость можно определить по формуле

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad (12.20)$$

где $\vec{V}$ – абсолютная скорость точки; $\vec{V}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ – переносная скорость; $\vec{V}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}$ – относительная скорость точки.

Для определения ускорений точек твердого тела можно применить теорему сложения ускорений (теорему Кориолиса)

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k, \quad (12.21)$$

где $\vec{a}$ – абсолютное ускорение точки; $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$, $\vec{a}_k$ – соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

Кориолисово ускорение определяется формулой:

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (12.22)$$

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбирается неподвижная система координат так, чтобы ее ось z совпала с переносной угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, и подвижная система координат так, чтобы ее ось z_1 совпала с относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_r$;
- 2) по известным переносной и относительной угловым скоростям находится абсолютная угловая скорость;
- 3) определяются искомые скорости точек в относительном и переносном вращениях и затем искомые абсолютные скорости точек;
- 4) находятся переносное, относительное и кориолисово ускорения и затем искомое абсолютное ускорение точек твердого тела определяется путем векторного сложения или при помощи метода проектирования.

Пример 12.3:

Конус A катится по неподвижному конусу B . Высота конуса $OO_1 = 10$ см. Переносная угловая скорость конуса $\omega_e = 4\pi \text{ с}^{-1}$, относительная угловая скорость $\omega_r = 4\pi\sqrt{3} \text{ с}^{-1}$, абсолютная угловая скорость $\omega = 8\pi \text{ с}^{-1}$. Определить скорость и

ускорение точки D (рис.12.8).

Решение:

В данной задаче составляющие вращения конуса происходят в разных направлениях: относительное – вокруг оси Oz_1 против хода часовой стрелки, переносное – вокруг оси Oz по ходу часовой стрелки.

Скорость точки D равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей: $\vec{V}_D = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Переносная скорость по модулю равна: $V_e = \omega_e \cdot OO_1 = 40 \text{ см/с}$.

Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости перпендикулярен плоскости треугольника ODC в сторону переносного вращения (в данном случае направление этого вектора совпадает с положительным направлением оси x) (рис. 12.8, а).

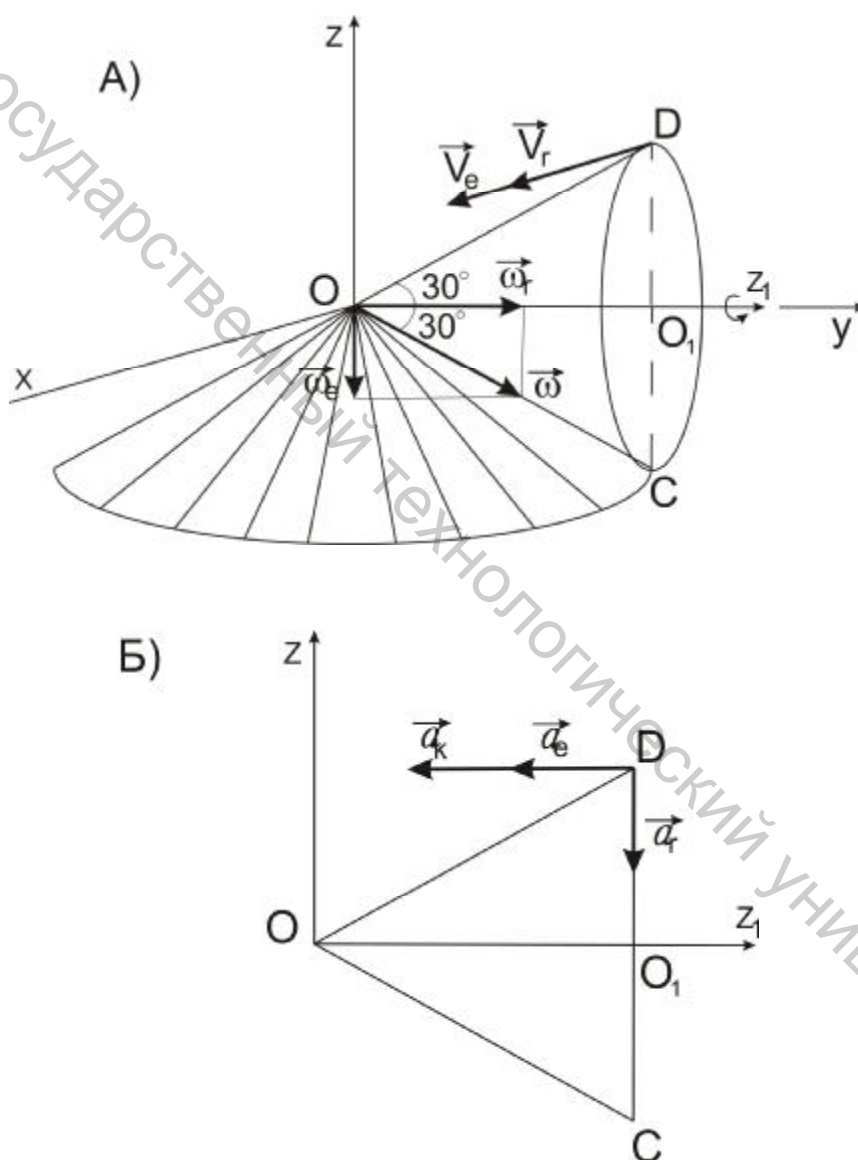


Рис. 12.8

Относительная скорость по модулю равна: $V_r = \omega_r \cdot O_1D$, где $O_1D = OO_1 \tan 30^\circ$. Тогда $V_r = 4p \sqrt{3} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = 40p$ см/с.

Вектор $\dot{V}_r$ относительной скорости совпадает с направлением переносной скорости.

В этом случае абсолютная скорость точки D равна:

$$V_D = V_e + V_r = 80p \text{ см/с.}$$

Для определения ускорения точки D применим теорему сложения ускорений (теорему Кориолиса): $\ddot{\mathbf{r}}_D = \ddot{\mathbf{r}}_e + \ddot{\mathbf{r}}_r + \ddot{\mathbf{a}}_k$.

Так как угловая скорость $\dot{\omega}_e$ переносного вращения сохраняет свое направление и численное значение, то переносное ускорение точки D $\ddot{\mathbf{r}}_e = \ddot{\mathbf{r}}_e^n$, численно $a_e = \omega_e^2 \cdot OO_1 = 160p^2$ см/с². Вектор переносного ускорения направлен перпендикулярно оси z переносного вращения.

Аналогично, угловая скорость $\dot{\omega}_r$ относительного вращения сохраняет свое направление и численное значение, поэтому: $\ddot{\mathbf{r}}_r = \ddot{\mathbf{r}}_r^n$, численно $a_r = \omega_r^2 \cdot O_1D = \frac{480p^2}{\sqrt{3}}$ см/с². Вектор относительного ускорения перпендикулярен оси z, оси относительного вращения.

Ускорение Кориолиса определим по формуле $\ddot{\mathbf{a}}_k = 2\dot{\omega}_e \times \dot{V}_r$.

Направление вектора ускорения Кориолиса совпадает с направлением вектора $\ddot{\mathbf{a}}_e$. Численно $a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 320p^2$ см/с².

Из (рис. 12.8, б) видно, что модуль абсолютного ускорения точки D равен:

$$a_D = \sqrt{(a_e + a_k)^2 + a_r^2} = \sqrt{(160p^2 + 320p^2)^2 + \left(\frac{480p^2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 554,27p^2 \text{ см/с}^2.$$

Пример 12.4:

Уравнения вращательного движения ротора двухсистемного гироскопа определяются тремя углами Эйлера: $y = 3t$, $q = 0$, $j = 2000t$. Определить уравнения движения точки M, расположенной на ободе гироскопа, по отношению к наблюдателю, расположенному на поверхности Земли, если радиус диска ротора $R=10$ см (рис. 12.9, а). Поверхность Земли считать неподвижной.

Решение:

Выберем абсолютную систему координат $x_0y_0z_0$, связанную с фундаментом, и подвижную систему координат $x_2y_2z_2$, оси которой связаны с ротором гироскопа. Координаты точки M по отношению к системе координат $x_2y_2z_2$ заданы (рис. 12.9, а). Они равны: $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = R$.

В нашем случае поворот осей подвижной системы реализуется совокупностью двух поворотов: угла прецессии y и угла собственного вращения j . Система $x_1y_1z_1$ получается из исходной путем поворота на угол y , а система $x_2y_2z_2$ получается из системы $x_1y_1z_1$ путем поворота на угол j .

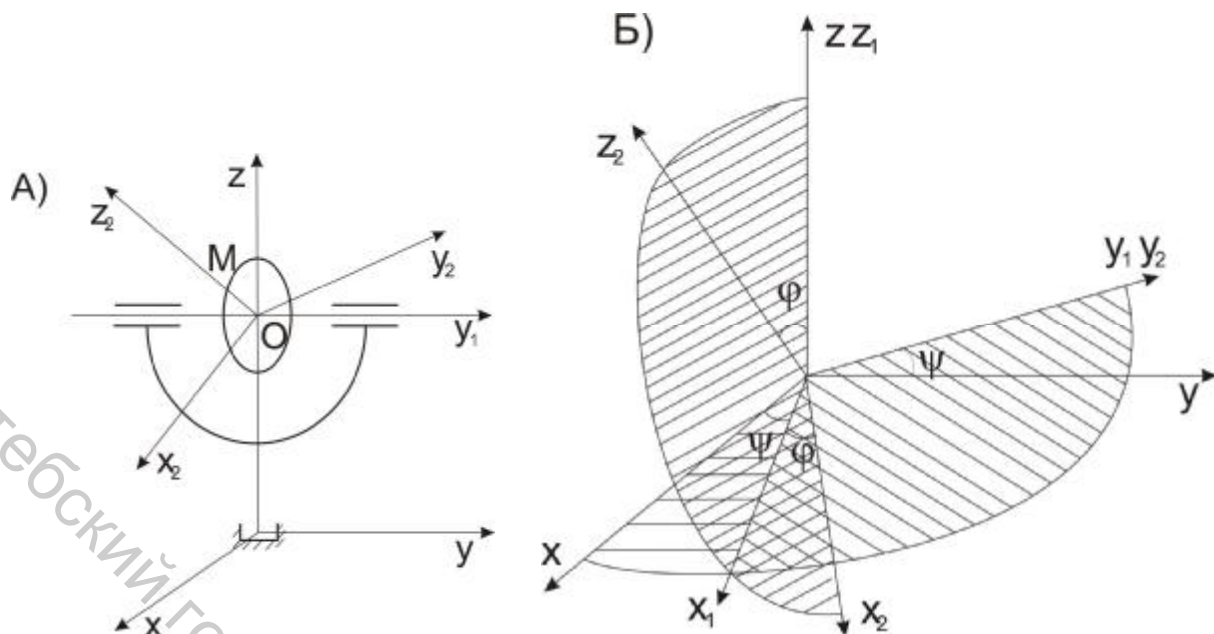


Рис. 12.9

Для определения координат точки по отношению к неподвижной системе отсчета воспользуемся формулами преобразования координат, которые в матричной форме имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \{A\} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}, \quad (12.23)$$

где $\{A\}$ —матрица поворота осей $x_2y_2z_2$ по отношению к неподвижной системе отсчета. Имеем

$$\{A\} = \{A_1\} \cdot \{A_2\}, \quad (12.24)$$

где $\{A_1\}$ —матрица поворота осей на угол прецессии y ; $\{A_2\}$ —матрица поворота на угол собственного вращения j .

Координаты матрицы $\{A_1\}$ представляют собой направляющие косинусы углов между системой xuz и системой $x_1y_1z_1$, т. е. матрица $\{A_1\}$ имеет вид:

$$\{A_1\} = \begin{Bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (12.25)$$

Коэффициенты матрицы $\{A_2\}$ направляющие косинусы углов между системой $x_1y_1z_1$ и системой $x_2y_2z_2$, т. е. матрица $\{A_2\}$ имеет вид:

$$\{A_2\} = \begin{Bmatrix} \cos j & 0 & \sin j \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin j & 0 & \cos j \end{Bmatrix} \quad (12.26)$$

Используя правило перемножения матриц, получаем:

$$\{A\} = \{A_1\}\{A_2\} = \begin{Bmatrix} \cos y \cos j & -\sin y & \cos y \sin j \\ \sin y \cos j & \cos y & \sin y \cos j \\ -\sin j & 0 & \cos j \end{Bmatrix} \quad (12.27)$$

Подставляя (12.27) в выражение (12.23) и учитывая координаты точки М, получим формулы преобразования координат в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos y \cos j & -\sin y & \cos y \sin j \\ \sin y \cos j & \cos y & \sin y \cos j \\ -\sin j & 0 & \cos j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix} \quad (12.28)$$

Используя правило перемножения матриц, получим:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \cos y \sin j \\ R \sin y \sin j \\ R \cos j \end{Bmatrix} \quad (12.29)$$

Подставляя числовые данные, окончательно находим:

$$x = 10 \cos 3t \sin 2000t \text{ см}$$

$$y = 10 \sin 3t \sin 2000t \text{ см}$$

$$z = 10 \cos 2000t \text{ см}$$

Полученные уравнения представляют собой уравнения движения точки М по отношению к системе координат хуz.

Содержание контрольных заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, рабочая программа, пояснения к тексту задач указаны в методических указаниях и контрольных заданиях для студентов-заочников машиностроительных специальностей [19]. Цель рассмотренных ниже примеров – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями. Рекомендации по последовательности решения задач и примеры их выполнения могут быть использованы как студентами дневного, так и заочного отделений технических специальностей вузов.

Глава XIII

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО СТАТИКЕ

13.1. Равновесие произвольной плоской системы сил

Первая задача относится к равновесию плоской системы сил; для её решения следует изобразить на рисунке заданные силы и реакции связей, приложенных к телу, равновесие которого рассматривается в данной задаче, и составить три уравнения равновесия.

План решения задач.

1. Выделить твёрдое тело, равновесие которого следует рассмотреть для отыскания неизвестных величин.
2. Изобразить активные силы.
3. Освободить твёрдое тело от связей, заменяя действие связей реакциями.
4. Рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей.
5. Убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т.е. число неизвестных величин не более трёх.
6. Выбрать систему координат и точку (или точки), относительно которой предполагается составить уравнение моментов.
7. Составить уравнения равновесия сил, приложенных к твёрдому телу.
8. Решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.
9. Проверить ход решения и полученные результаты. Изучить найденное решение, сделать выводы.

При решении задач полезно учитывать следующее.

1. Решение задачи существенным образом зависит от установления связи между неизвестными и данными задачи. Поэтому первоначально следует внимательно разобраться с условиями задачи, сделать чертеж.

2. Центр моментов полезно выбрать в точке пересечения двух неизвестных сил.

3. При выборе положения координатных осей рекомендуется оси направлять перпендикулярно либо параллельно к линии действия неизвестных сил.

4. При решении задачи иногда можно самим ввести какую-либо величину (длину стержня, угол его наклона, плечи всех сил выразить через длину какого-либо отрезка), не заданную в условии задачи. Введенные величины в ходе решения задачи сокращаются.

5. Для упрощения составления уравнений равновесия иногда целесообразно разложить какую-либо силу на составляющие, параллельные координатным осям.

13.1.1. Задача С1

Дано: $P = 25 \text{ кН}$, $M = 60 \text{ кНм}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $F_3 = 30 \text{ кН}$, $\alpha_3 = 30^\circ$, $a = 0,5 \text{ м}$ (рис. 13.1).

Определить реакции связей в точках А и В: X_A , Y_A и S .

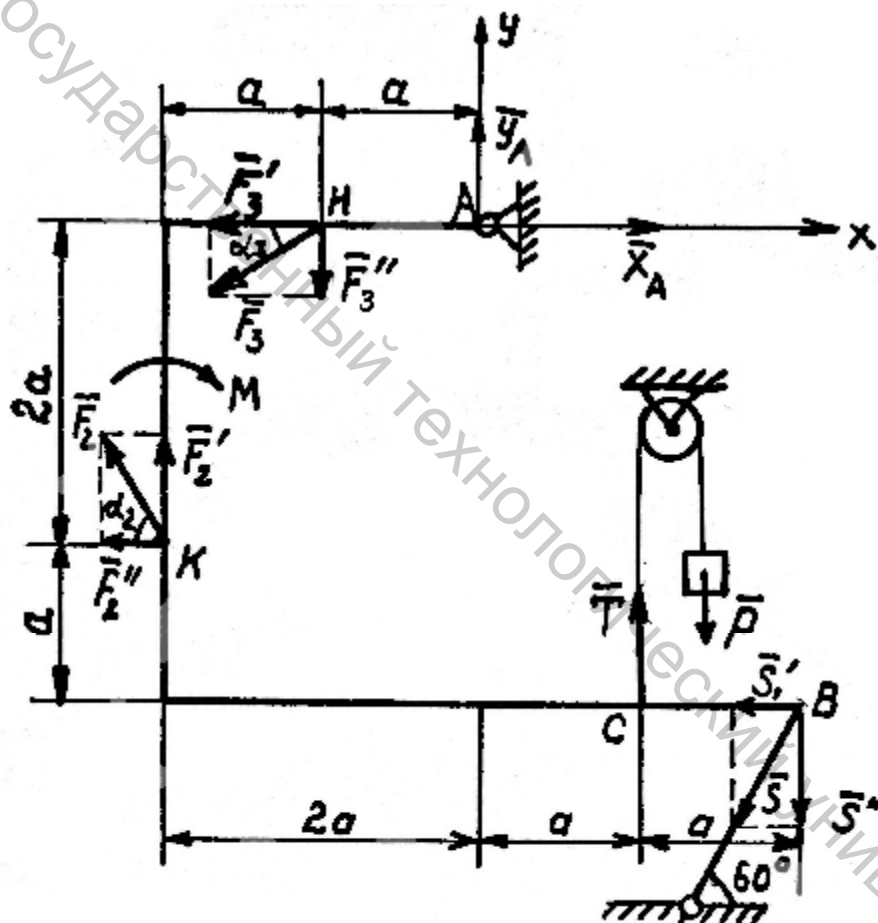


Рис. 13.1

Решение:

Рассмотрим равновесие жёсткой рамы АВ (см. рис. 13.1). На раму действуют активные силы $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и пара сил с моментом M .

Мысленно отбросим связи, заменяем их действия реакциями связей. Реакция шарнирно неподвижной опоры неизвестна ни по величине, ни по направлению. Выбираем систему координат, как указано на рис. 13.1. Разложим её на

составляющие $\dot{X}_A$ и $\dot{Y}_A$, направленные вдоль осей координат в сторону их возрастания. Реакция невесомого стержня, соединенного концами с другими телами шарнирно, направлена вдоль этого стержня. Направляем его реакцию от узла, предполагая, что стержень растянут. Будет ли это так, покажет результат решения задачи. Реакцию нити $\dot{T}$ направляем вдоль нити, численно $T = P$, так как блок изменяет только направление силы, а натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, одинаковы.

Теперь жёсткую раму можно рассматривать как свободное тело, находящееся в равновесии под действием сил, причем лишь величины трех сил $\dot{X}_A$, $\dot{Y}_A$ и $\dot{S}$ неизвестны. Следовательно, задача является статически определенной.

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к раме, в проекциях на оси X и Y и уравнение моментов относительно точки A . Выбор точки A в качестве центра моментов удобен, так как моменты двух неизвестных по величине сил $\dot{X}_A$ и $\dot{Y}_A$ относительно точки A равны нулю и в уравнение моментов войдет лишь одна неизвестная $\dot{S}$.

При вычислении моментов сил $\dot{F}_2$, $\dot{F}_3$ и $\dot{S}$ относительно точки A удобно разложить их на составляющие, как указано на рис. 13.1, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона. Тогда

$$m_A(\dot{F}_2) = m_A(\dot{F}_2') + m_A(\dot{F}_2'') = -F_2' \cdot 2a - F_2'' \cdot 2a = -2a(F_2 \sin a_2 + F_2 \cos a_2) = -2F_2(\sin a_2 + \cos a_2) \cdot a,$$

$$m_A(\dot{F}_3) = m_A(\dot{F}_3') + m_A(\dot{F}_3'') = -F_3' \cdot 0 + F_3'' \cdot a = F_3 \sin a_3 \cdot a,$$

$$m_A(\dot{S}) = m_A(\dot{S}') + m_A(\dot{S}'') = -S' \cdot 3a - S_2'' \cdot 2a = -S(3 \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ) \cdot a.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = X_A - F_3' - F_2'' - S' = 0, \quad (13.1)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A - F_3'' + F_2' + T - S'' = 0, \quad (13.2)$$

$$m_A(\dot{F}_k) = F_3 \sin a_3 \cdot a - 2F_2(\sin a_2 + \cos a_2) \cdot a - S(3 \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ) \cdot a - M + T \cdot a = 0. \quad (13.3)$$

Из уравнения (13.3) находим:

$$30 \cdot \sin 30^\circ - 2 \cdot 20(\sin 60^\circ + \cos 60^\circ) - S(3 \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ) - \frac{60}{0,5} + 25 = 0.$$

Откуда $S = -42,4$ кН.

Из уравнения (13.1)

$$X_A = F_3 \cos a_3 + F_2 \cos a_2 + S \cos 60^\circ = 30 \cos 30^\circ + 20 \cos 60^\circ + (-42,4) \cos 60^\circ = 14,78 \text{ кН.}$$

Из уравнения (13.2)

$$Y_A = F_3 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ - 25 + S \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 0,866 - 25 + (-42,4) \cdot 0,866 = -64,04 \text{ кН.}$$

Знак «минус» у величин S и Y_A указывает, что стержень сжат, а реакция $\dot{Y}_A$ имеет направление, противоположное показанному на чертеже.

Реакция опоры А $\dot{\vec{R}}_A = \dot{\vec{X}}_A + \dot{\vec{Y}}_A$. Её модуль

$$\dot{\vec{R}}_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(14,78)^2 + (-64,04)^2} = 65,6 \text{ кН},$$

а направляющие косинусы

$$\cos(\dot{\vec{R}}_A; X) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{14,78}{65,6} = 0,225.$$

$$\cos(\dot{\vec{R}}_A; Y) = \frac{Y_A}{R_A} = -\frac{64,04}{65,6} = -0,969.$$

Проверка:

$$\Sigma m_B(\dot{\vec{F}}_k) = 0;$$

$$-X_A \cdot 3a - Y_A \cdot 2a + F_3'' \cdot 3a - M - F_2' \cdot 4a + F_2'' \cdot a - T \cdot a = 0;$$

$$-14,78 \cdot 3 \cdot 0,5 - (-64,04) \cdot 2 \cdot 0,5 + (30 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,866) \cdot 3 \cdot 0,5 -$$

$$-60 - (20 \cdot 0,866 \cdot 4 - 20 \cdot 0,5) \cdot 0,5 - 25 \cdot 0,5 = 0.$$

13.2. Равновесие системы тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил

Статический расчёт инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции, состоящей из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой. Тела могут быть соединены при помощи стержней, нитей, шарниров и соприкасаться друг с другом.

Силы, действующие на тела такой системы, можно подразделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, приложенные к телам данной системы, со стороны других тел, не входящих в эту систему (например, опорные реакции, сила тяжести и т.п.).

Силы, с которыми тела, входящие в данную систему, действуют друг на друга, называются внутренними силами этой системы. На основании аксиомы равенства действия и противодействия внутренние силы всегда попарно равны по модулю и противоположны по направлению (эти силы приложены к двум взаимодействующим между собой телам системы).

Такое подразделение относится как к активным силам, так и к реакциям связей. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними, в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами в нее не входящими (например, с опорами).

Рассмотрим методику решения задач на равновесие системы тел. При решении задач на равновесие системы тел необходимо учесть, что, если система тел находится в равновесии, то в равновесии находится каждое тело, входящее в состав этой системы, т.е. все внешние и внутренние силы, приложенные к каждому телу в отдельности, уравниваются. Поэтому для конструкции из n тел, на каждое из которых действует система сил, произвольно расположенных на плоскости, можно составить $3n$ уравнений равновесия и, следовательно, определить $3n$ неизвестных.

Если общее число уравнений равновесия равно числу неизвестных, задача является статически определенной. В противном случае задача является статически неопределенной, так как число неизвестных будет больше числа уравнений, и методами только одной теоретической механики решена быть не может. Решение статически неопределенных задач рассматривается в специальных курсах (сопротивление материалов и строительная механика).

Следовательно, если число внешних реакций больше трёх или, кроме внешних реакций, требуется определить неизвестные внутренние силы, то необходимо применять метод расчленения системы, т.е. нужно рассматривать равновесие каждого тела системы в отдельности.

Выделяем одно из тел. К выделенному телу прикладываем все активные силы, а так же силы, с которыми действуют отброшенные тела на данное тело. В этом случае отбрасываемые тела рассматриваются как связи. Действия отброшенных тел заменяются силами, которые в результате отделения данного тела от других тел из внутренних становятся внешними. Далее, для рассматриваемого тела составляем уравнения равновесия, учитывая при этом все силы, приложенные к данному телу. Затем выделяем второе тело, введя в рассмотрение действие других отброшенных тел. При этом, как было выше отмечено, учитывается, что силы взаимодействия тел равны по модулю и противоположно направлены.

Если надо найти взаимодействие между всеми телами системы, последняя расчленяется на отдельные тела, равновесие каждого из которых рассматривается отдельно, начиная с того, на которое действуют известные силы.

Следует заметить, что в некоторых случаях бывает целесообразно сначала составить уравнения равновесия для всей системы, рассматривая ее как одно абсолютно твердое тело (аксиома затвердевания). В уравнения равновесия для всей системы внутренние силы не входят, так как они взаимно уравновешиваются по аксиоме равенства действия и противодействия.

Можно также составить условия равновесия для любой комбинации групп тел, при этом внутренние силы для отдельных групп, как и для всей рассматриваемой системы, учитывать не надо.

При выполнении задания на равновесие тел студент сам выбирает, какие ему составить уравнения равновесия. Удобно ли сначала составить уравнения равновесия для всей системы в целом, а затем эту систему расчленить в шарнире и составить три уравнения равновесия для отдельного тела или удобнее сначала систему расчленить в точке (точках) и составить по три уравнения для каждого тела (или комбинации групп тел) в отдельности -- все это зависит также от конструкции и определяется требованиями расчёта.

Необходимо учесть, что реакция невесомого стержня, соединенного своими концами с другими телами шарнирно, направлена вдоль этого стержня, если силы приложены к его концам. Со стороны опоры, осуществленной в виде заделки (защемляющей опоры), на конструкцию действуют реакция неизвестного направления, разложенная на составляющие по осям координат, и пара сил (момент заделки), т.е. три неизвестные величины.

Можно рекомендовать следующую последовательность решения задачи на определение реакций опор и внутренних усилий составной конструкции.

1. К конструкции прикладывают все активные силы.
2. Согласно принципу освобождаемости тел от связей, отбрасывают мысленно внешние связи, заменяя их соответствующими реакциями.
3. Установив, что число неизвестных величин превышает число уравнений равновесия, которое можно составить для полученной системы тел, конструкцию расчленяют, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями.
4. Каждое из тел, входящих в состав конструкции, рассматривают как свободное, находящееся под действием активных сил и реакций внешних и внутренних связей.
5. Сопоставляя общее число неизвестных величин и число всех уравнений равновесия сил, устанавливают, является ли задача статически определенной.
6. Выбирают наиболее удобные системы координат; при этом для каждого тела и для всех систем может быть избрана своя система координат.
7. Составляют уравнения равновесия сил для каждого тела или для каждой системы твёрдых тел, равновесие которых рассматривается; при этом могут использоваться также уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции.
8. Решают полученную систему уравнений в наиболее удобной последовательности и определяют все неизвестные величины.

13.2.1. Задача С2

Дано: $M = 60$ кНм, $q = 20$ кН/м, $F_2 = 20$ кН, $\alpha = 30^\circ$, $F_4 = 40$ кН, $\alpha_4 = 60^\circ$, $\alpha = 0,2$ м.

Определить реакции связей в точках А, В, С: $X_A, Y_A, M_A, S, X_C, Y_C$.

Решение:

В задаче (рис. 13.2) рассматривается система двух тел, соединенных шарниром в точке С.

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к стержню ВС, а затем к жесткому угольнику АС, но можно и наоборот, сначала к угольнику АВ, а затем стержню ВС. В некоторых задачах удобно рассмотреть систему тел в целом, а затем тело АС или СВ.

Стержень ВС (рис. 13.4) находится в равновесии под действием активных сил и реакций связей. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем сосредоточенной силой $\dot{Q}$, приложенной в середине участка CL, модуль которой $Q = q \cdot CL = 20 \cdot 4 \cdot 0,2 = 16$ кН.

Стержень ВВ' считаем растянутым. Реакцию стержня $\dot{S}$ направим вдоль стержня, как указано на рис. 13.4.

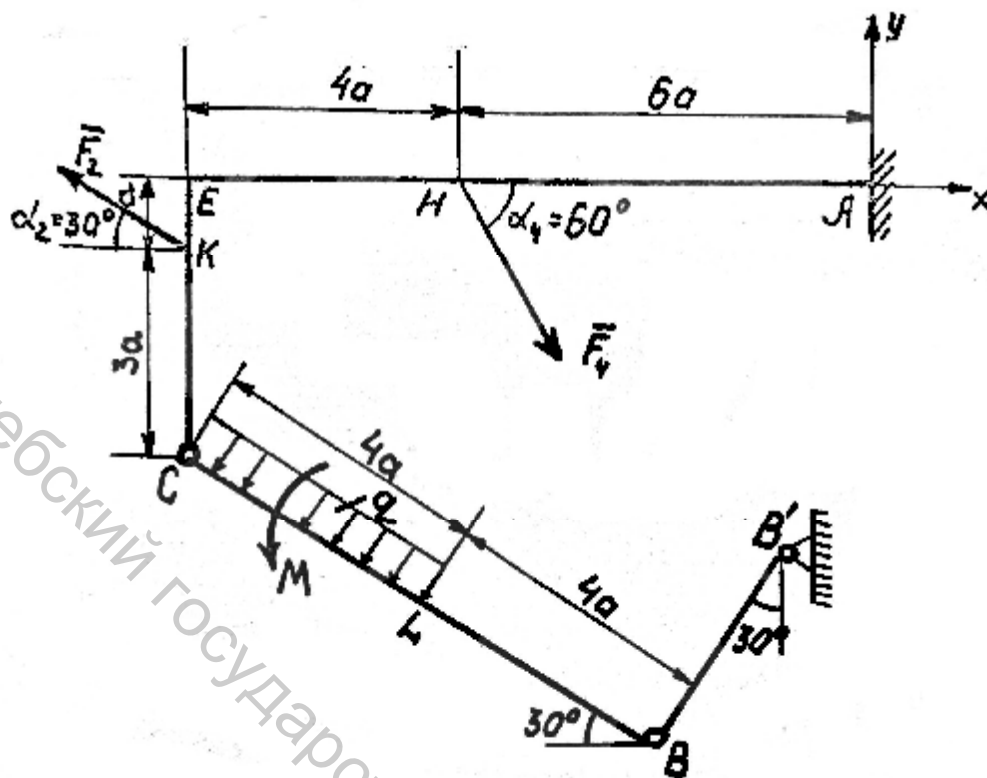


Рис. 13.2

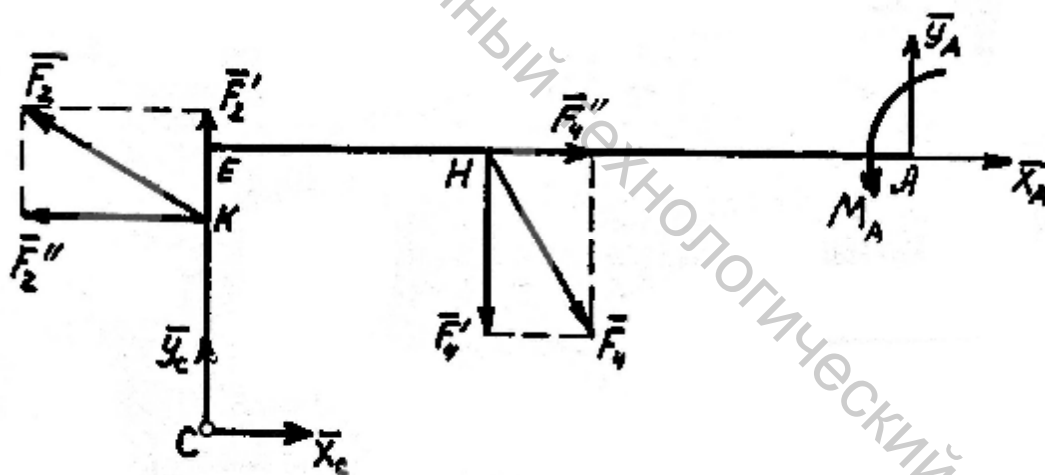


Рис. 13.3

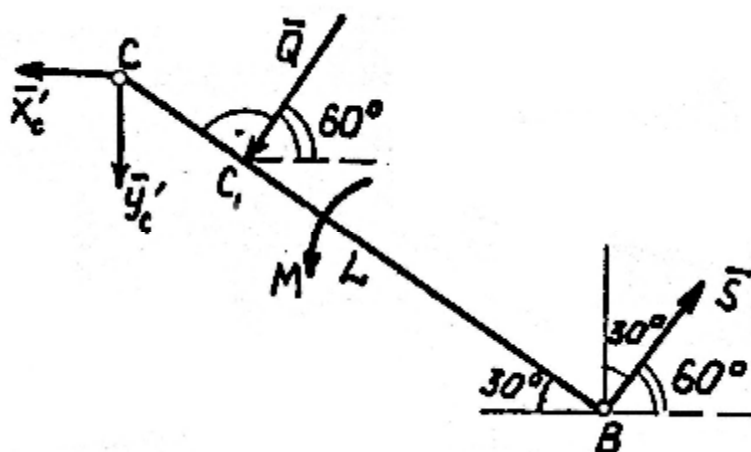


Рис. 13.4

Реакцию соединительного шарнира С разложим на составляющие $\dot{X}_C, \dot{Y}_C$, или $\dot{X}'_C, \dot{Y}'_C$. Силы $\dot{X}_C$ и $\dot{Y}_C$ приложены к жесткому угольнику АС (рис. 13.3), а силы $\dot{X}'_C$ и $\dot{Y}'_C$ приложены к стержню ВС (рис. 13.4). При этом $\dot{X}_C = -\dot{X}'_C$ и $\dot{Y}_C = -\dot{Y}'_C$, а по модулю $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$. Если всю конструкцию рассматривать как твердое тело, то эти силы учитывать не надо, так как они оказываются приложенными к одному твердому телу, следовательно, взаимно уравниваются друг друга. В уравнения равновесия всей конструкции войдут только внешние силы системы. Следовательно, на стержень ВС действуют составляющие реакции $\dot{X}'_C$ и $\dot{Y}'_C$ в шарнире С (внутренняя реакция для всей системы, но внешняя для стержня ВС) со стороны жесткого угольника АС.

Для произвольной плоской системы сил, приложенной к телу ВС, составим три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = S \cos 60^\circ - Q \cos 60^\circ - X'_C = 0, \quad (13.4)$$

$$\Sigma F_{ky} = -Y'_C - Q \cos 30^\circ + S' \cos 30^\circ = 0, \quad (13.5)$$

$$m_C(\vec{F}_k) = -Q \frac{CL}{2} + M + S \cdot CB = 0. \quad (13.6)$$

Жесткий угольник АС находится в равновесии под действием заданных сил $\dot{F}_2$ и $\dot{F}_4$ и реакций связей $\dot{X}_C$ и $\dot{Y}_C$ соединительного шарнира С и жесткой заделки в точке А, которую представим в виде $\dot{X}_A, \dot{Y}_A$ и $\dot{M}_A$ (момент заделки). Здесь $\dot{X}_C$ и $\dot{Y}_C$ составляющие реакции в шарнире С (внутренняя реакция для всей системы, но внешняя для угольника АС) со стороны стержня ВС.

Для упрощения нахождения моментов сил $\dot{F}_2$ и $\dot{F}_4$ разложим их на составляющие:

$$F'_2 = F_2 \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ кН}; \quad F''_2 = F_2 \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН};$$

$$F'_4 = F_4 \sin 60^\circ = 40 \cdot 0,866 = 34,64 \text{ кН}; \quad F''_4 = F_4 \cos 60^\circ = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ кН}.$$

Для произвольной плоской системы сил, приложенной к телу АС, составим три уравнения равновесия в виде:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + F''_4 - F''_2 + X_C = 0; \quad (13.7)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A - F'_4 + F'_2 + Y_C = 0; \quad (13.8)$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = M_A + F'_4 \cdot 6a - F'_2 \cdot 10a - F''_2 \cdot a - Y_C \cdot 10a + X_C \cdot 4a = 0. \quad (13.9)$$

Получим три уравнения, содержащие пять неизвестных, но две из этих неизвестных входят также в предыдущие три уравнения. Всего имеем шесть уравнений с шестью неизвестными.

Из уравнения (13.6) находим S:

$$-16 \cdot \frac{4 \cdot 0,2}{2} + 60 + S \cdot 8 \cdot 0,2 = 0; \quad S = -33,6 \text{ кН}.$$

Из уравнения (13.4)

$$X'_C = (-33,6) \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{2} = -24,8 \text{ кН.}$$

Из уравнения (13.5)

$$Y'_C = -16 \cdot \cos 30^\circ + (-33,6) \cdot \cos 30^\circ = -43 \text{ кН.}$$

Знак «минус» у величин S , X'_C и Y'_C показывают, что реакции $\dot{S}$, $\dot{X}'_C$ и $\dot{Y}'_C$ имеют направления, противоположные показанным на чертеже.

Из уравнения (13.7)

$$X_A = F_2'' - F_4'' - X_C = 17,32 - 20 - (-24,8) = 22,12 \text{ кН.}$$

Из уравнения (13.8)

$$Y_A = F_4' - F_2' - Y_C = 34,64 - 10 - (-43) = 67,64 \text{ кН.}$$

Из уравнения (13.9)

$$M_A = 0,2(-34,64 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 17,32 \cdot 1 + (-43) \cdot 10 - (-24,8) \cdot 4) = -84,26 \text{ кНм.}$$

Знак «минус» у M_A показывает, что момент заделки M_A направлен по ходу часовой стрелки.

Реакция $\dot{R}_A = \dot{X}_A + \dot{Y}_A$, а по модулю

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(22,12)^2 + (67,64)^2} = 71,1 \text{ кН.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\dot{R}_A; X) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{22,12}{71,1} = 0,311.$$

$$\cos(\dot{R}_A; Y) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{67,64}{71,1} = 0,952.$$

Реакция шарнира С $\dot{R}_C = \dot{X}_C + \dot{Y}_C$, а по модулю

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{(-24,8)^2 + (-43)^2} = 49,8 \text{ кН.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\dot{R}_C; X) = \frac{X_C}{R_C} = \frac{-24,8}{49,8} = -0,5.$$

$$\cos(\dot{R}_C; Y) = \frac{Y_C}{R_C} = \frac{-43}{49,8} = -0,864.$$

Для того чтобы проверить, правильно ли определены реакции опор А и В, можно составить уравнение равновесия в виде моментов всех сил относительно точки С для всей систем в целом. Если неизвестные найдены правильно, то это уравнение обратится в тождество. Проверка:

$$\Sigma m_C(\dot{F}_k) = 0;$$

$$\begin{aligned} M_A - X_A \cdot 4a + Y_A \cdot 10a - F_4'' \cdot 4a - F_4' \cdot 4a + F_2'' \cdot 3a - Q \cdot \frac{CL}{2} + M + S \cdot 8a = 0; \\ -84,26 - 22,12 \cdot 4 \cdot 0,2 + 67,64 \cdot 10 \cdot 0,2 - 4 \cdot 0,2(34,64 + 20) + 17,32 \cdot 3 \cdot 0,2 - \\ -16 \cdot \frac{4 \cdot 0,2}{2} + 60 + (-33,6) \cdot 8 \cdot 0,2 = 0. \end{aligned}$$

13.3. Равновесие пространственной системы сходящихся сил

Четвертая задача относится к равновесию пространственной системы сходящихся сил и для решения этой задачи следует сначала мысленно вырезать первый узел, уравновесить его реакциями разрезанных стержней, учитывая, что реакция невесомого стержня, соединенного концами с другими телами шарнирно, направлена вдоль этого стержня, и составить три уравнения равновесия для этого узла. Затем следует рассмотреть равновесие второго узла, где сходятся стержни и приложены заданные силы. При определении усилия в стержне, соединенном своими концами шарнирно к обоим узлам, следует учесть аксиому о равенстве действия и противодействия.

При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сходящихся сил, надо выполнить пять пунктов указанного в разделе 13.1 плана решения задач. Затем (пункт 6) выбрать систему осей декартовых координат X, Y, Z так, как это рекомендовано в основных методических указаниях; составить уравнения равновесия в проекциях на оси декартовых координат (пункт 7); решить полученную систему уравнений, т.е. определить неизвестные величины (пункт 8).

13.3.1. Задача СЗ

Дано: $P = 200 \text{ Н}$, $Q = 100 \text{ Н}$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $b_1 = 60^\circ$, $g_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $b_2 = 45^\circ$, $g_2 = 60^\circ$, $j = 60^\circ$, $\Theta = 51^\circ$, узлы L, H , стержни LH, LG, LC, HA, HB, HO .

Определить усилия в стержнях $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ (рис. 13.5).

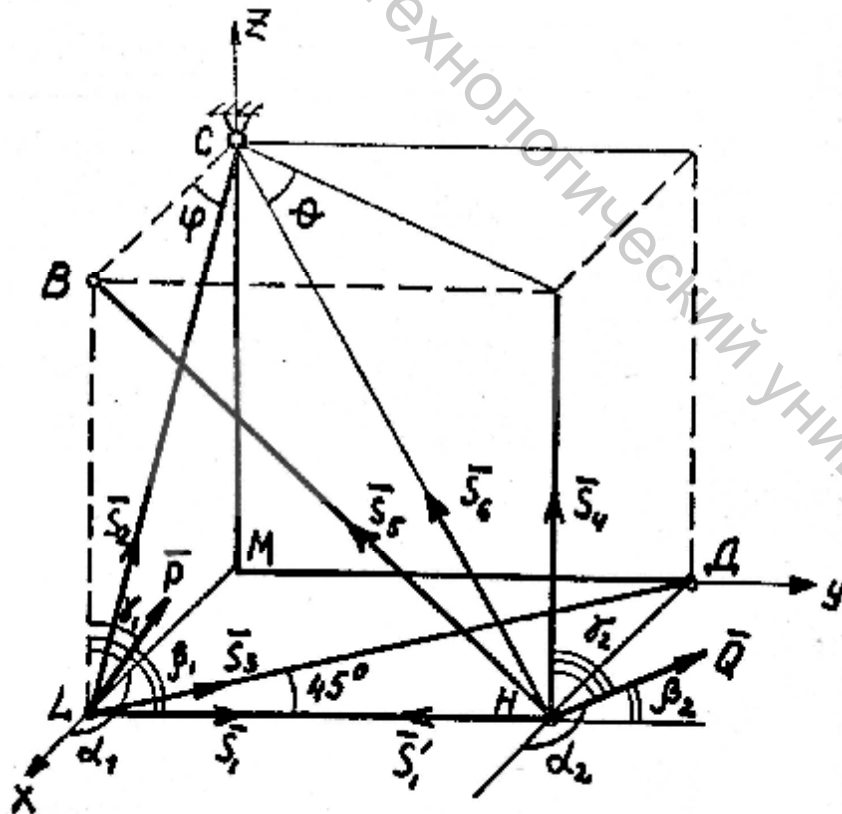


Рис. 13.5

Решение:

Рассмотрим равновесие узла А, так как в нем сходятся три стержня. На этот узел действуют активная сила $\dot{P}$ и реакции стержней $\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dot{S}_3$. Предполагаем, что все стержни работают на растяжение. Направляем реакции стержней $\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dot{S}_3$ от узла А вдоль стержней. Будет ли это так, покажет результат решения задачи.

Для пространственной сходящейся системы сил, приложенной к узлу L, составим три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = P \cos \alpha_1 - S_2 \cos j - S_3 \cos 45^\circ = 0, \quad (13.10)$$

$$\Sigma F_{ky} = P \cos b_1 + S_1 + S_3 \cos 45^\circ = 0, \quad (13.11)$$

$$\Sigma F_{kz} = P \cos g_1 + S_2 \sin j = 0. \quad (13.12)$$

Из уравнения (13.12) $S_2 = -P \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = -200 \frac{1}{\sqrt{3}} = -115 \text{ Н.}$

Из уравнения (13.10) $S_3 = \frac{200 \cos 45^\circ - (-115) \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 282 \text{ Н.}$

Из уравнения (13.11) $S_1 = -200 \cos 60^\circ - 282 \cos 45^\circ = -300 \text{ Н.}$

Теперь рассмотрим равновесие узла Н. На него действуют: активная сила $\dot{Q}$ и реакции стержней $\dot{S}'_1$ ($\dot{S}'_1 = -\dot{S}_1$, а $S'_1 = S_1 = -300 \text{ Н}$ на основании принципа равенства действия и противодействия), $\dot{S}_4, \dot{S}_5, \dot{S}_6$. Предполагаем, что все стержни работают на растяжение. Составим три уравнения равновесия сил, сходящихся в узле Н:

$$\Sigma F_{kx} = Q \cos \alpha_2 - S_6 \cos \Theta \cdot \cos 45^\circ = 0, \quad (13.13)$$

$$\Sigma F_{ky} = Q \cos b_2 - S'_1 - S_6 \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos \Theta - S_5 \cos j = 0, \quad (13.14)$$

$$\Sigma F_{kz} = Q \cos g_2 + S_5 \sin j + S_4 + S_6 \sin \Theta = 0. \quad (13.15)$$

Из уравнения (13.13) $S_6 = \frac{Q \cos \alpha_2}{\cos \Theta \cos 45^\circ} = \frac{100 \cos 60^\circ}{\cos 51^\circ \cdot \cos 45^\circ} = 112 \text{ Н.}$

Из уравнения (13.14) $S_5 = \frac{100 \cos 45^\circ - (-300) - 112 \cos 51^\circ \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = 642 \text{ Н.}$

Из уравнения (13.15) $-S_4 = 100 \cos 60^\circ + 642 \sin 60^\circ + 112 \sin 51^\circ = 695 \text{ Н,}$
 $S_4 = -695 \text{ Н.}$

Знак «минус» у величин S_1, S_2, S_4 показывает, что стержни LH, LC и HA работают на сжатие.

13.4. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Пятая задача решается при помощи шести уравнений равновесия для системы произвольно расположенных сил. При решении задачи следует учесть, что реакции цилиндрических подшипников перпендикулярны к оси вращения вала, а реакция невесомого стержня направлена вдоль стержня; реакции подпятника и сферического шарнира разлагаются на составляющие по трём направлениям координатных осей.

При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, надо выполнить четыре пункта указанного в разделе 13.1 плана решения задач. Затем:

5) убедиться в том, что задача является статически определенной, т.е. число неизвестных величин не более шести;

6) выбрать систему осей декартовых координат X, Y, Z , как это рекомендовано в основных методических указаниях;

7) составить шесть уравнений равновесия твердого тела;

8) решить систему полученных уравнений, т.е. найти неизвестные величины.

Если силы непараллельны осям координат, то для упрощения составления некоторых уравнений лучше предварительно разложить эти силы на две или три составляющие, параллельные координатным осям.

13.4.1. Задача С4

Дано: $AB = 2a$, $AA_1 = 3a$, $A_1A_2 = a$, $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 2$ кН, $M = 4$ кНм, $F_1 = 6$ кН, $\alpha_1 = 30^\circ$, $F_3 = 10$ кН, $\alpha_3 = 0^\circ$, $a = 0,6$ м.

Определить реакции подпятника и стержня $X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, S$.

Решение:

Данное тело (рис.13.6) находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил: активных сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2$, пары сил с моментом M и реакций стержня $\vec{S}$, цилиндрического подшипника, реакция которого $\vec{R}_B = \vec{Y}_B + \vec{Z}_B$ и сферического шарнира, реакция которого $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$.

Составим шесть уравнений равновесия для произвольной пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = F_1 \cos 30^\circ + X_A = 0, \quad (13.16)$$

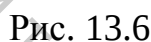
$$\Sigma F_{ky} = F_1 \cos 60^\circ + F_3 + Y_B + Y_A - S \cos 30^\circ = 0, \quad (13.17)$$

$$\Sigma F_{kz} = -P_1 - P_2 + Z_B + Z_A + S \cos 60^\circ = 0, \quad (13.18)$$

$$\Sigma m_x(\vec{F}_k) = -P_1 \frac{AA_1}{2} - P_2 AA_1 + F_1 \cos 60^\circ \cdot A_1A_2 + F_3 \cdot A_1A_2 + S \cos 60^\circ \cdot AA_1 = 0, \quad (13.19)$$

$$\Sigma m_y(\vec{F}_k) = P_1 \frac{AB}{2} + P_2 \frac{AB}{2} - F_1 \cos 30^\circ \cdot A_1A_2 - Z_B \cdot AB = 0, \quad (13.20)$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = -F_1 \cos 30^\circ \cdot AA_1 + F_1 \cos 60^\circ \cdot \frac{AB}{2} + F_3 \cdot AB - M + Y_B \cdot AB = 0. \quad (13.21)$$



Из уравнения (13.19)

Из уравнения (13.20)

Из уравнения (13.21)

Из уравнения (13.17)

Из уравнения (13.18)

Знак «минус» у величин Y_B, Z_B, X_A, Y_A показывает, что реакции $\dot{Y}_B, \dot{Z}_B, \dot{X}_A, \dot{Y}_A$ имеют на чертеже направления, противоположные показанным.

14.1. Кинематика точки

При решении первой задачи полезно придерживаться следующего порядка.

1. Определить уравнение траектории точки, исключая для этого параметр t из данных уравнений движения точки: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

2. Построить траекторию точки и изобразить на ней точку M в момент времени $t_0 = 0$ и $t = 1$ с.

3. По уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси декартовых координат и скорость по величине и направлению.

4. Зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси декартовых координат и ускорение по величине и направлению.

5. Найти проекцию ускорения на касательную к траектории точки по формуле

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

6. Определить проекцию ускорения точки на главную нормаль к траектории по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}.$$

7. Найти величину радиуса кривизны траектории точки по формуле

$$r = \frac{v^2}{a_n}.$$

При выполнении задачи К1 следует все искомые величины первоначально находить в общем виде, а затем определять для заданного момента $t = 1$ с и показать их на рисунке.

14.1.1. Задача К1

Дано: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ с, $X = 2 - 3 \cos \frac{p}{6} t$ (см), $Y = 9 \sin \frac{p}{6} t - 4$ (см). Определить

$y = f(x)$, v , a , a_t , a_n , r .

Решение:

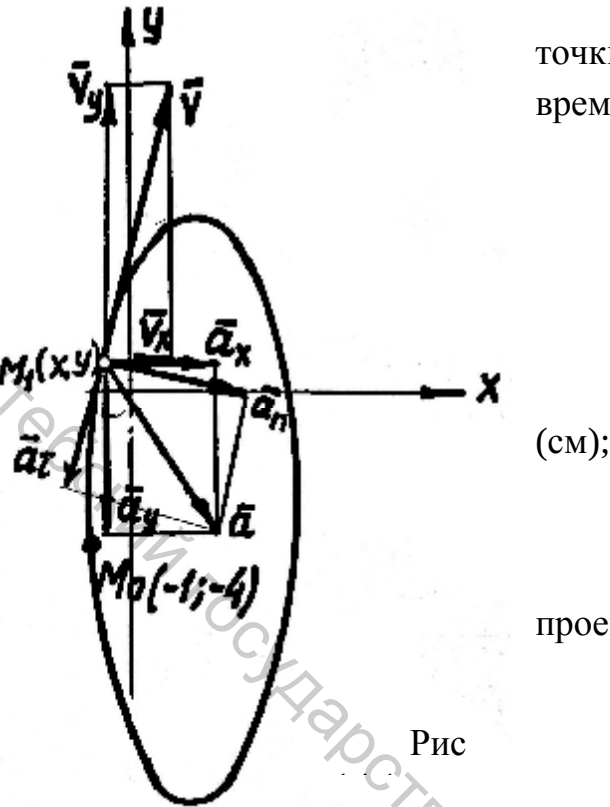
Определим траекторию движения точки в координатной форме, исключив параметр t из уравнений движения:

$$-\cos \frac{p}{6} t = \frac{X - 2}{3} \text{ и } \sin \frac{p}{6} t = \frac{Y + 4}{9}.$$

Возведем в квадрат и сложим, учитывая, что

$$\cos^2 \frac{p}{6} t + \sin^2 \frac{p}{6} t = 1; \quad \frac{(Y + 4)^2}{9^2} + \frac{(X - 2)^2}{3^2} = 1,$$

получили уравнение эллипса (рис. 14.1) с центром в точке $O_1 (-2; 4)$, полуоси которого 3 и 9.



Строим траекторию и изображаем на ней точки $M_0(X_0, Y_0)$ и $M_1(X_1, Y_1)$ в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$ с;

$$X_0 = 2 - 3\cos\frac{p}{6} \cdot 0 = -1;$$

$$Y_0 = 9\sin\frac{p}{6} \cdot 0 - 4 = -4;$$

$$X_1 = 2 - 3\cos\frac{p}{6} \cdot 1 = 2 - 3\cos 30^\circ = -0,6$$

$$Y_1 = 9\sin\frac{p}{6} \cdot 1 - 4 = 9 \cdot \frac{1}{2} - 4 = 0,5 \text{ (см)}.$$

Скорость точки определяем по ее проекциям на оси координат:

$$v_x = \dot{X} = -3(-\sin\frac{p}{6}t) \cdot \frac{p}{6} = \frac{p}{2}\sin\frac{p}{6}t,$$

$$v_y = \dot{Y} = 9\cos\frac{p}{6}t \cdot \frac{p}{6} = \frac{3}{2}p \cos\frac{p}{6}t.$$

При $t_1 = 1$ с

$$V_x = \frac{3,14}{2}\sin 30^\circ = 0,78 \text{ см/с}; v_y = \frac{3}{2} \cdot 3,14 \cdot \cos 30^\circ = 4,08 \text{ см/с}.$$

$$\text{Скорость точки } v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4}\sin^2\frac{p}{6}t + \frac{9}{4}p^2 \cdot \cos^2\frac{p}{6}t}.$$

$$\text{При } t_1 = 1 \text{ с } v = \sqrt{(0,78)^2 + (4,08)^2} = 4,15 \text{ см/с}.$$

Ускорение точки определяем по его проекциям на оси координат:

$$a_x = \ddot{X} = \left(\frac{p}{2}\sin\frac{p}{6}t\right)' = \frac{p}{2}\cos\frac{p}{6}t \cdot \frac{p}{6} = \frac{p^2}{12}\cos\frac{p}{6}t,$$

$$a_y = \ddot{Y} = \left(\frac{3}{2}p \cos\frac{p}{6}t\right)' = \frac{3}{2}p \cdot (-\sin\frac{p}{6}t) \cdot \frac{p}{6} = -\frac{p^2}{4}\sin\frac{p}{6}t.$$

При $t_1 = 1$ с

$$a_x = \frac{(3,14)^2}{12}\cos 30^\circ = 0,71 \text{ см/с}^2; a_y = -\frac{(3,14)^2}{4}\sin 30^\circ = -1,23 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2} = \sqrt{(0,71)^2 + (-1,23)^2} = 1,4 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение находим по формуле

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{p^2}{4} \cdot 2 \cdot \sin\frac{p}{6}t \cos\frac{p}{6}t \cdot \frac{p}{6} - \frac{9p^3}{24} \cdot 2 \cdot \cos\frac{p}{6}t \sin\frac{p}{6}t}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}\sin^2\frac{p}{6}t + \frac{9}{4}p^2 \cos^2\frac{p}{6}t}} = -\frac{p^3}{6v}\sin\frac{p}{3}t.$$

При $t_1 = 1$ с $\frac{dv}{dt} = -\frac{3,14^3}{6 \cdot 4,15} \sin 60^\circ = -1,07$ см/с².

Касательное ускорение можно найти также по формуле

$$\frac{dv}{dt} = \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right)' = \frac{2v_x v_{x'} + 2v_y v_{y'}}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x v_{x'} + v_y v_{y'}}{v}.$$

При $t_1 = 1$ с

$$\frac{dv}{dt} = \frac{0,78 \cdot 0,71 + 4,09 \cdot (-1,23)}{4,15} = \frac{-4,45}{4,15} = -1,07 \text{ см/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что движение точки замедленное, следовательно, направления $\vec{v}$ и $\vec{a}_t$ противоположны.

Модуль касательного ускорения $a_t = 1,07$ см/с².

Полное ускорение точки $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$, а его модуль $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, откуда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{1,4^2 - (-1,07)^2} = 0,9 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны определим из формулы

$$a_n = \frac{v^2}{r}; \quad r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4,15^2}{0,9} = 19 \text{ см.}$$

14.2. Исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

При решении задачи на вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется придерживаться следующей последовательности.

1. Выбрать направление перемещения рейки и определить скорость ее перемещения для заданного момента времени $t_1 = 2$ с.

2. Определить угловую скорость и ускорение колеса, находящегося в зацеплении с рейкой.

3. Учитывая, что угловая скорость и ускорение колес, соединенных бесконечным ремнем или находящихся в зацеплении, обратно пропорциональны радиусам, найти угловые скорости и ускорения колёс 2, 3, 4.

4. Зная угловую скорость, вычислить линейную скорость точки В по формуле $v = \omega_4 R$, где радиус R зависит от решаемого варианта, ω_4 -- угловая скорость вращения колеса 4.

5. Зная угловую скорость ω_4 и угловое ускорение ϵ_4 колеса 4, вычислить вращательное (касательное или тангенциальное) и центростремительное (нормальное) ускорения точки В, соответственно по формулам $a_B^t = \epsilon_4 R$, $a_B^n = \omega_4^2 R$.

6. По найденному касательному и нормальному ускорениям найти полное ускорение точки В.

7. Определить скорость и ускорение груза Е, учитывая, что скорость и ускорение груза равны линейной скорости и касательному ускорению точки обода колеса решаемого варианта задачи.

При решении следует учитывать, что если $w > 0$, то при $e > 0$ вращение колеса - ускоренное, а при $e < 0$ его вращение -- замедленное, а если $w < 0$, то наоборот.

14.2.1. Задача К2

Дано: $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, $r_2 = 6$ см, $a_2 = 8$ см, $R_2 = 12$ см, $r_3 = 8$ см,

$R_3 = 16$ см, $r_4 = 6$ см, $a_4 = 12$ см, $R_4 = 24$ см, $S = 20t^2$.

Определить: $w_2, e_2, v_E, a_E, v_B, a_B$.

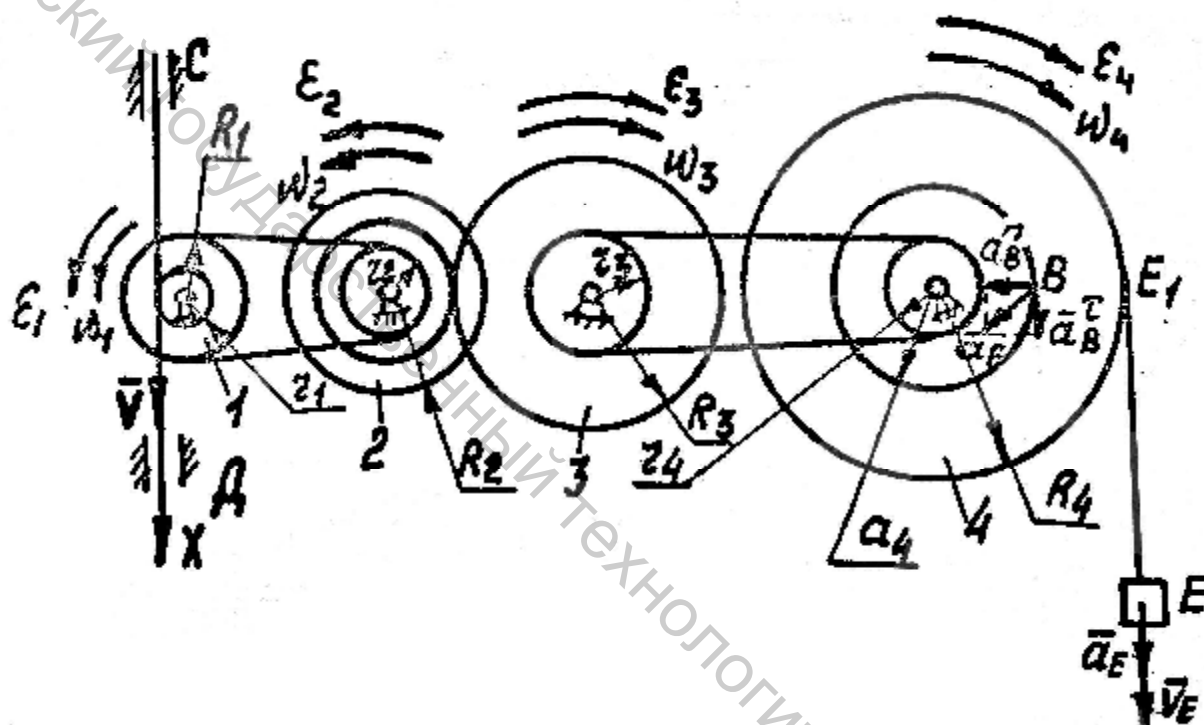


Рис. 14.2

Зная закон движения рейки, определим скорость её перемещения вдоль оси x . Ось x направим как указано на рис.14.2. $v = |\dot{x}| = |\dot{s}|$. Найдем

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(20t^2)}{dt} = 40t.$$

При $t_1 = 2$ с $\frac{ds}{dt} = 40 \cdot 2 = 80$ см/с. Так как $\frac{ds}{dt} > 0$, то скорость рейки направлена в положительную сторону отсчёта координаты x .

Так как рейка CD находится в зацеплении с колесом 1, то скорости рейки и колеса 1 в точке касания одинаковы. Поэтому $v = 40t = w_1 \cdot r_1$. Откуда угловая скорость $w_1 = \frac{40t}{r_1} = \frac{40}{2}t = 20t$ и направлена в сторону скорости. Следовательно, колесо 1 вращается против хода часовой стрелки. При $t_1 = 2$ с $w_1 = 20 \cdot 2 = 40$ с⁻¹.

Угловое ускорение первого колеса $e_1 = \frac{dw_1}{dt} = (20t)' = 20 \text{ с}^{-1}$. Знаки w_1 и e_1 совпадают, значит, колесо 1 вращается ускоренно.

Угловые скорости (и угловые ускорения) колес, находящихся в зацеплении, или соединенных ременной передачей, обратно пропорциональны их радиусам.

Отсюда $\frac{w_1}{w_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{r_2}{R_1}$ (1). Тогда

$$w_2 = w_1 \frac{R_1}{r_2} = \frac{40 \cdot 4}{2} = 80 \text{ с}^{-1}, \quad e_2 = e_1 \frac{R_1}{r_2} = 20 \cdot \frac{4}{2} = 40 \text{ с}^{-2}.$$

Для колеса 2 w_2 и e_2 направлены против хода часовой стрелки (см. рис. 14.2).

Запишем аналогичные соотношения для колес 2-3 и 3-4:

$$\frac{w_3}{w_2} = \frac{e_3}{e_2} = \frac{a_2}{R_3}, \text{ откуда } w_3 = w_2 \frac{a_2}{R_3} = 80 \frac{8}{16} = 40 \text{ с}^{-1},$$

$$e_3 = e_2 \frac{a_2}{R_3} = 40 \frac{8}{16} = 20 \text{ с}^{-2},$$

$$\frac{w_4}{w_3} = \frac{e_4}{e_3} = \frac{r_3}{r_4}, \text{ откуда } w_4 = w_3 \frac{r_3}{r_4} = 40 \frac{8}{6} = \frac{160}{3} = 53,3 \text{ с}^{-1},$$

$$e_4 = e_3 \frac{r_3}{r_4} = 20 \frac{8}{6} = \frac{80}{3} = 26,7 \text{ с}^{-2}.$$

При внешнем зацеплении колёс угловая скорость колеса 3 направлена в сторону, противоположную угловой скорости w_2 . Поэтому колесо 3 вращается, в соответствии с расчётом, ускоренно по ходу часовой стрелки. Колесо 4 связано с колесом 3 нескрепляющей ременной передачей. Их направления вращения совпадают: колесо 4 вращается ускоренно по ходу часовой стрелки.

Ускорение точки В колеса $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_B^n$. По модулю

$$a = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{(e_4 a_4)^2 + (w_4^2 a_4)^2} = a_4 \sqrt{e_4^2 + w_4^4} = \\ = 12 \cdot \sqrt{26,7^2 + 53,3^4} = 12 \cdot 2900 = 34800 \text{ см/с}^2.$$

Скорость точки В $\mathbf{v}_B \perp O_4B$ и направлена в сторону w_4 , а ее модуль $v_B = w_4 a_4 = \frac{160}{3} \cdot 12 = 640 \text{ см/с}$. Скорость груза Е $v_E = v_{E_1} = w_4 R_4 = 1280 \text{ см/с}$.

Ускорение груза Е $a_E = a_{E_1} = e_4 R_4 = \frac{80}{3} \cdot 24 = 640 \text{ см/с}^2$. Следовательно, $w_2 = 80 \text{ с}^{-1}$, $e_2 = 40 \text{ с}^{-2}$, $v_E = 1280 \text{ см/с}$, $a_E = 640 \text{ см/с}^2$, $v_B = 640 \text{ см/с}$, $a_B = 34800 \text{ см/с}^2$, что и требуется определить по условию задачи в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$.

14.3. Исследование плоскопараллельного движения твердого тела

При решении задачи КЗ требуется определить скорости различных точек механизма, угловые скорости вращения различных его звеньев, ускорения точек А или В и угловое ускорение вращения звена АВ.

В зависимости от решаемого варианта и указанных в таблицах искомых величин последовательность решения каждой задачи будет несколько отличаться между собой. Методика их решения одинакова для всех вариантов, здесь не излагается и достаточно подробно изложена в основных методических указаниях по теоретической механике и содержится в учебнике в примерах выполнения подобных задач. Рассмотрим пример выполнения задачи КЗ.

14.3.1. Задача К-3

Дано: $l_1 = 0,4 \text{ м}$, $l_2 = 1,2 \text{ м}$, $l_3 = 1,4 \text{ м}$, $\alpha = 0^\circ$, $b = 150^\circ$, $g = 30^\circ$, $j = 0^\circ$, $q = 60^\circ$, $V_B = 6 \text{ м/с}$, $a_B = 8 \text{ м/с}^2$.

Определить: V_A , V_E , w_{AB} , a_A , e_{AB} .

Решение:

Определим скорость точки А и В механизма и угловую скорость звена АВ.

Точка А принадлежит стержню АВ механизма, который движется плоскопараллельно. Для определения скорости точки А механизма и угловой скорости звена АВ воспользуемся понятием о мгновенном центре скоростей.

Скорость точки В задана. Известно направление скорости точки А: перпендикулярно кривошипу O_1A (рис. 14.3). Находим положение мгновенного центра скоростей P_{AB} звена АВ. Это – точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ в точках А и В. Из $\square P_{AB}AB$ видно, что угол

$$\angle ABP_{AB} = 30^\circ, \quad AP_{AB} = AB \sin 30^\circ = 1,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,6 \text{ см}, \quad BP_{AB} = AB \cdot \cos 30^\circ = 1,2 \cdot \cos 30^\circ = 1,04 \text{ см}.$$

$$\text{Угловая скорость звена АВ } w_{AB} = \frac{V_{AB}}{BP_{AB}} = \frac{6}{1,04} = 5,76 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость точки А $\vec{V}_A \perp P_{AB}A$, а ее модуль

$$V_A = w_{AB} \cdot P_{AB}A = 5,67 \cdot 0,6 = 3,5 \text{ м/с}.$$

$$\text{Угловая скорость звена } O_1A \text{ } w_{O_1A} = \frac{V_A}{O_1A} = \frac{3,5}{0,4} = 8,7 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения скорости точки А можно воспользоваться также теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Тогда $V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 30^\circ$. Откуда

$$V_A = V_B \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = V_B \operatorname{ctg} 60^\circ = 6 \cdot 0,5774 = 3,46 \approx 3,5 \text{ м/с}.$$

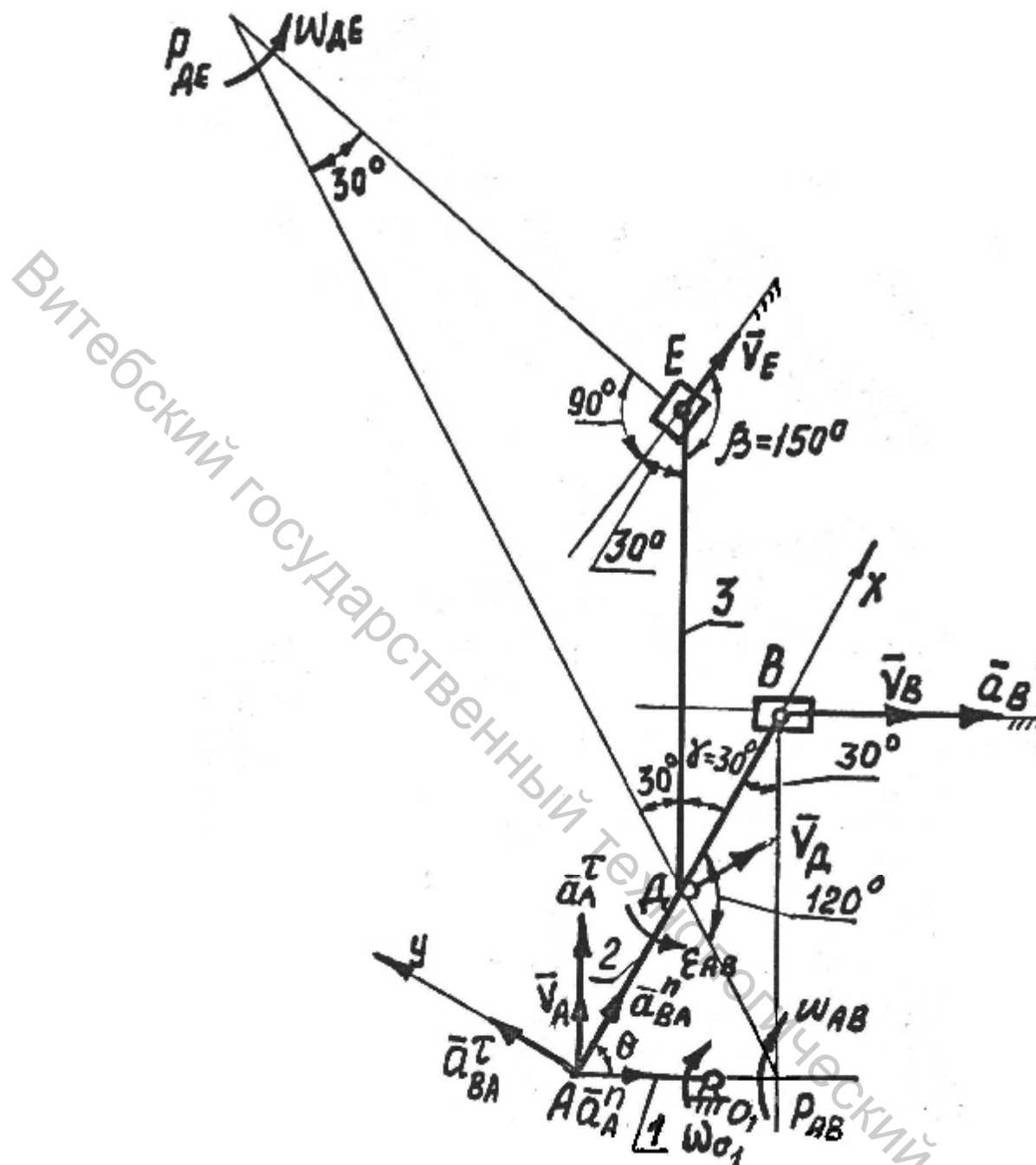


Рис. 14.3

Скорость V_A точки A, определенная разными способами, равна 3,5 м/с.

Скорость точки E звена DE определяется аналогично, как и скорость точки A. Чтобы определить $\dot{V}_E$, надо знать скорость точки D этого же звена DE. Но $\dot{V}_D \perp P_{AB}D$, а по модулю $V_D = w_{AB} \cdot P_{AB}D$. В этом выражении угловая скорость звена AB w_{AB} определена выше, а расстояние $P_{AB}D$ точки D до мгновенного центра скоростей P_{AB} неизвестно и определяется из $\triangle ADP_{AB}$.

Треугольник $\triangle ADP_{AB}$ равносторонний, так как $AP_{AB} = 0,6$ м (найдено выше), $AD = \frac{AB}{2} = 0,6$ м (по условию), $q = 60^\circ$. Поэтому, остальные два угла этого

треугольника равны также по 60° . Тогда $P_{AB}D = AP_{AB} = AD = 0,6$ м, а $V_D 5,76 \cdot 0,6 = 3,5$ м/с.

Находим положение мгновенного центра скоростей P_{DE} звена DE. Это - точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$ в точках D и E. Из $\square DEP_{DE}$ находим $\angle DEP_{DE} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, $\angle P_{DE}DE = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, значит $\angle EP_{DE}D = 30^\circ$, а $\square P_{DE}ED$ равнобедренный. Поэтому,

$$DE = P_{DE}E = 1,4 \text{ м}, P_{DE}D = 2 \cdot DE \cos 30^\circ = 2 \cdot 1,4 \cdot \cos 30^\circ = 2,42 \text{ м}.$$

Зная скорость $\vec{V}_D$, угловую скорость звена DE определим из выражения

$$w_{DE} = \frac{V_D}{P_{DE}D} = \frac{3,5}{2,42} = 1,45 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость $\vec{V}_E \perp P_{DE}E$, а модуль скорости точки E $V_E = w_{DE} \cdot P_{DE}E = 1,45 \cdot 1,4 = 2,03$ м/с. Учитывая, что угловую скорость w_{DE} по условию задачи определять не требуется, то скорость V_E целесообразно определить на основании теоремы о проекции скоростей двух точек плоской фигуры. Тогда $V_E \cdot \cos 30^\circ = V_D \cdot \cos 60^\circ$. Отсюда

$$V_E = V_D \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 3,5 \cdot 0,5774 = 2,03 \text{ м/с}.$$

Как видно, определение скорости точки E вторым способом здесь значительно проще, чем с использованием понятия о мгновенном центре скоростей.

Определим ускорение точки A и угловое ускорение e_{AB} звена AB. При их определении следует исходить из векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}$, где, учитывая, что точка A движется по окружности, $\vec{a}_A = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n$, а ускорение точки A во вращательном движении вокруг полюса B определится из равенства $\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^t + \vec{a}_{AB}^n$. Тогда можно записать:

$$\vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^t + \vec{a}_{AB}^n. \quad (14.1)$$

Определим по модулю некоторые входящие в данное равенство выражения.

Нормальное ускорение точки A направлено от A к O, а по модулю

$$a_A^n = w_{O_1A}^2 \cdot O_1A = 8,7^2 \cdot 0,4 = 30,6 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение $\vec{a}_{AB}^n$ направлено к полюсу B, а по модулю

$$a_{AB}^n = w_{AB}^2 \cdot AB = 5,76^2 \cdot 1,2 = 40 \text{ см/с}^2.$$

Предположим, что движения звеньев O_1A и AB ускоренные и направим касательное и вращательное ускорения так, как указано на чертеже. При этом $\vec{a}_A^t \perp \vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_{AB}^t \perp \vec{a}_{AB}^n$.

Спроектируем векторное равенство (14.1) на ось X:

$$a_A^t \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ = a_B \cos 60^\circ + a_{AB}^n,$$

$$a_A^t \cos 30^\circ + 30,6 \cdot 0,5 = 8 \cdot 0,5 + 40.$$

Откуда $a_A^t = 33 \text{ см/с}^2$. Тогда ускорение точки А

$$a_A = \sqrt{(a_A^t)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{33^2 + 30,6^2} = 44,7 \text{ см/с}^2.$$

Для определения углового ускорения e_{AB} звена АВ спроектируем векторное равенство (14.1) на ось Y, перпендикулярную АВ,

$$a_A^t \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ = a_B \sin 60^\circ + a_{AB}^t,$$

$$33 \cdot 0,5 - 30,6 \cdot 0,866 = -8 \cdot 0,866 + a_{AB}^t.$$

Откуда $a_{AB}^t = -3,1 \text{ м/с}^2$. Знак «минус» показывает, что направление противоположно показанному на рис. 14.3. Поэтому стержень АВ вращается вокруг полюса В с угловым ускорением e_{AB} , направленным против хода часовой стрелки.

Из формулы $a_{AB}^t = e_{AB} \cdot AB$ находим $e_{AB} = \frac{|a_{AB}^t|}{AB} = \frac{3,1}{1,2} = 2,58 \text{ с}^{-2}$.

Кинематические характеристики механизма сведены в таблицу 14.1.

Таблица 14.1

V_A	V_E	w_{AB}	a_A	e_{AB}
см/с	см/с	1/с	см/с ²	1/с ²
3,5	2,03	5,76	44,7	2,58

Результаты расчётов могут быть проверены выполненными в масштабе графическими построениями.

14.4. Сложное движение точки

14.4.1. Основные понятия и последовательность решения задач на сложное движение точки

При решении задач механики иногда оказывается целесообразным рассматривать движение точки по отношению к двум системам отсчёта, из которых одна принимается условно за неподвижную, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой, называется составным или сложным.

Основная задача кинематики в случае сложного движения точки заключается в установлении связи между абсолютным движением точки, относительным движением и движением точки вместе с подвижной системой координат (переносным движением), что позволит решать следующие задачи:

1. По заданному относительному движению точки и переносному движению подвижной системы определить абсолютное движение точки и, следовательно, определить ее траекторию, скорость и ускорение в этом движении.

2. Заданное сложное движение точки разложить на составляющие.

Разложение движения точки на составляющие движения является полезным в тех случаях, когда при соответствующем выборе подвижной системы отсчёта относительное и переносное движения оказываются более простыми, чем изучаемое движение точки относительно неподвижной системы отсчёта.

При изучении сложного движения точки приходится различать абсолютную, относительную и переносную скорости этой точки, а также её абсолютное, относительное и переносное ускорения.

Абсолютной скоростью $\dot{\vec{V}}_A$ и абсолютным ускорением $\dot{\vec{a}}$ точки М называются соответственно её скорость и ускорение в движении этой точки по отношению к неподвижной системе отсчёта.

Относительной скоростью $\dot{\vec{V}}_r$ и относительным ускорением $\dot{\vec{a}}_r$ точки М называется соответственно её скорость и ускорение в движении этой точки по отношению к подвижной системе отсчёта.

Из определения следует, что при вычислении $\dot{\vec{V}}_r$ и $\dot{\vec{a}}_r$ оси $O_1X_1Y_1Z_1$ можно считать неподвижными.

Переносной скоростью $\dot{\vec{V}}_e$ и переносным ускорением $\dot{\vec{a}}_e$ точки М называются соответственно скорость и ускорение той, неизменно связанной с подвижной системой отсчёта точки, с которой в данный момент совпадает точка М.

Или, иначе, переносной скоростью и переносным ускорением точки М называются соответственно та скорость и то ускорение, которые имела бы в данный момент эта точка, если бы она неизменно была связана с подвижной системой отсчёта.

Основную задачу изучения сложного движения можно также определить следующим образом: она состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движения точки.

Зависимость между абсолютной, переносной и относительной скоростями точки, совершающей сложное движение, определяется теоремой сложения скоростей, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей $\dot{\vec{V}}_a = \dot{\vec{V}}_e + \dot{\vec{V}}_r$.

Если абсолютная скорость известна по величине и направлению, то переносную и относительную скорости можно найти разложением вектора скорости на направление переносной и относительной скоростей.

Зависимость между ускорениями точки в абсолютном, относительном и переносном движениях определяются теоремой сложения ускорений, или так называемой теоремой Кориолиса $\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{a}}_e + \dot{\vec{a}}_r + \dot{\vec{a}}_k$, где $\dot{\vec{a}}$ - абсолютное ускорение точки; $\dot{\vec{a}}_e$ - переносное ускорение точки; $\dot{\vec{a}}_r$ - её относительное ускорение; $\dot{\vec{a}}_k$ - ускорение Кориолиса.

Для определения относительного ускорения следует мысленно отвлечься от переносного движения и вычислить относительное ускорение по правилам кинематики точки. Для определения переносного ускорения следует мысленно остановить относительное движение точки и вычислить переносное движение по правилам кинематики точки, как ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Если траектории точек подвижной системы координат не прямолинейны и относительное движение точки является криволинейным, то целесообразно вычислять переносное ускорение $\dot{\mathbf{a}}_e$ как геометрическую сумму нормального $\dot{\mathbf{a}}_e^n$ и касательного $\dot{\mathbf{a}}_e^t$ переносных ускорений, т.е. $\dot{\mathbf{a}}_e = \dot{\mathbf{a}}_e^n + \dot{\mathbf{a}}_e^t$; относительное ускорение $\dot{\mathbf{a}}_r$ как геометрическую сумму нормального $\dot{\mathbf{a}}_r^n$ и касательного $\dot{\mathbf{a}}_r^t$ относительных ускорений. При этом формула для определения ускорения точки записывается в следующем виде: $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_e^n + \dot{\mathbf{a}}_e^t + \dot{\mathbf{a}}_r^n + \dot{\mathbf{a}}_r^t + \dot{\mathbf{a}}_k$.

При переносном поступательном движении переносные скорость и ускорение будут одинаковы для всех точек.

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле $\dot{\mathbf{a}}_k = 2 \cdot \dot{\mathbf{w}}_e \times \dot{\mathbf{V}}_r$, где $\dot{\mathbf{w}}_e$ - вектор угловой скорости переносного движения, $\dot{\mathbf{V}}_r$ - вектор относительной скорости.

Чтобы определить направление вектора $\dot{\mathbf{a}}_k$, которое совпадает с направлением векторного произведения $\dot{\mathbf{w}}_e \times \dot{\mathbf{V}}_r$, нужно мысленно перенести вектор угловой скорости переносного движения $\dot{\mathbf{w}}_e$ в движущуюся точку М и провести плоскость, проходящую через векторы $\dot{\mathbf{w}}_e$ и $\dot{\mathbf{V}}_r$. Кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\dot{\mathbf{w}}_e$ и $\dot{\mathbf{V}}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\dot{\mathbf{w}}_e$ к $\dot{\mathbf{V}}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

Для определения направления $\dot{\mathbf{a}}_k$ можно также пользоваться следующим правилом Н.Е. Жуковского: чтобы получить направление ускорения Кориолиса $\dot{\mathbf{a}}_k$, достаточно спроектировать вектор $\dot{\mathbf{V}}_r$ на плоскость, перпендикулярную $\dot{\mathbf{w}}_e$ и повернуть эту проекцию на угол 90° вокруг $\dot{\mathbf{w}}_e$ в направлении переносного вращения.

Вектор, равный по модулю $2w_e \cdot V_r \sin \alpha$ и имеющий найденное направление, и будет кориолисовым ускорением.

Правило Жуковского в некоторых случаях облегчает нахождение вектора $\dot{\mathbf{a}}_k$ в пространстве.

Искомое ускорение точки определяем по его проекции на выбранные оси координат. При этом следует иметь в виду, что проекция абсолютного ускорения на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих ускорений на ту же ось.

Необходимо заметить, что в случае переносного поступательного движения угловая скорость данного движения равна нулю, тогда обращается в нуль и кориолисово ускорение. Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении упрощается: $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_e + \dot{\mathbf{a}}_r$.

Кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях.

1. Когда $w_e = 0$, т.е. когда переносное движение является поступательным или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль.

2. Когда $V_r = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль.

3. Когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^\circ$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения или если в данный момент времени вектор $\dot{V}_r$ параллелен этой оси.

При решении задач на сложное движение точки рекомендуется такая последовательность.

1. Разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения.

2. Выбрать две системы координат: подвижную и неподвижную.

3. Мысленно остановить переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении.

4. Мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения, скорость и ускорение точки в переносном движении.

5. По известным угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки.

6. Применив теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость точки.

7. Пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат.

8. По найденным проекциям абсолютного ускорения найти искомое абсолютное ускорение точки по величине и направлению.

14.4.2. Задача К4

Дано: $j = t^2 - 2t^3$, $a = 16$ см, $AM = 60(t^4 - 3t^2) + 56$ (см), $t = 1$ с.

Определить: абсолютную скорость V и абсолютное ускорение a точки М.

Решение:

При решении задачи считаем движение точки по пластине относительным, а вращательное движение самой пластины - переносным. Выбираем подвижную X_1AY_1 и неподвижную XOY системы координат (рис. 14.4).

Определим положение точки на пластинке в момент времени $t = 1$ с:

$$AM = S = 60(1 - 3) + 56 = -120 + 56 = -64 \text{ см.}$$

Знак «минус» показывает, что точка М перемещается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта расстояния АМ вниз вдоль оси относительно точки А.

Точка М совершает сложное движение. Относительное движение - это движение точки М по пластинке вдоль оси AY , а переносным движением будет вращение системы координат X_1AY_1 , неизменно связанной с пластиной, относительно неподвижной системы координат XOY .

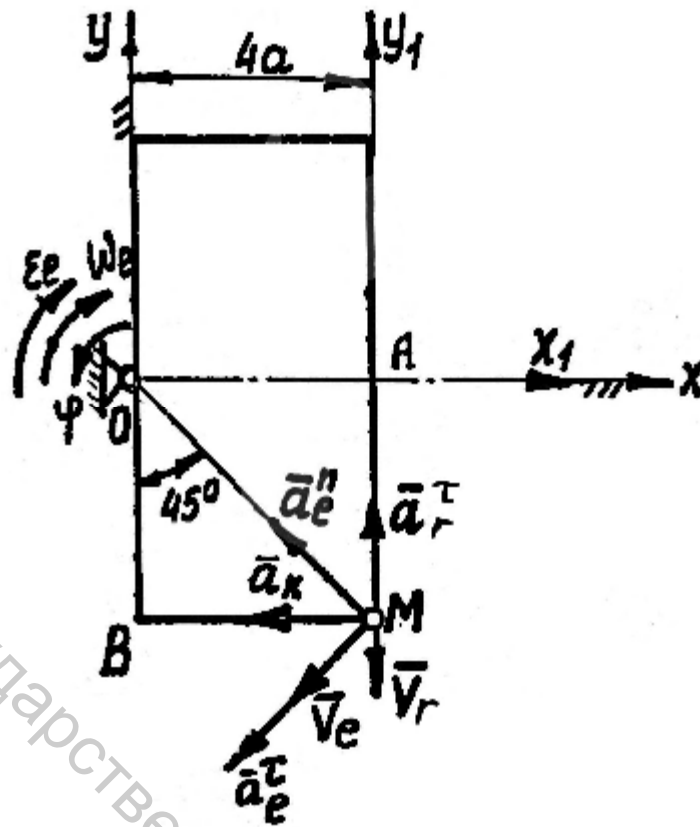


Рис. 14.4

Абсолютная скорость $\dot{V} = \dot{V}_r + \dot{V}_e$.

Относительная скорость $V_r = \dot{s}$; $\dot{s} = 60(4t^3 - 6t)$.

При $t = 1$ с $\dot{s} = 60(4 - 6) = -120$ см/с, знак «минус» показывает, что вектор $\dot{V}_r$ направлен вниз вдоль оси Ay_1 относительно точки A, в сторону отрицательных значений.

$$s_r = AM, |\dot{V}_r| = 120 \text{ см/с.}$$

Переносная скорость

$$V_e = \omega_e \cdot OM,$$

где $OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{(4 \cdot 16)^2 + 64^2} = 64\sqrt{2}$ см, так как $\triangle OAM$ - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $OA = 4 \cdot 16 = 64$ см; $AM = 64$ см, и $\angle BOM = \angle AOM = 45^\circ$. Модуль угловой скорости $\omega_e = |\dot{\varphi}|$, $\dot{\varphi} = 2t - 6t^2$, при $t = 1$ с $\dot{\varphi} = 2 - 6 = -4$ с⁻¹, знак «минус» показывает, что пластинка вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ (рис. 14.4), по часовой стрелке, а вектор $\dot{\omega}_e$ перпендикулярен плоскости XOY чертежа и направлен вдоль оси, проходящей через точку O, за чертеж.

$$\omega_e = |\dot{\varphi}| = 4 \text{ с}^{-1}, V_e = 64\sqrt{2} \cdot 4 = 362 \text{ см/с.}$$

Вектор $\dot{V}_e \perp OM$ и направлен в сторону ω_e в сторону вращения пластины.

Угол между $\dot{V}_e$ и $\dot{V}_r$ равен 45° , тогда

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_r V_e \cos 45^\circ} = \sqrt{120^2 + 362^2 + 2 \cdot 120 \cdot 362 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 451 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$, или $\vec{a} = \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$.

Относительное касательное ускорение

$$a_r^t = \dot{\omega}; \quad \omega = [60(4t^3 - 6t)]' = 60(12t^2 - 6).$$

При $t = 1 \text{ с}$ $\omega = 60 \cdot 6 = 360 \text{ см/с}$, $a_r^t = 360 \text{ см/с}^2$ и направлено противоположно $\vec{V}_r$ так как $V_r = -120 \text{ см/с}$.

Относительное движение точки М направлено по прямой АВ, поэтому

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = \frac{V_r^2}{\infty} = 0.$$

Переносное касательное ускорение $a_e^t = e \cdot OM$, где угловое ускорение $e = \dot{\omega}$, $\omega = (2t - 6t^2)' = 2 - 12t$. При $t = 1 \text{ с}$ $\omega = 2 - 12 = -10 \text{ с}^{-2}$. Знаки $\dot{\omega}$ и ω совпадают, значит, вращение пластинки ускоренное, направления $\vec{\omega}_e$ и $\vec{e}_e$ совпадают.

$$|e_e| = |\omega| = 10 \text{ с}^{-2}, \quad a_e^t = 10 \cdot 64\sqrt{2} = 980 \text{ см/с}^2.$$

Переносное нормальное ускорение $a_e^n = \omega^2 \cdot OM = 16 \cdot 64\sqrt{2} = 1450 \text{ см/с}^2$ и направлено от М к О.

Ускорение Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 2 \cdot 4 \cdot 120 \cdot \sin 90^\circ = 960 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_k$ направлен в соответствии с векторным равенством параллельно оси ОХ (рис. 14.4).

Модуль абсолютного ускорения определим методом проекций:

$$a_x = -a_e^t \cos 45^\circ - a_e^n \cos 45^\circ - a_k = -\cos 45^\circ (980 + 1450) - 960 = -2670 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_r^t - a_e^t \cos 45^\circ + a_e^n \cos 45^\circ = 360 - \cos 45^\circ (980 - 1450) = 696 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2670)^2 + 696^2} = 2770 \text{ см/с}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг, Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий. – М.: Высш. шк., 1965.– 420 с.
2. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб. пособие для втузов. Т.1: Статика. Кинематика/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.– М.: Наука, 1990.– 672 с.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. Учебник для втузов. Т.1: Статика и кинематика/ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – 239 с.
4. Воронков, И.М. Курс теоретической механики: Учебник для втузов/ И.М. Воронков. – М.: Наука, 1964. – 596 с.
5. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики: Учебник для втузов/ В.В. Добронравов, А.Л. Дворников, Н.Н. Никитин. – М.: Высш.шк., 1974. – 528 с.
6. Козырев, Ю.Г. Промышленные роботы: Справочник/ Ю.Г. Козырев. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
7. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ И.В. Мещерский. – 36-е изд. испр. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
8. Мисюров, М.И. Методика решения задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ М.И. Мисюров. – М.: Высш.шк., 1962.– 308 с.
9. Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота – манипулятора/ Р. Пол. - М.: Наука, 1976. 104 с.
10. Тарг, С.М. Курс теоретической механики: Учебник для втузов/ С.М. Тарг. – М.: Наука, 1986.– 416 с.
11. Фролов, К.В. Механика промышленных роботов. Учебник для втузов. Ч. 1: Кинематика и динамика/ К.В. Фролов, Е.И. Воробьев. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
12. Чернышева, И.Н. Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов: Учеб. пособие для студ. вузов/ И.Н. Чернышева, А.К. Мусатов, Н.А. Глухов. – М.: МГТУ, 1990. – 80с.: ил.
13. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Учебник для втузов. Ч.1: Статика. Кинематика/ А.А. Яблонский, В.А. Никифорова. – 6-е изд. испр. – М.: Высш.шк., 1971. – 488 с.
14. Теоретическая механика: Программа курса для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений/ № ТД-224/тип.– Мн., 2002.– 26 с.
15. Локтионов, А.В. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ: Учеб. пособ. для студ. техн. спец. вузов/ А.В. Локтионов., Л.Г. Крыгина; ВГТУ. – Витебск, 1998. – 189 с.
16. Локтионов, А.В. Расчет кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом/ А.В. Локтионов// Теорет. и прикладная механика: Межвед. сб. науч. метод. ст. – Мн., 2003.- С. 59-63.

17. Локтионов, А.В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом/ А.В. Локтионов// Теорет. и приклад. механика. – 2004. – Вып. 17. – С. 115-118.

18. Локтионов, А.В. Расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности/ А.В. Локтионов, А.В. Гусаков // Вестник Полоц. гос. ун-та.– 2004. – №4. – С. 99-102. – (Сер. С, Фундам. науки.)

19. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений/ Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг и др.; Под ред. С.М. Тарга. – 4 изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.: ил.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Локтионов Анатолий Васильевич

Крыгина Лариса Григорьевна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор В.И. Ольшанский

Технический редактор И.Л. Кудина

Корректор Т.К. Покатович

Компьютерный набор и верстка А.Н. Голубев

Подписано в печать 17.10.05. Формат 60х84/16. Бумага офсетная №1. Печать
ризографическая. Гарнитура ТАЙМС. Усл. печ. л. 11,29. Уч. изд. л. 10,5. Тираж 113 экз.
Заказ № 446.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет».
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный
технологический университет». Лицензия ЛП № 02330/0133005 от 01.04.2004.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.