

# **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

**Курс лекций**

Витебский государственный технологический университет

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
"ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ"**

***Г.Н. Федосеев, В.Н. Сакевич***

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

***КУРС ЛЕКЦИЙ***

для студентов специальностей 1-36 01 01 "Технология машиностроения",  
1-36 01 03 "Технологическое оборудование машиностроительного  
производства",  
1-36 01 04 "Оборудование и технологии высокоеффективных процессов  
обработки материалов"

**Витебск  
2012**

УДК 539.3/.6(075.8)

ББК 22.2

Ф 33

Рецензент : Ольшанский В. И., кандидат технических наук, заведующий кафедрой "Технология и оборудование машиностроительного производства".

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО "ВГТУ", протокол № 8 от 30.11. 2011.

**Ф 33 Федосеев, Г. Н. Механика материалов** : курс лекций / Г. Н. Федосеев, В. Н. Сакевич. – Витебск : УО «ВГТУ», 2011. – 182 с.

**ISBN 978-985-481-265-6**

В курсе лекций приводятся основные положения и уравнения теории упругости, теория напряженно-деформированного состояния стержневых систем и толстостенных цилиндров, теория устойчивости сжатых стержней, элементы теории колебаний стержневых систем.

**УДК 539.3/.6 (075.8)**

**ББК 22.2**

**ISBN 978-985-481-265-6**

© Федосеев Г.Н.

Сакевич В.Н., 2012

© УО "ВГТУ", 2012

## Содержание

Предисловие	4
1. Напряженное состояние в точке	5
2. Внутренние силовые факторы (ВСФ) в поперечном сечении бруса	8
3. Выражение внутренних силовых факторов (ВСФ) через напряжения	12
4. Гипотеза плоских сечений	16
5. Геометрические характеристики поперечного сечения и формула для нормальных напряжений, действующих в нем	20
6. Растяжение (сжатие) бруса: напряжения и деформации	24
7. Статически неопределенные стержневые системы, работающие на растяжение (сжатие)	28
8. Монтажная и температурная задачи на примере стержневых систем, работающих на растяжение (сжатие)	32
9. Прямой изгиб балки из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию	36
10. Прямой изгиб балки из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию	40
11. Сложное сопротивление: косой изгиб, внецентрное растяжение	45
12. Касательные напряжения при прямом поперечном изгибе	51
13. Плоское напряженное состояние	59
14. Круг Мора для напряжений	65
15. Объемное напряженное состояние	70
16. Гипотеза прочности Треска – Сен – Венана и ее обобщение по Море	75
17. Универсальное уравнение упругой кривой	82
18. Обобщенный закон Гука	89
19. Кручение круглого бруса	97
20. Гидродинамическая аналогия в теории кручения	102
21. Теорема о взаимности работ	108
22. Удельная потенциальная энергия упругих деформаций	113
23. Потенциальная энергия упругих деформаций бруса	119
24. Метод сил	125
25. Свободные колебания линейно-упругих систем	132
26. Динамические напряжения	142
27. Устойчивость равновесия упругих сжатых стержней	150
28. Продольный и продольно-поперечный изгиб	157
29. Осесимметричная задача Ламе о толстостенном цилиндре	166
30. Составные цилиндры	174
Литература	181

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций написан на основе многолетнего опыта преподавания сопротивления материалов (потом механики материалов) на кафедре сопротивления материалов и деталей машин (сейчас кафедра механики) Витебского государственного технологического университета. В курсе изложены теория простых деформаций стержня (растяжения – сжатия, изгиба, кручения), сложного сопротивления (косого изгиба, внецентренного растяжения – сжатия), теория напряженно-деформированного состояния упругого тела, гипотезы прочности, теория статически неопределеных систем, свободные и вынужденные колебания упругих систем, устойчивость равновесия сжатых стержней, их продольно-поперечный изгиб, осесимметричная задача Ламе.

Лекции сопровождаются тестами и комментариями к ним.

Лекторы признательны рецензенту профессору В.Н. Ольшанскому и редактору доценту А.А. Калинину. Сердечная благодарность Екатерине Сергеевне Максимович и Евгению Николаевичу Ильюшенко, набравшим рукопись.

Все замечания и предложения будут приняты лекторами с благодарностью. Письма просим присылать по адресу [igsakevich@yandex.ru](mailto:igsakevich@yandex.ru).

## 1 Напряженное состояние в точке

Если мысленно рассечь тело (рис. 1.1) и отбросить, например, его левую часть, в сечении «откроются» внутренние силы – силы действия отброшенной левой части тела на правую. Пусть на площадку  $\Delta A$  – окрестность точки В на рисунке 1.1 – действует внутренняя сила  $\Delta F$ . Среднее напряжение в пределах площадки  $\Delta A$

$$p_{cp} = \frac{\Delta F}{\Delta A};$$

если контур площадки стягивать к точке В, получим в пределе напряжение в точке  $B$ :

$$p_B = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

Проведем через точку  $B$  другую плоскость (показана на рисунке 1.1 штрихами), ориентация площадки  $\Delta A$  станет другой, другой будет внутренняя сила  $\Delta F$  – другим будет напряжение (1.1).

Напряжение в точке (1.1) принято разлагать (рис. 1.2) на составляющие – нормальное напряжение  $\sigma$  и касательное напряжение  $\tau$ .

Совокупность всех нормальных и касательных напряжений на всех площадках, содержащих точку, называется напряженным состоянием в точке. Напряженное состояние вполне определяется, если известны напряжения (рис. 1.4) на трех взаимно перпендикулярных площадках, содержащих точку (или взятых в бесконечной близости от точки – на гранях бесконечно малого параллелепипеда – элемента). Указанные напряжения образуют симметричную матрицу<sup>3</sup> (рис. 1.3). Всякая строка матрицы (рис. 1.3) содержит напряжения, параллельные координатной оси, всякий столбец – напряжения, действующие на одной грани элемента (перпендикулярной к координатной оси).

### Тестирование

1.1 Как изменяется в общем случае напряжение (1.1), если из пучка плоскостей, проходящих через точку  $B$ , выбрать другую плоскость – отличную от изображенной на рисунке 1.1?

#### Варианты ответа

1. Напряжение (1.1) изменяется только по величине.
2. Напряжение (1.1) изменяется только по направлению.
3. Напряжение (1.1) изменяется в общем случае по величине и направлению.

1.2 Какие из равенств, относящихся к напряжениям на рисунке

1.2: 1)  $p = \sigma + \tau$ , 2)  $\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$ , 3)  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  верные?

#### Варианты ответа

1. Верно равенство 2.
2. Верны равенства 2 и 3.
3. Верны равенства 1 и 2.

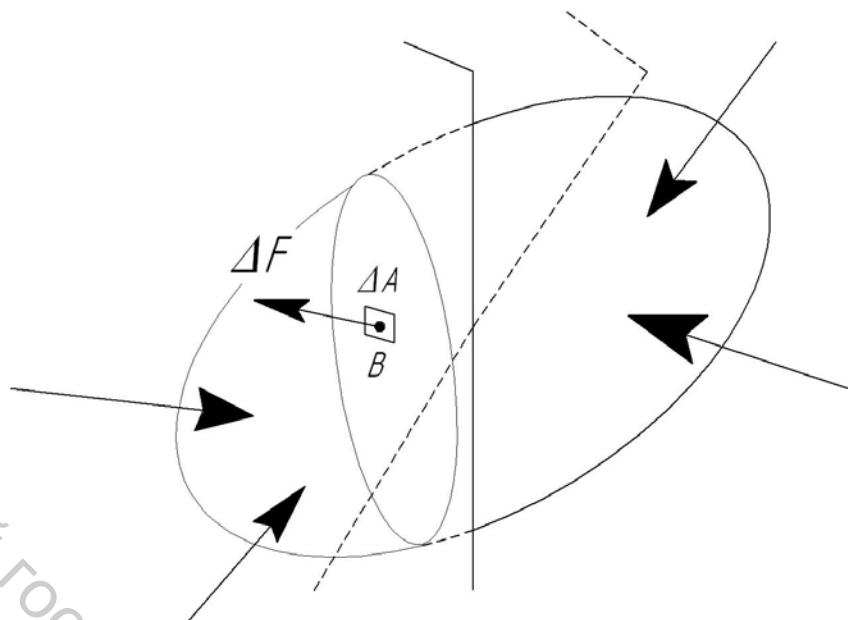


Рисунок 1.1 – К определению напряжения в точке  $B$

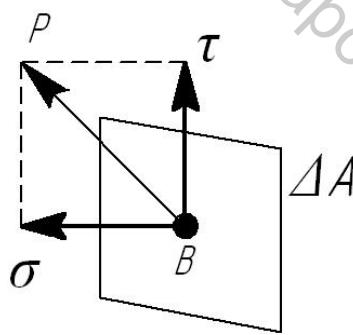


Рисунок 1.2 – Напряжения в точке  $B$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.3 – Матрица напряжений

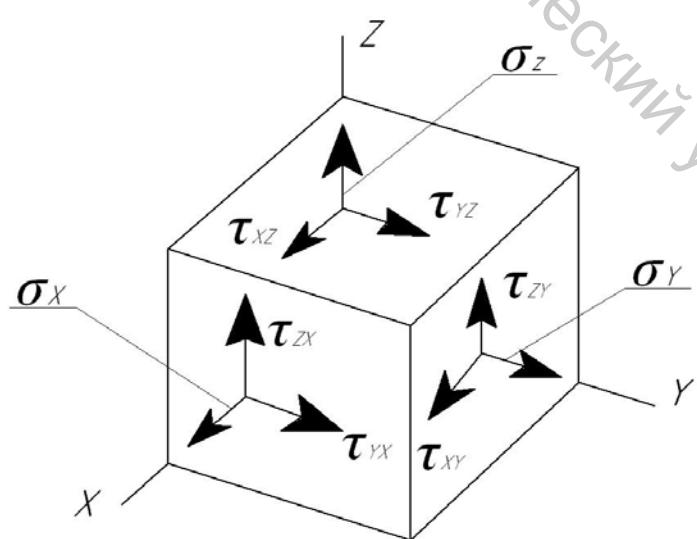


Рисунок 1.4 – Напряжения на гранях элемента

### Комментарии

1.1 Пусть через точку  $B$  проведена другая плоскость, отличная от проведенной на рисунке 1.1. Внутренние силы, действующие в пределах сечения этой плоскостью, вообще говоря, другие – и по величине, и по направлению. Другим (по величине и направлению) будет напряжение (1.1). В частном случае растяжения бруса (рис. 1.5) напряжение в точке  $B$ .

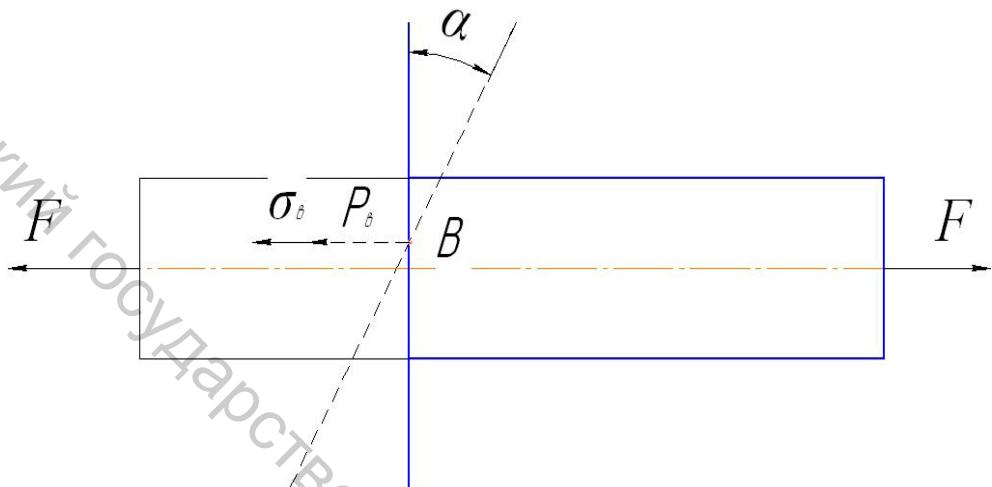


Рисунок 1.5 – Растижение бруса

$$p_B = \frac{F}{A / \cos \alpha} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma_B \cos \alpha$$

( $A$  – площадь поперечного сечения бруса) изменяется только по величине. В частном случае тела, нагруженного давлением, равномерно распределенным (рис. 1.6) по его поверхности, напряжение в точке  $B$ , нормальное к площадке, изменяется только по направлению. Правильный ответ – 3.

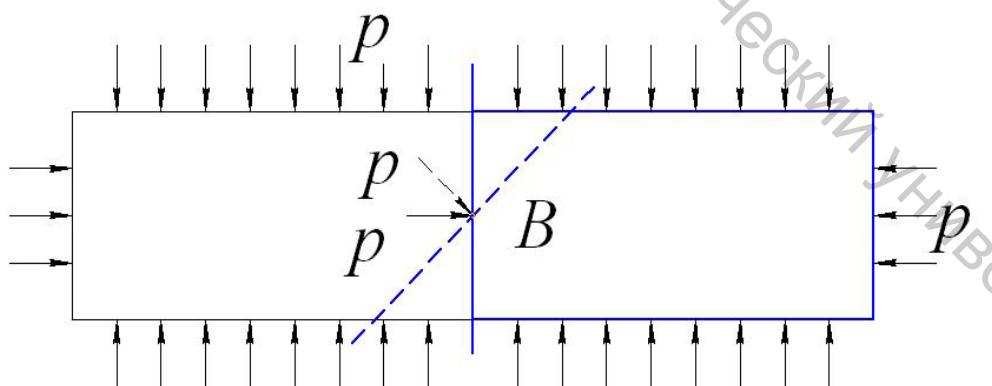


Рисунок 1.6 – Тело под давлением

1.2 Напряжение  $p_B$  на рисунке 1.2 – геометрическая сумма нормального напряжения  $\sigma$  и касательного напряжения  $\tau$  – взаимно перпендикулярных составляющих напряжения  $p_B$ . Первое утверждение

тождественно равенству 2, второе дает равенство 3. Правильный ответ – 2.

Витебский государственный технологический университет

## 2 Внутренние силовые факторы (ВСФ) в поперечном сечении бруса

Рассечем (рис. 2.1) брус (мысленно) плоскостью, перпендикулярной к его оси  $z$ . Силы, действующие на брус, разделятся на «левые» и «правые». Если действующие силы находятся в равновесии, силы и моменты  $R^{лев}$ ,  $M^{лев}$ ,  $R^{прав}$ ,  $M^{прав}$ , к которым они приводятся (рис. 2.1), равны по величине и противоположны по направлению.

«Левые» силы, действуя на левую часть бруса, «передаются» правой части через посредство внутренних сил в поперечном сечении на рисунке 2.1. Результат их приведения к центру тяжести сечения  $C$  совпадет с силой и моментом, к которым приводятся «левые» силы; они равны сумме «левых» сил и сумме моментов «левых» сил: величины их составляющих на рисунке 2.2, полученные в главных центральных (естественных) осях,

$$\begin{aligned} N_z &= \sum F_z^{\text{лев}}, Q_x = \sum F_x^{\text{лев}}, Q_y = \sum F_y^{\text{лев}}; \\ M_z &= \sum m_z(F^{\text{лев}}), M_x = \sum m_x(F^{\text{лев}}), M_y = \sum m_y(F^{\text{лев}}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

называются, соответственно, продольной и поперечными силами, крутящим и изгибающим моментами – внутренними силовыми факторами (ВСФ).

Понятно, что суммы проекций и моментов «левых» сил в выражениях (2.1) могут быть заменены равными по величине суммами проекций и моментов «правых» сил. Однако знаки их противоположны. Знаки ВСФ назначаются соответственно простым деформациям бруса, в которых они действуют (рис. 2.3). Продольная сила, например, считается положительной, если отвечает растяжению бруса; изгибающий момент на рисунке 2.3 считается положительным, если верхние «волокна» при прямом изгибе бруса сжаты, нижние растянуты, продольная ось искривлена выпуклостью вниз.

### Тестирование

2.1 Являются ли сила  $N$  и момент  $M_x$  на рисунках 2.4 и 2.5 внутренними силовыми факторами?

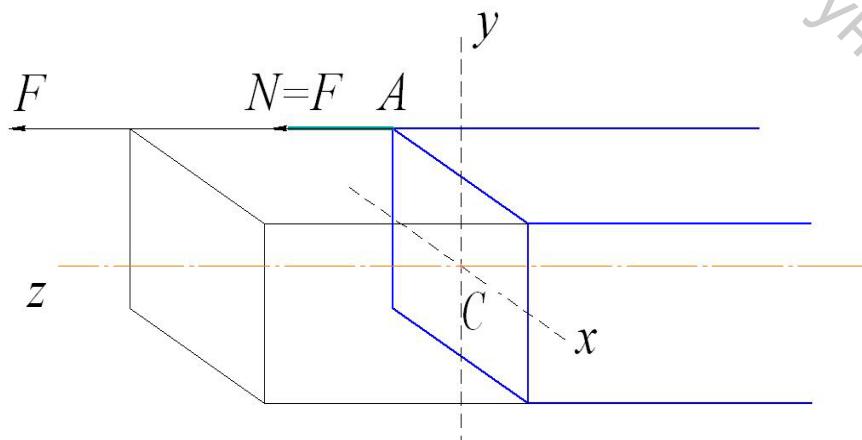


Рисунок 2.4 – Результат приведения внутренних сил к точке  $A$

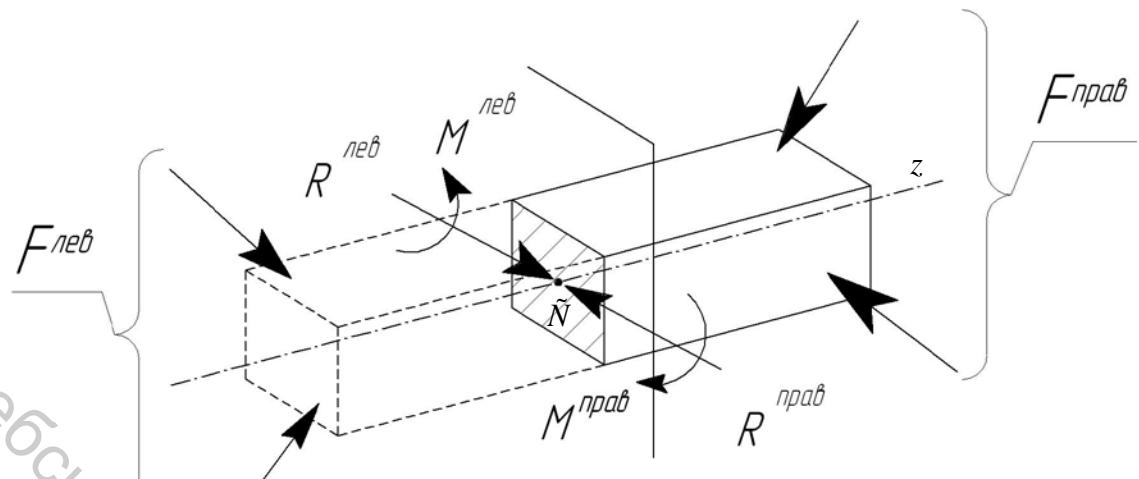


Рисунок 2.1 – Приведение «левых» и «правых» сил

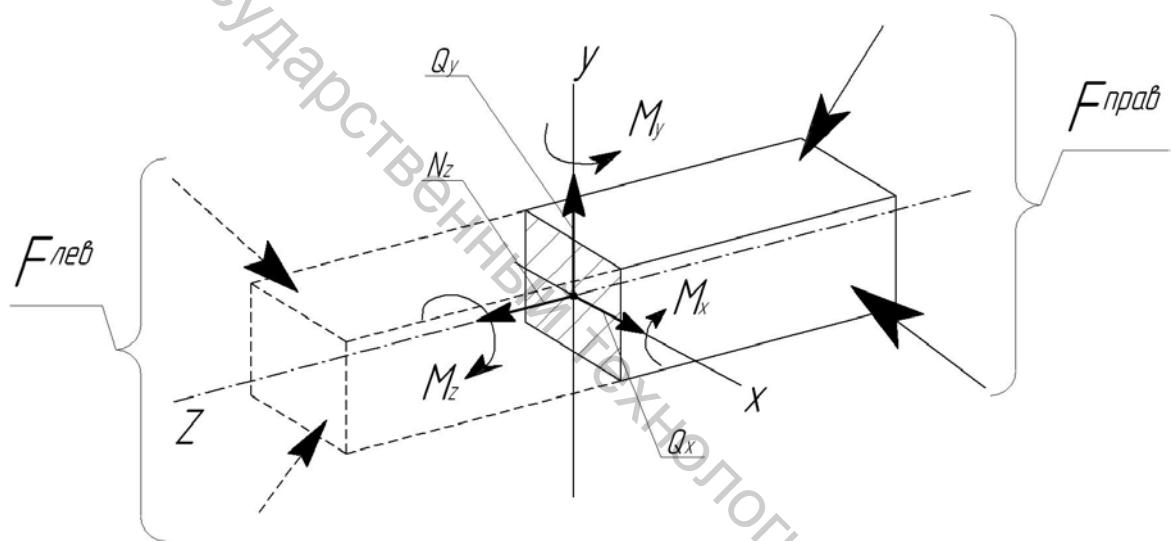


Рисунок 2.2 – Внутренние силовые факторы

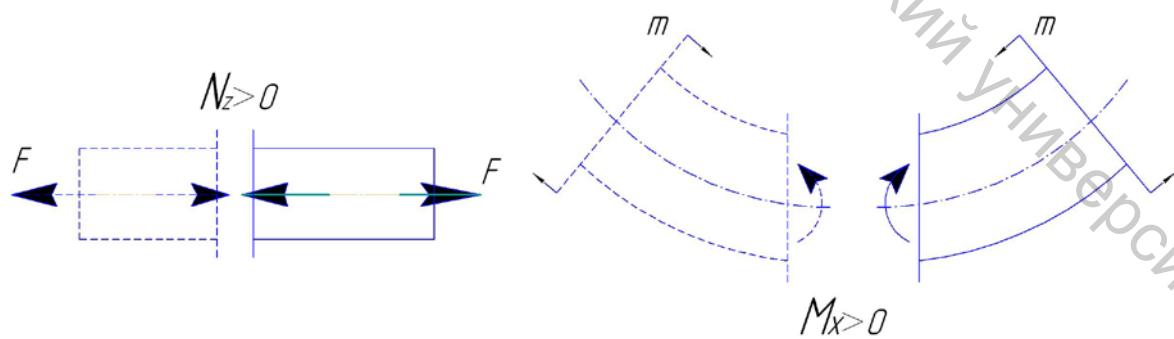


Рисунок 2.3 – Растижение и прямой изгиб бруса

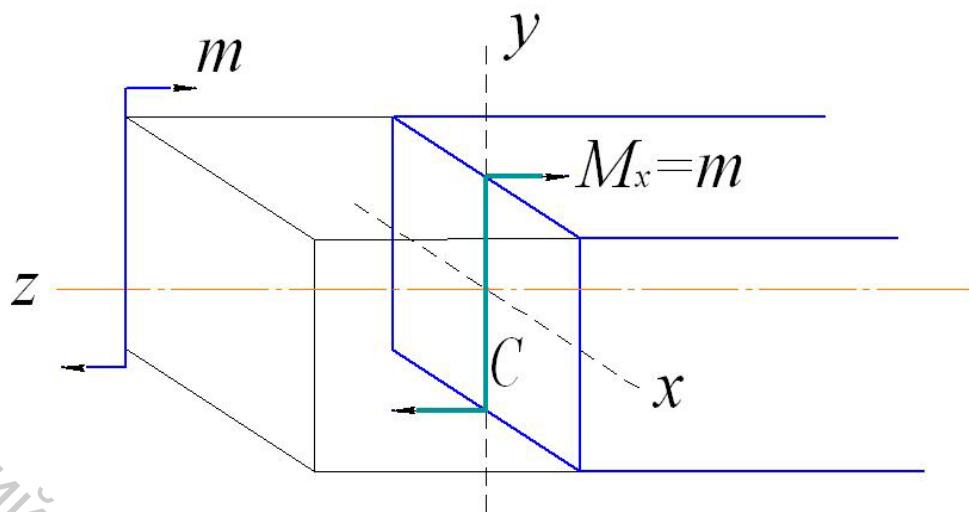


Рисунок 2.5 – Результат приведения внутренних сил к точке  $C$

Варианты ответа

1. И сила  $N$ , и момент  $M_x$  не являются внутренними силовыми факторами.
2. И сила  $N$ , и момент  $M_x$  являются внутренними силовыми факторами.
3. Сила  $N$  не является внутренним силовым фактором, момент  $M_x$  – внутренний силовой фактор.

2.2 Какой из внутренних силовых факторов в квадратном поперечном сечении бруса на рисунке 2.6 отличен от нуля?

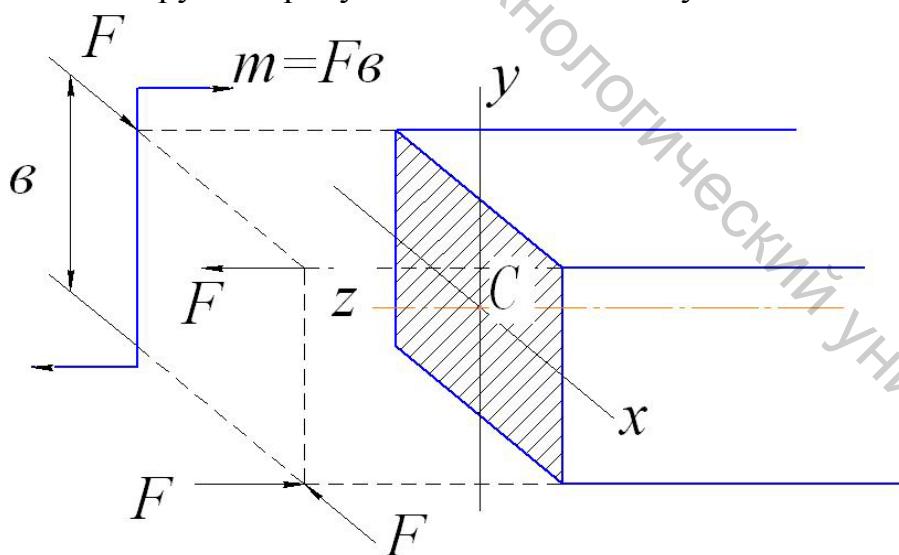


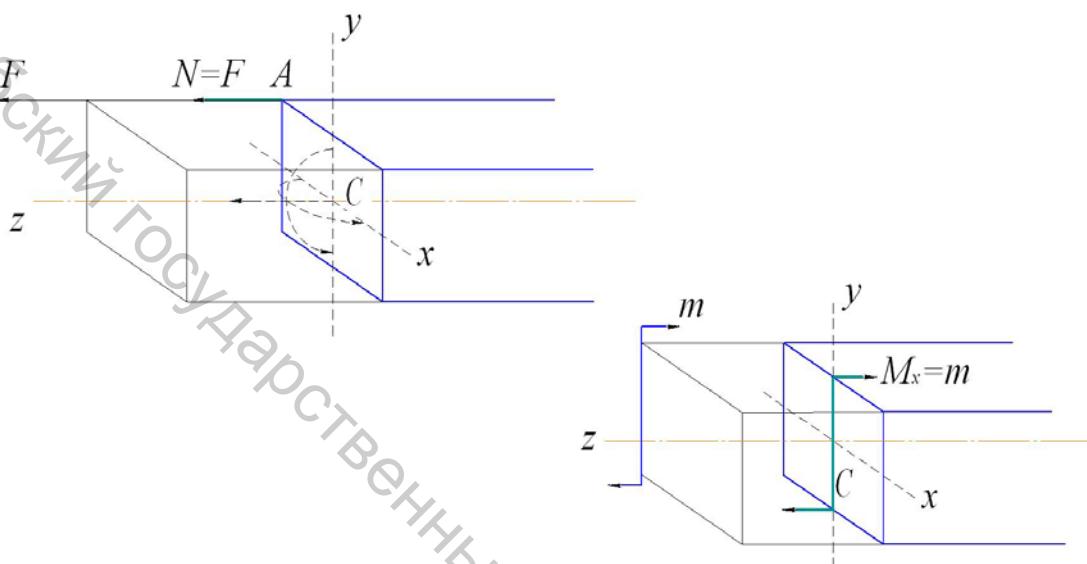
Рисунок 2.6 – К вычислению внутренних силовых факторов

Варианты ответа

1. Продольная сила  $N_z$ .
2. Крутящий момент  $M_z$ .
3. Изгибающий момент  $M_x$ .

## Комментарии

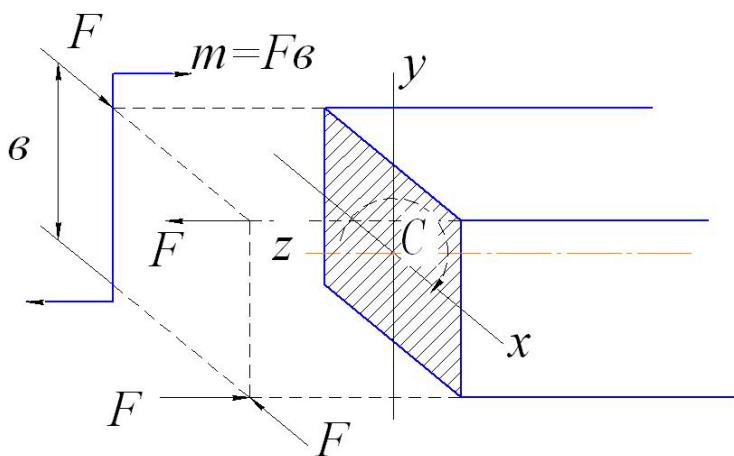
2.1 Внутренние силовые факторы – величины составляющих силы и момента – результатов приведения внутренних сил в поперечном сечении (или внешних сил, действующих по одну сторону поперечного сечения) к его центру тяжести  $C$  – началу естественных (главных центральных) осей. Сила  $N$  на рисунке 2.4 – результат приведения к вершине  $A$  угла сечения, она – не ВСФ. ВСФ показаны штриховыми стрелками.



Пару сил с моментом  $m$ , действующую на левую часть бруса на рисунке 2.5, можно перенести в любую параллельную ей плоскость, в частности, в главную плоскость инерции  $zCy$ , – представив ее моментом  $M_x$  – ВСФ.

Верен ответ 3.

2.2 Все внешние силы на рисунке 2.6 образуют пары сил, т. е. суммы их проекций (2.1) на любую из главных центральных осей инерции равны нулю – ответ 1 не верен. Равные по величине моменты в плоскостях, параллельных плоскости  $zCy$ , противоположны по направлению:  $M_x = 0$ . Перенос скручивающей пары с моментом  $F\delta$  в плоскость поперечного сечения даст крутящий момент (показан штриховой стрелкой). Верен ответ 2.



### 3 Выражение внутренних силовых факторов (ВСФ) через напряжения

Пусть на площадке  $dA$  поперечного сечения бруса действует (рис. 3.1) напряжение, представленное тремя составляющими: нормальным напряжением  $\sigma$  и двумя касательными напряжениями  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Внутренние силы, действующие на площадку, получаются умножением напряжений на площадь  $dA$ :

$$dN_z = \sigma dA, \quad dQ_x = \tau_{xz} dA, \quad dQ_y = \tau_{yz} dA. \quad (3.1)$$

Силы (3.1) показаны на рисунке 3.2.

ВСФ – результат приведения внутренних сил (3.1) к центру тяжести сечения – началу естественных (главных центральных) осей. Продольная сила  $N_z$  и поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  равны суммам – интегралам проекций бесконечно малых сил (3.1) на продольную ось  $z$  и главные центральные оси инерции сечения  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} N_z &= \int_A dN_z, Q_x = \int_A dQ_x, Q_y = \int_A dQ_y; \\ N_z &= \int_A \sigma dA, Q_x = \int_A \tau_{xz} dA, Q_y = \int_A \tau_{yz} dA. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Крутящий момент  $M_z$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  равны суммам – интегралам моментов сил (3.1) относительно осей  $z$ ,  $x$  и  $y$ . Моменты сил  $dN_z$ , параллельных оси  $z$ , относительно оси  $z$  равны нулю; отличны от нуля моменты сил  $dQ_x$  и  $dQ_y$ , положительные, если эти силы поворачивают (рис. 3.3) поперечное сечение вокруг оси  $z$  по ходу часовой стрелки: крутящий момент

$$M_z = \int_A [(dQ_x)y - (dQ_y)x] dA = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dA.$$

Моменты сил  $dQ_x$  и  $dQ_y$ , действующих в плоскости сечения  $xCy$ , относительно осей  $x$  и  $y$  равны нулю; отличны от нуля моменты сил  $dN_z$ , положительные, если эти силы, поворачивая поперечное сечение вокруг осей  $x$  и  $y$ , «вдавливают» (рис. 3.3) его первый квадрант в отсеченную часть бруса:

$$M_x = - \int_A (dN_z)y = - \int_A \sigma y dA, \quad M_y = - \int_A (dN_z)x = - \int_A \sigma x dA. \quad (3.3)$$

#### Тестирование

3.1 Нормальные напряжения в прямоугольном поперечном сечении бруса показаны на рисунке 3.4. Какой из вариантов ВСФ правильный?

1.  $N_z = 0, \quad M_x < 0, \quad M_y > 0.$
2.  $N_z < 0, \quad M_x > 0, \quad M_y < 0.$
3.  $N_z > 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0.$

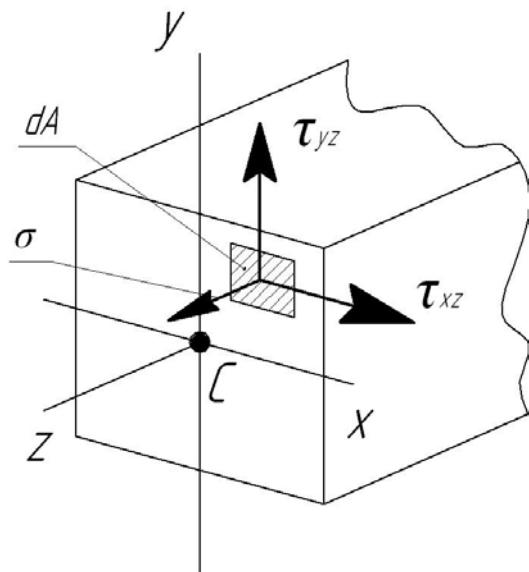


Рисунок 3.1 – Напряжения на бесконечно малой площадке поперечного сечения бруса

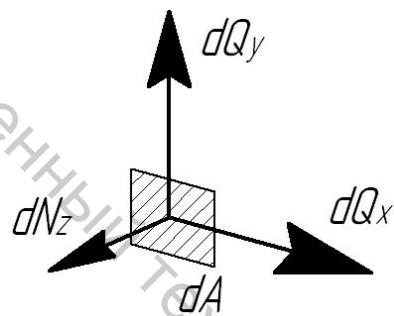


Рисунок 3.2 – Внутренние силы, действующие на площадку  $dA$  поперечного сечения бруса

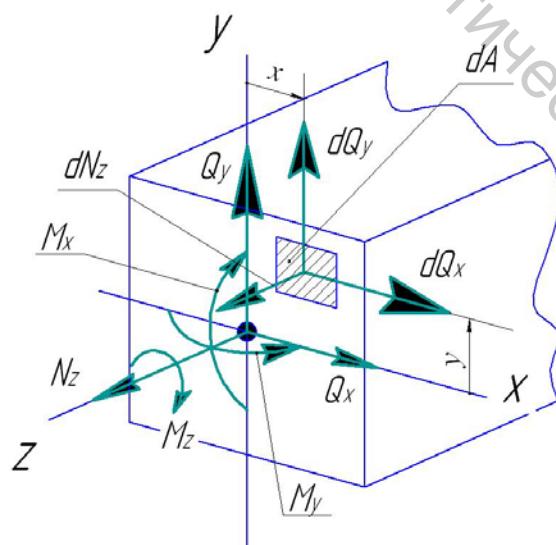


Рисунок 3.3 – Внутренние силы (рис. 3.2) и внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса

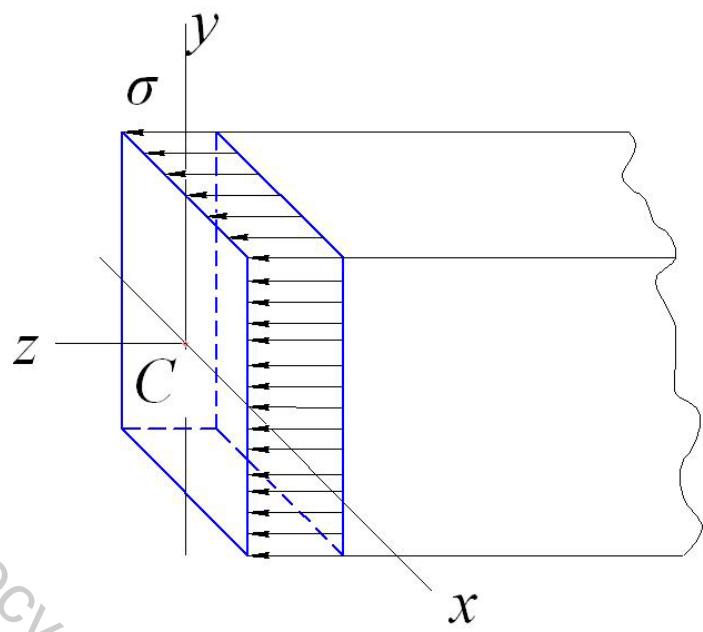


Рисунок 3.4 – Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса

3.2 На рисунке 3.5 показаны нормальные напряжения в круглом поперечном сечении. Какой из вариантов ВСФ правильный?

1.  $N_z = 0, M_x > 0$  . 2.  $N_z < 0, M_x = 0$  . 3.  $N_z > 0, M_x = 0$  .

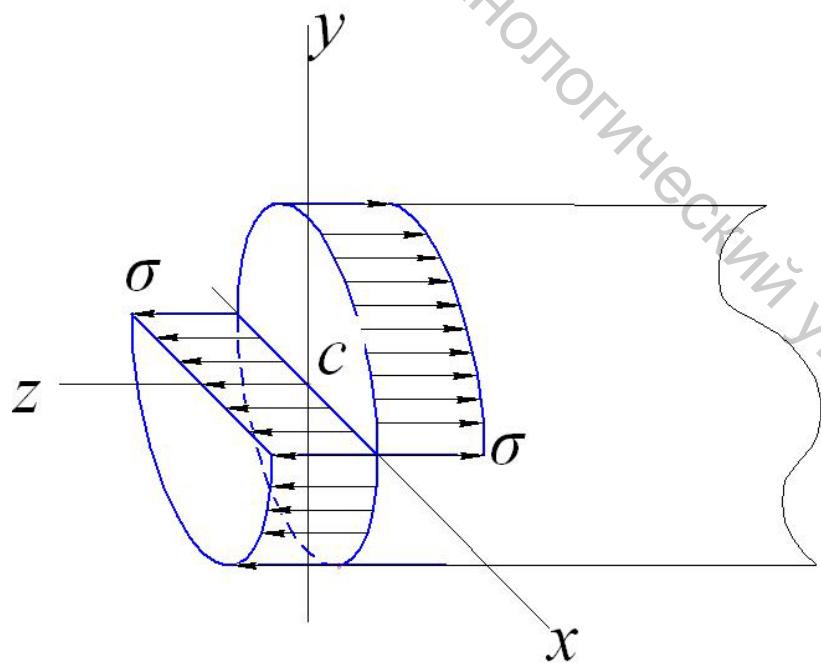


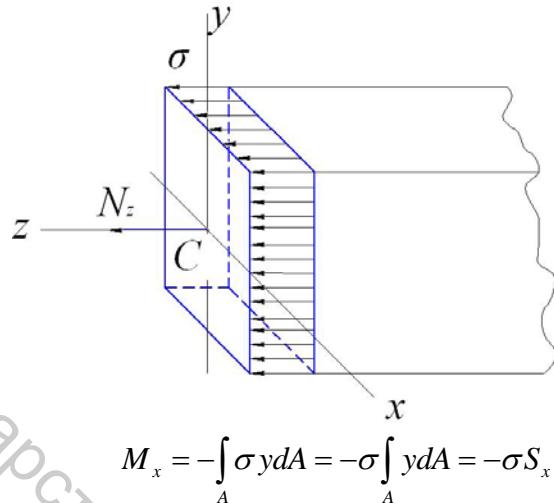
Рисунок 3.5 – Нормальные напряжения в поперечном сечении круглого бруса

## Комментарии

### 3.1 Продольная сила (3.2)

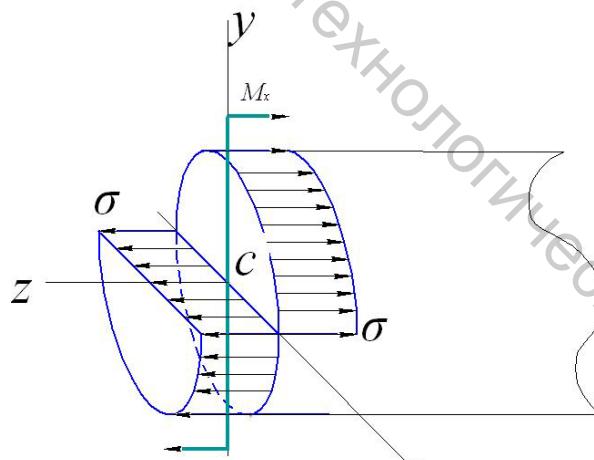
$$N_z = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A > 0,$$

так как растягивающие нормальные напряжения, показанные на рисунке 3.4, считаются положительными. Изгибающий момент (3.3)



где  $S_x = \int_A y dA$  – статический момент сечения относительно центральной на рисунке оси  $x$  (равен 0!), т. е.  $M_x = 0$ . Аналогично этому  $M_y = 0$ . Ответ 3 – правильный.

### 3.2 Продольная сила (3.2) на рисунке 3.5



$$N_z = \int_{A/2}^A (-\sigma) dA + \int_{A/2}^A \sigma dA = 0;$$

изгибающий момент

$$M_x = -\int_{A/2}^A (-\sigma) y dA - \int_{A/2}^A \sigma (-y) dA = 2\sigma \int_{A/2}^A y dA = 2\sigma S_x^{A/2} > 0.$$

Интеграл по площади  $A$  представлен здесь суммой интегралов по площадям  $A/2$  верхнего и нижнего полукругов – статических моментов полукругов. Изгибающий момент  $M_y = 0$  – ввиду симметрии внутренних сил относительно оси  $y$ . Правильный ответ 1.

## 4 Гипотеза плоских сечений

Нанесем на поверхность бруса (рис. 4.1, 4.2) взаимно перпендикулярные линии – риски. Если брус подвергнуть растяжению (рис. 4.1), поперечные риски останутся прямолинейными и перпендикулярными к прямолинейным продольным; если брус подвергнуть прямому изгибу (рис. 4.2), поперечные риски останутся прямолинейными, пересекаясь с искривленными продольными под прямыми углами.

Можно предположить, что при растяжении (сжатии), прямом изгибе бруса и наложениях этих простых деформаций его поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к прямолинейной (или искривленной) продольной оси бруса.

Рассмотрим бесконечно короткий деформированный элемент бруса (рис. 4.3) – его передний торец (поперечное сечение бруса)  $ABDE$  сместился и повернулся относительно заднего  $A_0B_0D_0E_0$ , заняв положение  $A_1B_1D_1E_1$ . Его произвольное продольное волокно  $K_0K$  получило удлинение  $KK_1$ , или  $\Delta(dz)$ . Его можно рассматривать как результат поступательного продольного перемещения сечения  $ABDE$  на расстояние  $OO_1$  (равное удлинению  $\Delta_0(dz)$  волокна  $O_0O$ ) и поворотов вокруг осей  $u$  и  $v$  на углы  $d\varphi_u$  и  $d\varphi_v$ , «вдавливающих» первый квадрант сечения в элемент. Если  $u$  и  $v$  – прямоугольные координаты точки  $K$ , удлинение

$$KK_1 = \Delta(dz) = OO_1 - (d\varphi_u)v - (d\varphi_v)u$$

– см. поворот плоскости  $ABDE$  вокруг оси  $u$ , изображенный на рисунке 4.3 справа от деформированного элемента бруса, и соответствующее смещение точки  $K$  этой плоскости, параллельное оси  $w$  (параллельной продольной оси бруса).

Относительное удлинение волокна  $K_0K$

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = mu + nv + l, \quad (4.1)$$

где введены обозначения

$$m = -\frac{d\varphi_v}{dz}, n = -\frac{d\varphi_u}{dz}, l = \frac{OO_1}{dz} = \frac{\Delta_0(dz)}{dz} = \varepsilon_0.$$

Воспользуемся законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.2)$$

( $E$  – модуль Юнга материала бруса): линейная функция (4.1) даст линейное выражение

$$\sigma = Mu + Nv + L. \quad (4.3)$$

Если напряжение  $\sigma$  откладывать параллельно оси  $w$  (рис. 4.3), уравнение (4.3) – уравнение плоскости – пространственной эпюры напряжений. Плоскость (4.3) пересекает плоскость  $ABDE$  по нейтральной линии – прямой

$$Mu + Nv + L = 0.$$

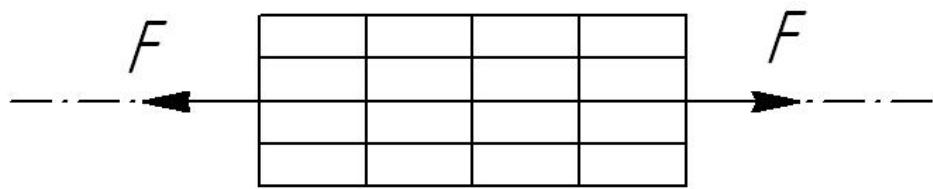


Рисунок 4.1 – Поперечные и продольные риски на поверхности растянутого бруса

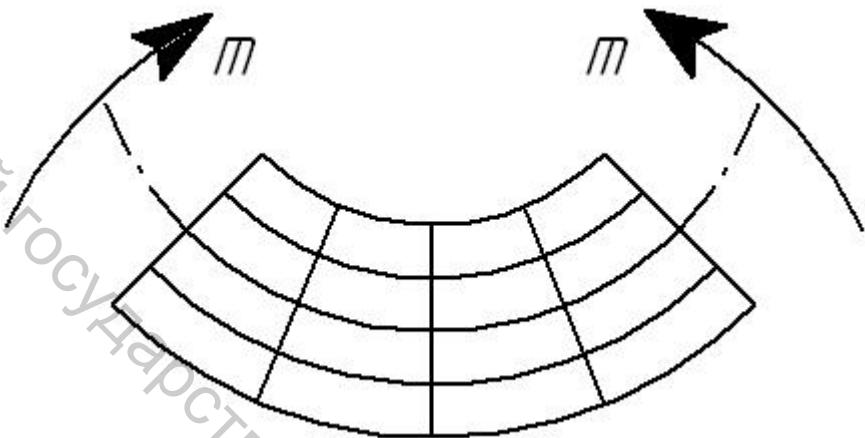


Рисунок 4.2 – Поперечные и продольные риски на поверхности изогнутого бруса

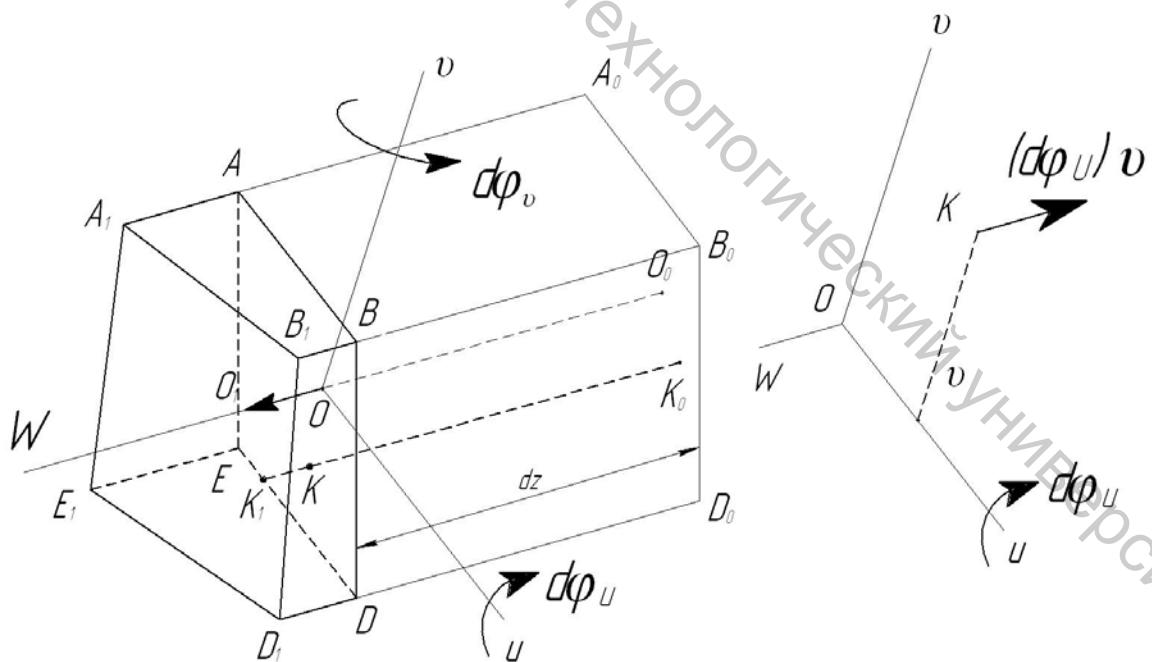


Рисунок 4.3 – Деформированный бесконечно короткий элемент бруса

## Тестирование

4.1 На рисунке 4.4 показано внецентренное растяжение бруса. Останутся ли поперечные риски на его поверхности прямолинейными?

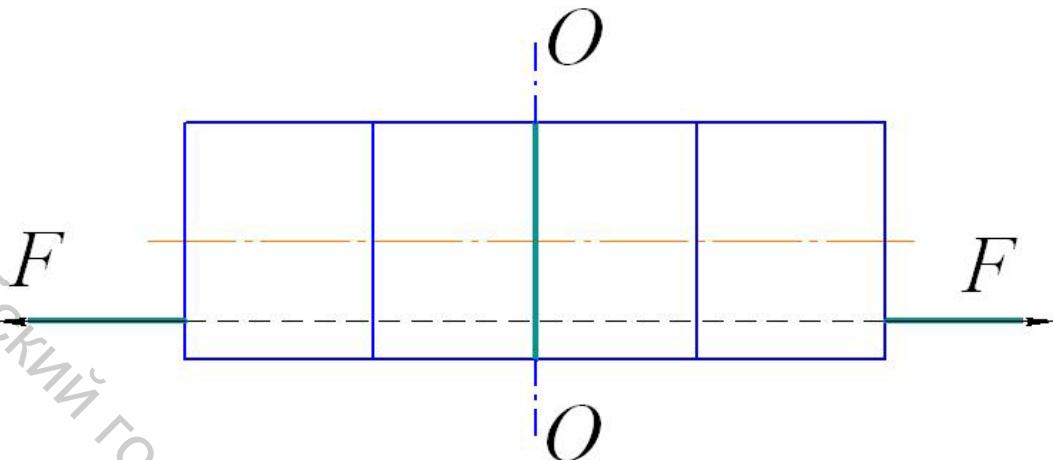


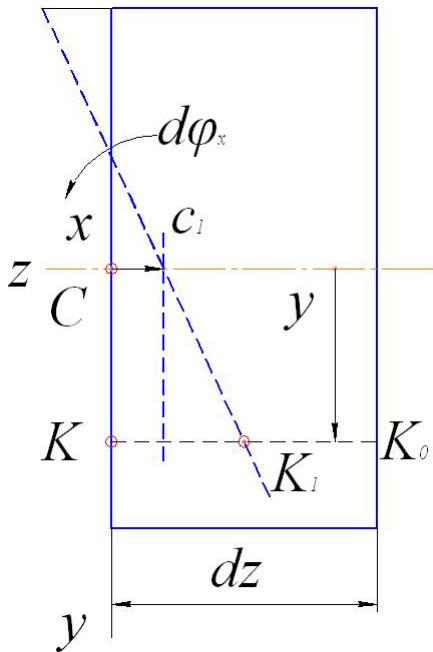
Рисунок 4.4 – Внецентренное растяжение бруса

Варианты ответа

1. Не останутся.
2. Останутся.
3. Останется прямолинейной только средняя риска ОО (в плоскости симметрии бруса).

4.2 На рисунке 4.5 показано поступательное продольное смещение и поворот вокруг оси  $x$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по-перечного сечения бруса (относительно другого бесконечного близкого сечения). Какое из выражений дает правильную величину относительного удлинения произвольного волокна  $K_0K$  (показанного штрихами)?

Варианты ответа



1.  $\varepsilon = -\varepsilon_c - ny$ .

2.  $\varepsilon = \varepsilon_c - ny$ .

3.  $\varepsilon = \varepsilon_c + ny$ .

Рисунок 4.5 – Смещение и поворот сечения бруса

### Комментарии

4.1 Показанное на рисунке 4.4 внецентренное растяжение есть результат наложения прямого изгиба (рис. 4.2) на растяжение (рис. 4.1) силами, действующими вдоль оси бруса. В этих частных случаях поперечные риски остаются прямолинейными. Они останутся прямолинейными и в наложении указанных частных случаев.



4.2 Третье слагаемое в формуле (4.1) в приложении к рисунку 4.5 приобретает вид

$$l = -\frac{CC_1}{dz} = \frac{\Delta_c(dz)}{dz} = \varepsilon_c,$$

( $\Delta_c(dz)$  и  $\varepsilon_c$  здесь – укорочения:  $\Delta_c(dz) = -CC_1$ ,  $\varepsilon_c = -|\varepsilon_c|$ ).

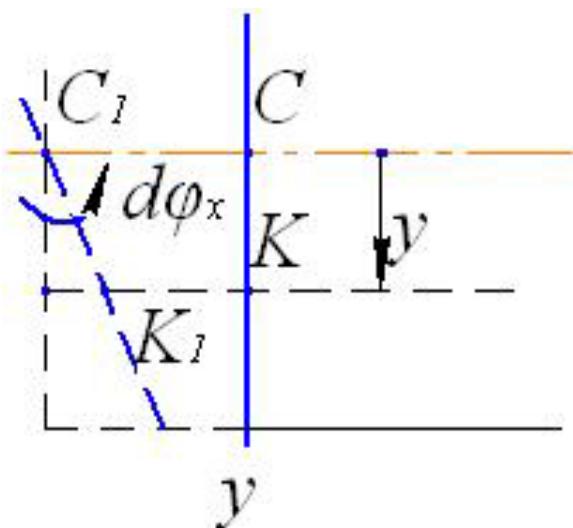
Нижняя часть сечения на рисунке 4.5, где ординаты его точек положительные, «вдавливается» в элемент, т. е. угол  $d\varphi_x > 0$ . Относительная деформация (уточнение) волокна на рисунке 4.5

$$\varepsilon = -\frac{CC_1}{dz} - \frac{(d\varphi_x)y}{dz},$$

или, в обозначениях формулы (4.1),

$$\varepsilon = \varepsilon_c + ny. \quad (4.4)$$

На рисунке представлена ситуация, когда волокно  $K_0K$  удлиняется. Тогда



$$\varepsilon = \frac{CC_1}{dz} - \frac{d\varphi_x y}{dz} = \frac{CC_1}{dz} + \left(-\frac{d\varphi_x}{dz}\right)y,$$

опять же получается формула (4.4). Вообще, чтобы не ошибиться в расстановке знаков, все величины в формуле следует изобразить на рисунке положительными – формула будет верной при любых знаках входящих в нее величин.

## 5 Геометрические характеристики поперечного сечения и формула для нормальных напряжений, действующих в нем

Используем формулу (4.3)

$$\sigma = Mu + Nv + L$$

в выражениях, аналогичных выражениям (3.2, 3.3):

$$\begin{aligned} N_w &= \int_A \sigma dA = M \int_A u dA + N \int_A v dA + L \int_A dA, \\ -M_u &= \int_A \sigma v dA = M \int_A u v dA + N \int_A v^2 dA + L \int_A v dA, \\ -M_v &= \int_A \sigma u dA = M \int_A u^2 dA + N \int_A u v dA + L \int_A u dA. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Интегралы в правых частях равенств (5.1) зависят от размеров и формы поперечного сечения бруса. Перейдем в этих равенствах к центральным осям  $x$  и  $y$  (рис. 5.1). Статические моменты относительно центральных осей

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = \int_A (v - S_u/A) dA = \int_A v dA - \frac{S_u}{A} \int_A dA = S_u - S_u = 0, \\ S_y &= \int_A x dA = \int_A (u - S_v/A) dA = \int_A u dA - \frac{S_v}{A} \int_A dA = S_v - S_v = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Статические моменты (5.2) исчезнут из выражений (5.1).

Положим, что ось  $y$  сечения – ось его симметрии (рис. 5.2). Центробежный момент инерции сечения, каждому из элементов площади которого найдется симметричный – его зеркальное отражение

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_1} x_1 y_1 dA + \int_{A_2} x_2 y_2 dA = \int_{A_1} x_1 y_1 dA + \int_{A_1} (-x_1) y_1 dA = 0. \quad (5.3)$$

Центробежный момент инерции (5.3) исчезнет из выражений (5.1). Оси  $x$  и  $y$  симметричного сечения – частный случай главных осей.

Если оси  $x$  и  $y$  не только главные, но и центральные, из выражений (5.1) исчезают статические моменты  $S_x$ ,  $S_y$  (5.2) и центробежный момент  $I_{xy}$  (5.3). Остаются площадь сечения и главные центральные моменты инерции

$$A = \int_A dA, I_x = \int_A y^2 dA, I_y = \int_A x^2 dA;$$

$$N_z = M \cdot 0 + N \cdot 0 + LA, -M_x = M \cdot 0 + NI_x + L \cdot 0, -M_y = MI_y + N \cdot 0 + L \cdot 0.$$

Нормальные напряжения (4.3) находятся по формуле

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} x - \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N_z}{A}. \quad (5.4)$$

В простых деформациях бруса действует один ВСФ: при растяжении (сжатии) (см. рисунок 5.3)

$$\sigma = \frac{N_z}{A};$$

при чистом прямом изгибе (см. рисунок 5.4)

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y.$$

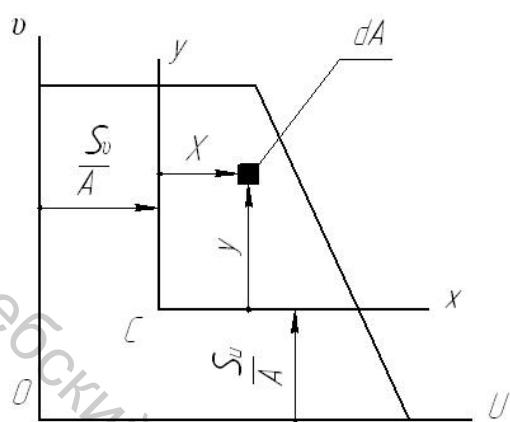


Рисунок 5.1 – К вычислению центральных статических моментов

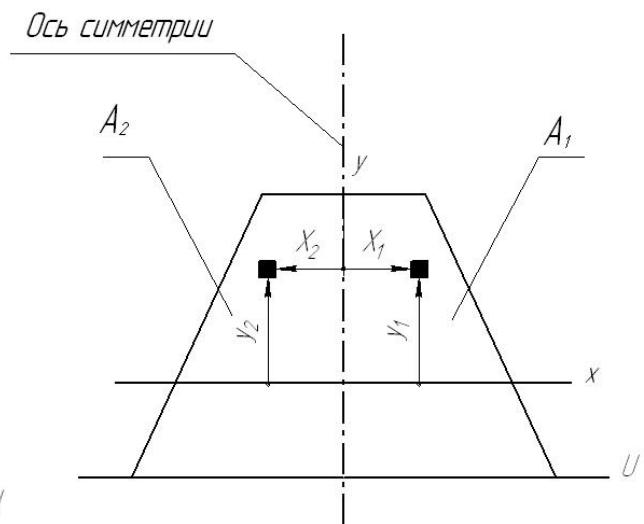


Рисунок 5.2 – К вычислению центробежного момента инерции симметричного сечения

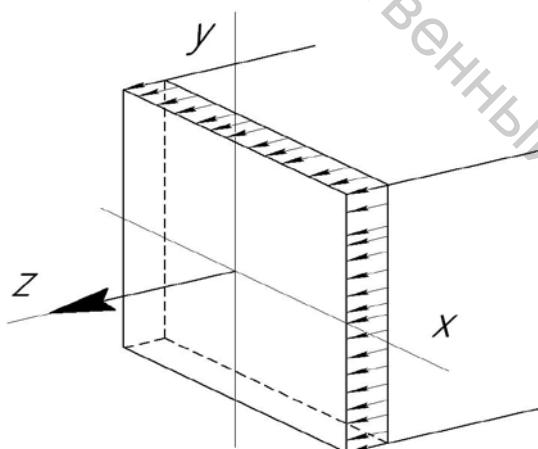


Рисунок 5.3 – Нормальные напряжения при растяжении

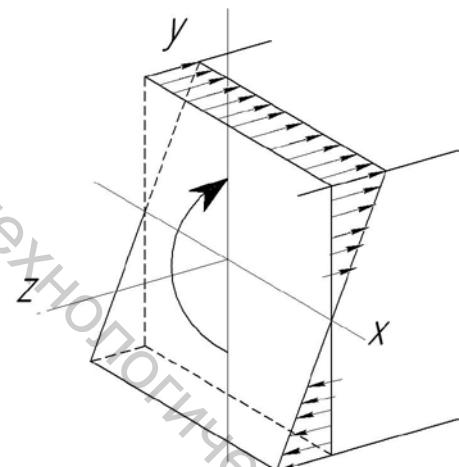


Рисунок 5.4 – Нормальные напряжения при прямом изгибе

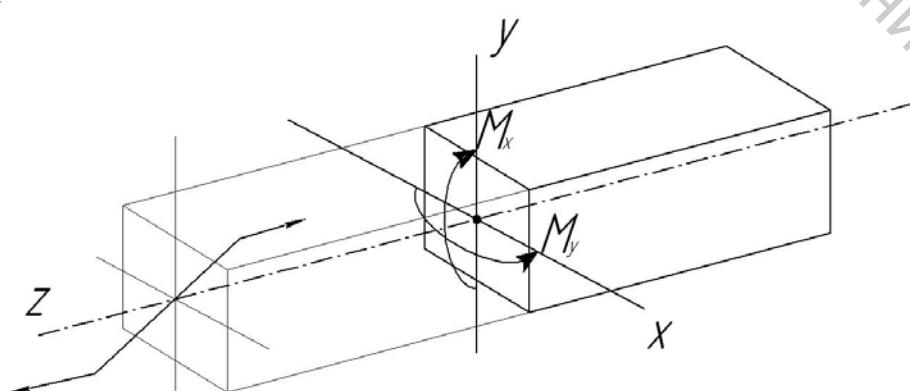


Рисунок 5.5 – Косой изгиб

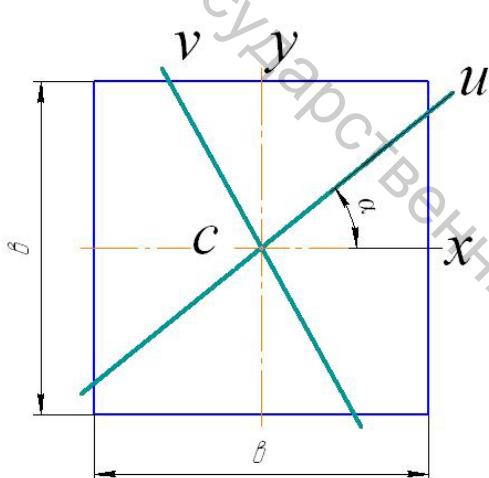
В сложной деформации, например, при косом изгибе (рис. 5.5)

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x.$$

В сложной деформации каждый из ВСФ действует независимо от других. Каждый из них находится как сумма проекций (моментов) внешних сил, каждая из которых учитывается опять же независимо от других. Следовательно, напряжения (5.4); деформации, определяемые по закону Гука (4.2), и, как увидим в дальнейшем, перемещения от группы сил численно равны суммам напряжений, деформаций, перемещений от каждой из сил в отдельности. Это принцип независимости действия сил.

#### Тестирование

5.1 Являются ли при  $\alpha \neq 0$  центральные оси  $u$  и  $v$ , показанные на рисунке 5.6, главными осями инерции сечения?

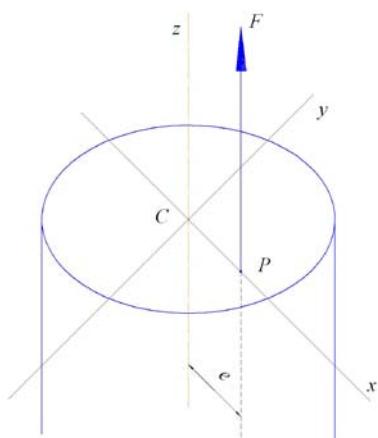


Варианты ответа

1. Не являются.
2. Являются при  $\alpha = 45^\circ$ .
3. Являются.

Рисунок 5.6 – Центральные оси квадратного сечения

5.2 Оси  $x$  и  $y$ , показанные на рисунке 5.7, – главные центральные оси поперечного сечения круглого бруса. Внутренние силы приводятся к равнодействующей, приложенной в точке  $P$ . Сколько слагаемых сохранится в формуле (5.4)?



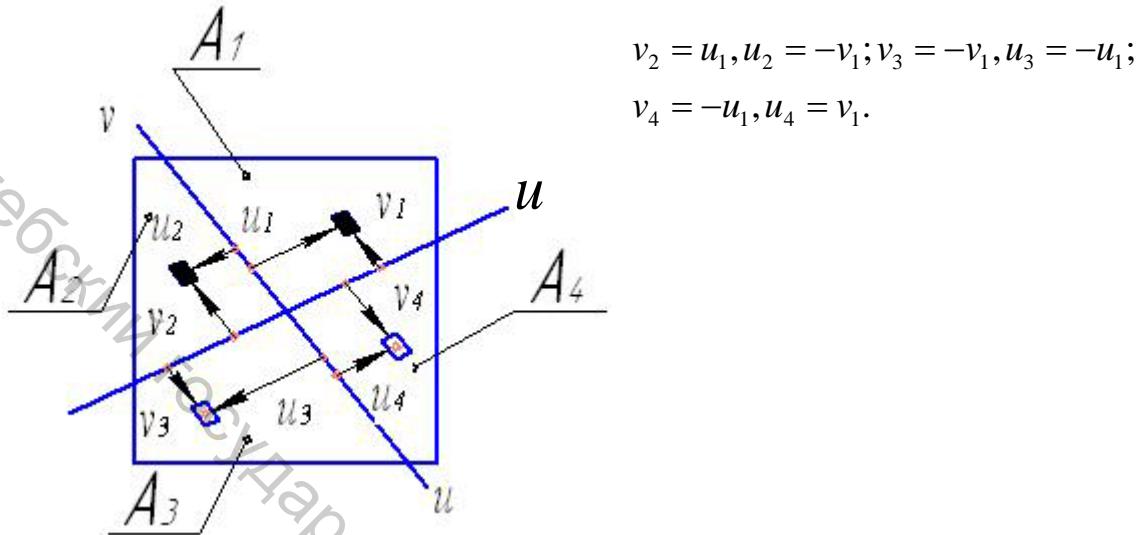
Варианты ответа

1. Одно.
2. Два.
3. Три.

Рисунок 5.7 – Внеклентренное растяжение

### Комментарии

5.1 Оси  $u$  и  $v$  делят квадратное сечение на 4 части, каждая из которых совмещается с соседкой поворотом на  $90^\circ$ . Координаты элементов площади преобразуются при этом повороте по формулам



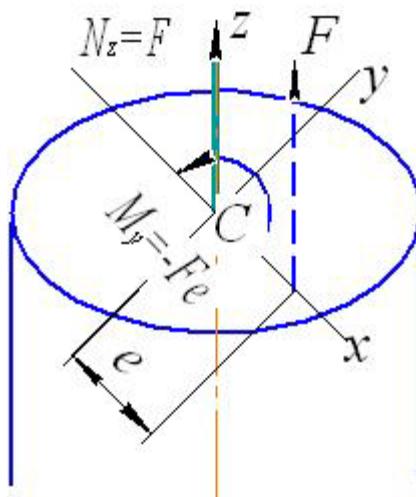
$$v_2 = u_1, u_2 = -v_1; v_3 = -v_1, u_3 = -u_1; \\ v_4 = -u_1, u_4 = v_1.$$

### Центробежный момент инерции

$$I_{uv} = \int_{A_1} u v dA = \int_{A_1} u_1 v_1 dA + \int_{A_2} u_2 v_2 dA + \int_{A_3} u_3 v_3 dA + \int_{A_4} u_4 v_4 dA = \\ = \int_{A_1} u_1 v_1 dA + \int_{A_1} (-v_1) u_1 dA + \int_{A_1} (-u_1) (-v_1) dA + \int_{A_1} v_1 (-u_1) dA = 0$$

– при любом значении угла  $\alpha$  (рис. 5.6) центральные оси  $u$  и  $v$  – главные. Верен ответ 3.

5.2 Если равнодействующую  $F$  на рисунке 5.7 привести к центру тяжести сечения  $C$ , найдем ВСФ: продольную силу  $N_z$  и изгибающий момент  $M_y$  (отрицательный, ибо отвечает растяжению первой координатной четверти сечения). В формуле (5.4) сохраняется два слагаемых – первое и третье. Верен ответ 2.



## 6 Раствжение (сжатие) бруса: напряжения и деформации

Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса определяются по формуле (5.4)

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y}x - \frac{M_x}{I_x}y + \frac{N_z}{A}. \quad (6.1)$$

В простой деформации растяжения (сжатия) действует (рис. 6.1) только продольная сила  $N_z$ . Формула (6.1) дает напряжения, равномерно распределенные по сечению

$$\sigma = \frac{N_z}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.2)$$

Соответственно, относительные удлинения всех продольных волокон одинаковы: по закону Гука (4.2) и формуле (6.2)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N_z}{EA} = \frac{F}{EA}. \quad (6.3)$$

Удлинение бруса  $\Delta l$  сопровождается (рис. 6.2) сужением  $\Delta \hat{a}$ , относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{\Delta \hat{a}}{\hat{a}} = -\mu \varepsilon, \quad (6.4)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона в соотношении Пуассона (6.4) выражаются все другие упругие константы изотропного материала.

Закон Гука (6.3) дает возможность найти удлинение  $\Delta l$  (рис. 6.2) бруса в целом: удлинение бесконечно короткого элемента бруса

$$\Delta(dz) = \varepsilon dz = \frac{N_z dz}{EA} = \frac{Fdz}{EA};$$

после интегрирования

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}$$

найдем удлинение бруса на рисунке 6.2:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{F}{c}, \quad (6.5)$$

где  $c = EA / l$  – жесткость бруса в целом, а также удлинение  $i$ -го участка бруса длиной  $l$  на рисунке 6.3:

$$\Delta l_i = \frac{N_{zi} l_i}{EA_i} = \frac{\sigma_i l_i}{E} \quad (6.6)$$

(предполагается, что напряжение  $\sigma_i$  не изменяется по длине  $i$ -го участка).

Брус на рисунке 6.3 разделяется на три участка, в пределах которых напряжения  $\sigma$  не изменяются. Используя формулу (6.6), найдем удлинение бруса в целом:

$$\Delta l = \frac{-2 \frac{F}{A} \cdot l}{E} + \frac{0,5 \frac{F}{A} l}{E} + \frac{\frac{F}{A} l}{E} = -0,5 \frac{Fl}{EA}$$

– укорочение бруса.

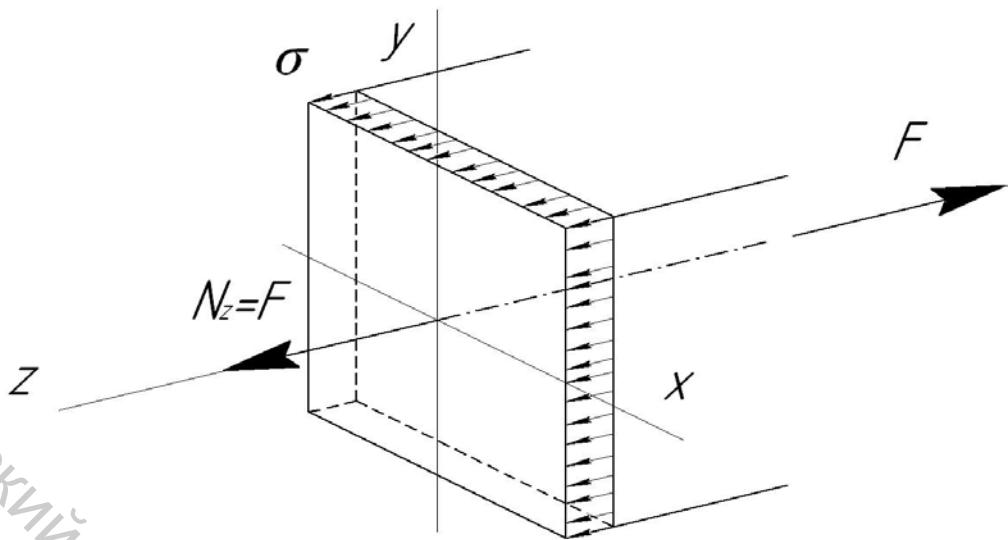


Рисунок 6.1 – Напряжения при растяжении

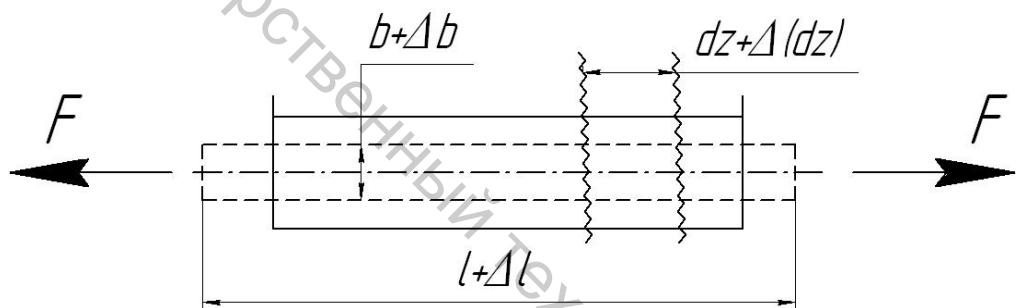


Рисунок 6.2 – Эффект Пуассона

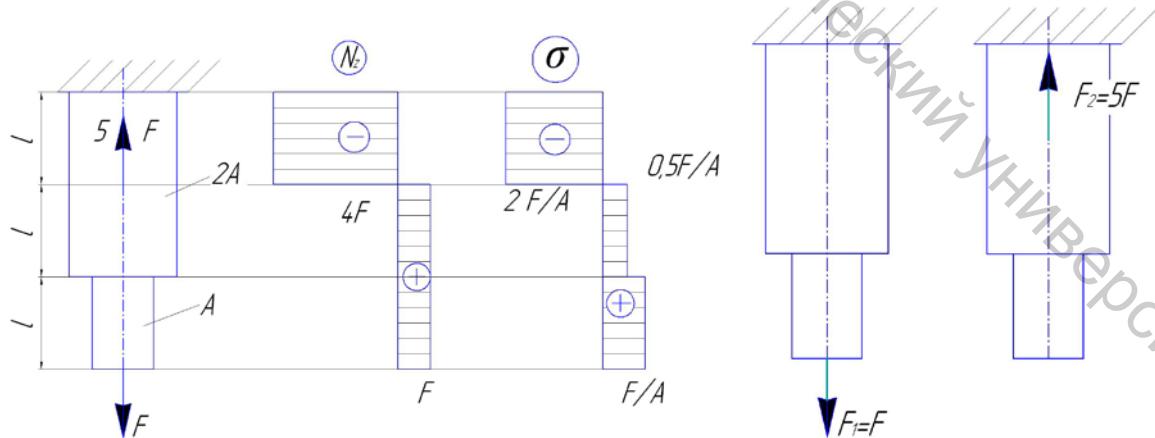


Рисунок 6.3 – Эпюры продольной силы и нормальных напряжений

Рисунок 6.4 – К использованию принципа независимости действия сил

Используя принцип независимости действия сил и формулу (6.5), найдем удлинения бруса от каждой из сил (рис. 6.4) в отдельности:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{EA} + \frac{F_1 2l}{E2A} = 2 \frac{Fl}{EA}, \Delta l_2 = -\frac{F_2 l}{E2A} = -2,5 \frac{Fl}{EA};$$

удлинение бруса от обеих сил

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,5 \frac{Fl}{EA}.$$

Положим, что брус на рисунках 6.3 и 6.4 изготовлен из материала, различно сопротивляющегося растяжению (допускаемое напряжение  $[\sigma]_p = [\sigma]$ ) и сжатию (допускаемое напряжение  $[\sigma]_c = 3[\sigma]$ ). Условие прочности растянутого участка бруса (см. эпюру  $\sigma$  на рисунке 6.3)

$$\max \sigma_p = F/A \leq [\sigma], \quad (6.7)$$

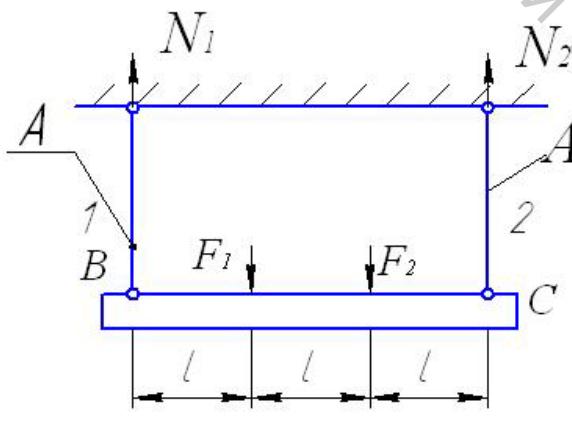
откуда допускаемая нагрузка  $[F] = [\sigma]A$ . Условие прочности на сжатие

$$\max \sigma_c = 2F/A \leq 3[\sigma], \quad (6.8)$$

соответственно, допускаемая нагрузка  $[F] = 1,5[\sigma]A$ . Требуя выполнения обоих условий прочности (6.7) и (6.8), найдем допускаемую нагрузку как меньшую из двух найденных:  $[F] = [\sigma]A$ .

### Тестирование

6.1 Возможно ли найти напряжения в стержне 1 (рис. 6.5), используя принцип независимости действия сил?



Варианты ответа

1. Возможно.
2. Не возможно.
3. Возможно, если силы  $F_1$  и  $F_2$  приложены в одной точке, составляя силу  $F = F_1 + F_2$

Рисунок 6.5 – Абсолютно жесткий брус на упругих тягах 1 и 2

6.2 Каково условие равнопрочности бруса на рисунке 6.3 на растяжение и сжатие?

Варианты ответа

1. Равные допускаемые напряжения  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$ .
2. Равные наибольшие по модулю напряжения в растянутой и сжатой частях бруса.
3. Наибольшие напряжения в растянутой и сжатой частях бруса пропорциональны допускаемым напряжениям.

## Комментарии

6.1 Правильный ответ – ответ 1. Действительно, сила, растягивающая стержень 1, находится из уравнения моментов

$$\Sigma m_c = 0, -N_1 \cdot 3l + F_1 2l + F_2 l = 0 : N_1 = \frac{2F_1 + F_2}{3};$$

напряжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{2F_1 + F_2}{3A}. \quad (6.9)$$

Прилагая к брусу  $BC$  силу  $F_1$ , найдем:

$$\Sigma m_c = 0, -N_1 \cdot 3l + F_1 2l = 0, N_1 = \frac{2}{3} F_1; \sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{F_1}{A}. \quad (6.10)$$

Прилагая к брусу  $BC$  силу  $F_2$ , найдем:

$$\Sigma m_c = 0, -N_1 \cdot 3l + F_2 l = 0, N_1 = \frac{1}{3} F_2; \sigma_1 = \frac{1}{3} \frac{F_2}{A}. \quad (6.11)$$

Как видим, напряжение (6.9) равно сумме напряжений (6.10) и (6.11). Ответ 3 – частный случай изложенного.

6.2 Правильный ответ – ответ 3. Если (см. эпюру  $\sigma$  на рисунке 6.3)

$$[\sigma]_c = 2[\sigma], [\sigma]_p = [\sigma],$$

допускаемые нагрузки, определяемые из условий (6.7) и (6.8), одинаковы и равны  $[F] = [\sigma]A$ . Наибольшие напряжения в сжатой и растянутой частях бруса при этой нагрузке

$$\max \sigma_c = 2[\sigma] = [\sigma]_c, \max \sigma_p = [\sigma] = [\sigma]_p,$$

т. е. при возрастании нагрузки до значения  $[F]$  допускаемые напряжения на растяжение и сжатие достигаются одновременно.

При равных напряжениях – см. вариант ответа 2 – первым будет достигнуто меньшее из допускаемых напряжений. При равных допускаемых напряжениях – см. вариант ответа 1 – первым достигнет допускаемого значения наибольшее напряжение.

## 7 Статически неопределенные стержневые системы, работающие на растяжение (сжатие)

На рисунке 7.1 изображен массивный брус  $BD$  на трех упругих тягах. Брус можно считать (по сравнению с тягами) абсолютно жестким (твёрдым). К брусу приложена плоская система четырех параллельных сил, находящихся в равновесии. Три силы из них ( $N, N_2, N_3$ ) не известны. Эти три силы вкупе с заданной силой  $F$  удовлетворяют двум независимым уравнениям статики (проекций и моментов):

$$\Sigma Y = 0, N_1 + N_2 + N_3 = F; \Sigma m_B = 0, -F \frac{a}{2} + N_2 a + N_3 \cdot 2a = 0, \quad (7.1)$$

стержневая система на рисунке 7.1 однажды статически неопределена. Два уравнения (7.1) дополняются одним уравнением совместности деформаций. Рассматривая заштрихованную на рисунке 7.1 картину деформаций (удлинений) стержней – трапецию  $BDD_1B_1$ , напишем уравнение

$$\Delta l_2 = (\Delta l_1 + \Delta l_3) / 2, \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i} = \frac{N_i}{c_i},$$

или

$$2N_2 / c_2 = N_1 / c_1 + N_3 / c_3, \quad (7.2)$$

где  $c_i = EA_i / l_i$  – жесткость  $i$ -го стержня.

Заметим: уравнения (7.1) неоднородны, уравнение (7.2) однородное; система трех уравнений (7.1) – (7.2) неоднородная, решение ее не нулевое.

На рисунке 7.2 представлен стальной стержень в медной трубке. Жесткость первого  $c_c = E_c A_c / l_c$ , жесткость второго  $c_M = E_M A_M / l_M$ . Их укорочения (под действием реакций заделки  $N_c$  и  $N_M$ ) одинаковы, сумма этих реакций равна заданной силе  $F$ :

$$\frac{N_c}{c_c} = \frac{N_M}{c_M}, N_c + N_M = F. \quad (7.3)$$

Первое из уравнений (7.3) может быть переписано:

$$\frac{N_c}{N_M} = \frac{c_c}{c_M}.$$

Если отношение жесткостей  $c_c / c_M > 1$ , отношение усилий  $N_c / N_M > 1$ , или  $N_c > N_M$ ; если отношение  $c_c / c_M < 1$ , отношение  $N_c / N_M < 1$ , или  $N_c < N_M$ . Получается: большее из усилий действует в стержне большей жесткости. Вывод этот ошибочен – случается так далеко не всегда. Верно другое – изменение жесткости одного из стержней (например, ее увеличение) вызовет соответствующее изменение (рост) усилия в этом стержне. Действительно, если в решении уравнений (7.3)

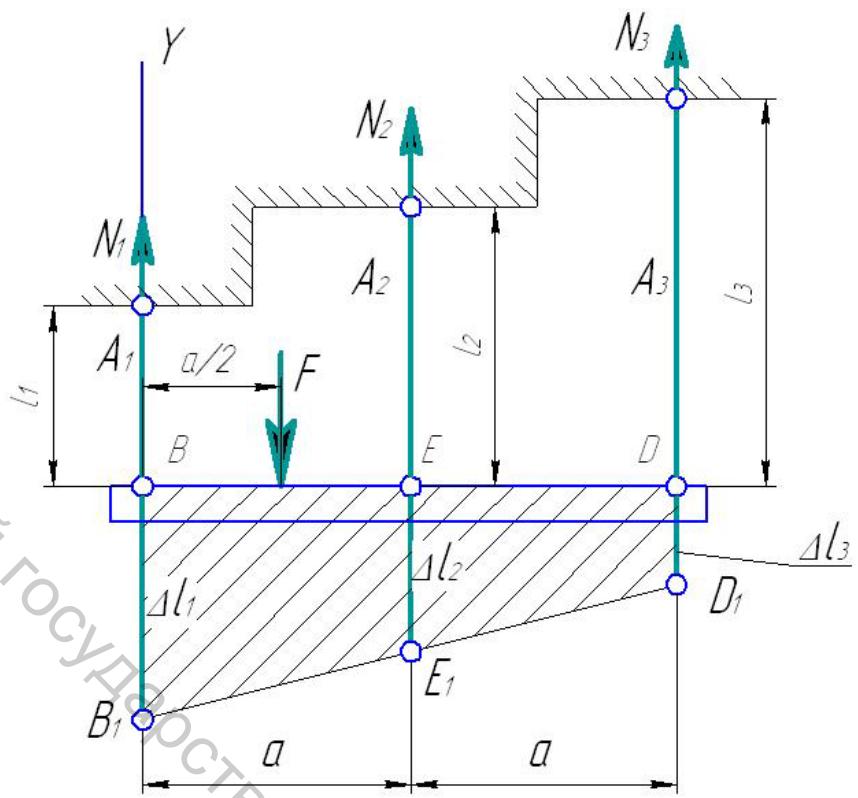


Рисунок 7.1 – Статически неопределенная стержневая система: силы и картина перемещений (деформаций)

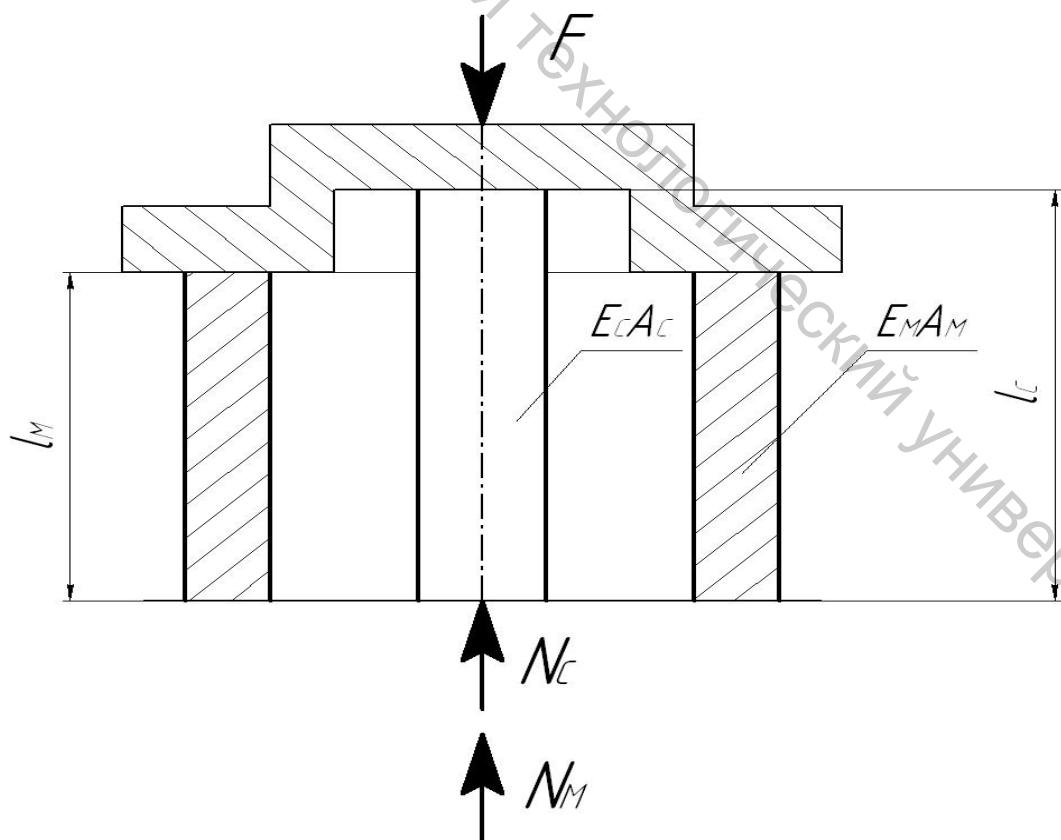


Рисунок 7.2 – К выводу общего свойства статически неопределенных систем

$$N_C = \frac{F}{1 + \frac{c_M}{c_C}}, N_M = \frac{F}{1 + \frac{c_C}{c_M}}$$

увеличить, например, жесткость  $c_C$ , знаменатель в первом равенстве уменьшится, усилие  $N_C$  вырастет.

### Тестирование

7.1 Жесткости упругих стержней  $A_1A$  и  $B_1B$  на рисунке 7.3 различны. Какая из реакций, растягивающих упругие стержни, большая?

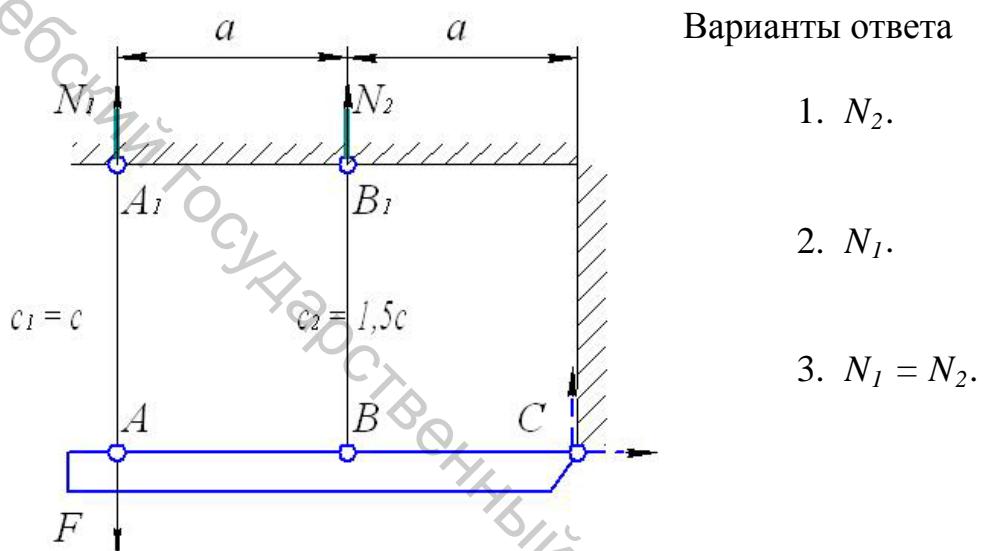


Рисунок 7.3 – Однажды статически неопределенная система

7.2 Жесткость упругого стержня  $B_1B$  на рисунке 7.3 возросла (рис. 7.4) вдвое. Как изменится реакция  $N_2$ ?

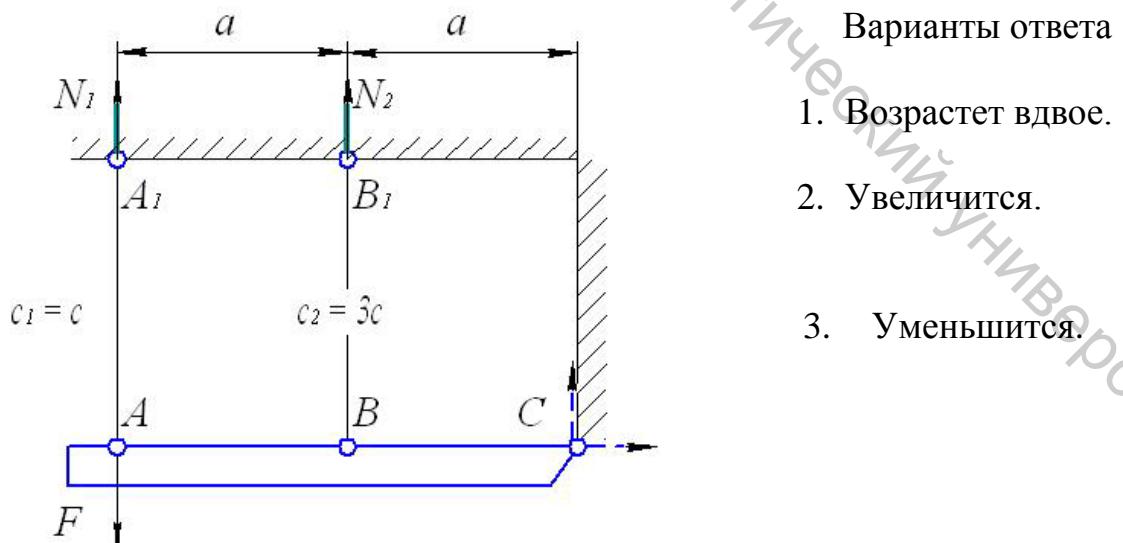


Рисунок 7.4 – Однажды статически неопределенная система

## Комментарии

7.1 Уравнение совместности деформаций – удлинений упругих стержней:

$$\Delta l_1 = 2\Delta l_2,$$

или

$$\frac{N_1}{c_1} = 2 \frac{N_2}{c_2}, \quad (7.4)$$

что может быть переписано в виде

$$\frac{N_1}{N_2} = 2 \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{N_1}{N_2} = 2 \frac{c}{1.5c} = \frac{4}{3},$$

$$N_1 = \frac{4}{3} N_2 > N_2.$$

Большее усилие действует в первом стержне, хотя жесткость его меньше жесткости второго. Верен ответ 2. Вывод о большем усилии в

стержне большей жесткости ошибочен, хотя и здесь можно добиться большего усилия в стержне большей жесткости: если  $c_2 = 3c$ ,

$$N_1 / N_2 = 2 \frac{c}{3c} = \frac{2}{3}, \quad N_1 = \frac{2}{3} N_2 < N_2.$$

7.2 Если жесткость стержня  $B_1B$   $c_2 = 1.5c$ , условие совместности деформаций (7.4) дает отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{3}, \quad N_1 = \frac{4}{3} N_2.$$

Используем его в уравнении равновесия – уравнении моментов  $\Sigma m_c = 0$ :

$$N_1 2a + N_2 a - F \cdot 2a = 0, \quad 2N_1 + N_2 = 2F; \quad (7.5)$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} N_2 + N_2 = 2F, \quad N_2 = \frac{6}{11} F.$$

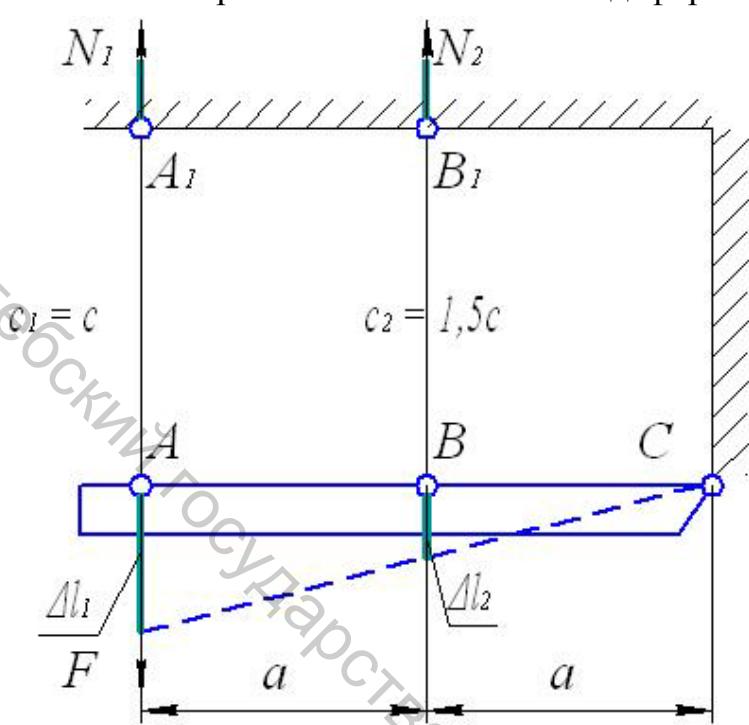
Пусть жесткость  $c_2 = 3c$  (возросла вдвое). Условие (7.4) дает отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3}, \quad N_1 = \frac{2}{3} N_2.$$

Используя его в уравнении (7.5), получим

$$N_2 = \frac{6}{7} F.$$

Усилие выросло в  $11/7 = 1.57$  раз (не в 2 раза!). Верен ответ 2.



стержне большей жесткости ошибочен, хотя и здесь можно добиться большего усилия в стержне большей жесткости: если  $c_2 = 3c$ ,

$$N_1 / N_2 = 2 \frac{c}{3c} = \frac{2}{3}, \quad N_1 = \frac{2}{3} N_2 < N_2.$$

7.2 Если жесткость стержня  $B_1B$   $c_2 = 1.5c$ , условие совместности деформаций (7.4) дает отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{3}, \quad N_1 = \frac{4}{3} N_2.$$

Используем его в уравнении равновесия – уравнении моментов  $\Sigma m_c = 0$ :

$$N_1 2a + N_2 a - F \cdot 2a = 0, \quad 2N_1 + N_2 = 2F; \quad (7.5)$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} N_2 + N_2 = 2F, \quad N_2 = \frac{6}{11} F.$$

Пусть жесткость  $c_2 = 3c$  (возросла вдвое). Условие (7.4) дает отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3}, \quad N_1 = \frac{2}{3} N_2.$$

Используя его в уравнении (7.5), получим

$$N_2 = \frac{6}{7} F.$$

Усилие выросло в  $11/7 = 1.57$  раз (не в 2 раза!). Верен ответ 2.

## 8 Монтажная и температурная задачи на примере стержневых систем, работающих на растяжение (сжатие)

На рисунке 8.1 представлена стержневая система, подлежащая сборке. Ее упругие стержни 1 и 2 изготовлены неточно, из-за чего образовался зазор  $\Delta$ . Чтобы перекрыть его, наклонные стержни симметричной системы растягиваются равными силами  $N_1$ , вертикальный стержень – силой  $N_2$ . Углы  $\alpha$  изменяются:  $\alpha' < \alpha$ ; однако, ввиду малости упругих удлинений (порядка тысячных долей первоначальных длин), можно положить  $\alpha' = \alpha$ .

Уравнение статики здесь единственное:

$$\Sigma Y = 0, 2N_1 \cos \alpha - N_2 = 0; \quad (8.1)$$

собранная система однажды статически неопределенна. Уравнение деформаций (8.2) следует из рассмотрения картины деформаций на рисунке 8.1: удлинившиеся на  $\Delta l_1$  наклонные стержни системы  $B_1A'_1$  повернем вокруг центров шарниров  $B_1$ , переместив их концы  $A'_1$  по дугам  $A'_1 A$  (ввиду малости эти дуги заменяются на рисунке перпендикулярами к первоначальным направлениям стержней) до совпадения с концом удлинившегося на  $\Delta l_2$  стержня  $B_2A$ . Уравнение это

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} + \Delta l_2 = \Delta, \frac{N_1}{c_1 \cos \alpha} + \frac{N_2}{c_2} = \Delta \quad (8.2)$$

неоднородное – в отличие от однородного уравнения (8.1). Система двух уравнений (8.1, 8.2) неоднородная, ее решение не нулевое. Если собранная система статически определимая, неизвестные усилия в стержнях находятся из однородных уравнений статики, их решение нулевое. В статически определимых системах монтажные усилия не возникают.

На рисунке 8.2 изображен абсолютно жесткий брус  $AD$ , поддерживаемый двумя упругими стержнями, один из которых нагрет на  $\Delta t^\circ$ . Если стержень, который будет нагрет, вынуть из стержневой системы и после этого нагреть, его длина  $l_t$  окажется больше первоначальной длины  $l$  – возникает ситуация монтажной задачи. Желая вставить нагретый стержень в систему, укоротим – сожмем его, а стержень, не испытавший нагрева, удлиним – растянем. Однородное уравнение статики

$$\Sigma m_A = 0, N_1 a - N_2 2a = 0$$

дополняется неоднородным уравнением деформаций

$$\Delta l_2 = \Delta l_t - \Delta l_N = 2\Delta l_1, \alpha l \Delta t^\circ - \frac{N_2}{c_2} = 2 \frac{N_1}{c_1},$$

где первое слагаемое в левой части уравнения – температурное удлинение ( $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала стержня). Решение системы двух уравнений не нулевое. В статически определимых системах (когда используются только уравнения статики, в этом случае однородное уравнение) температурных усилий нет.

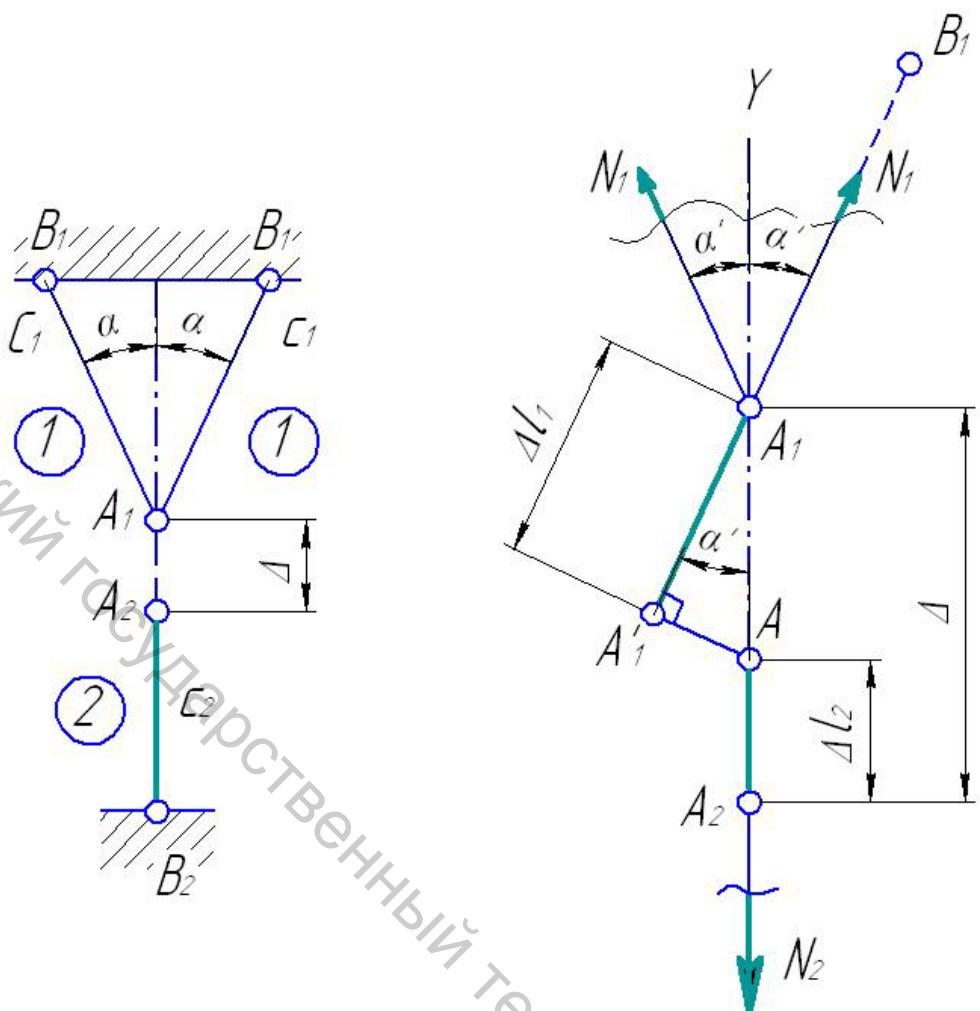


Рисунок 8.1 – Монтажная задача

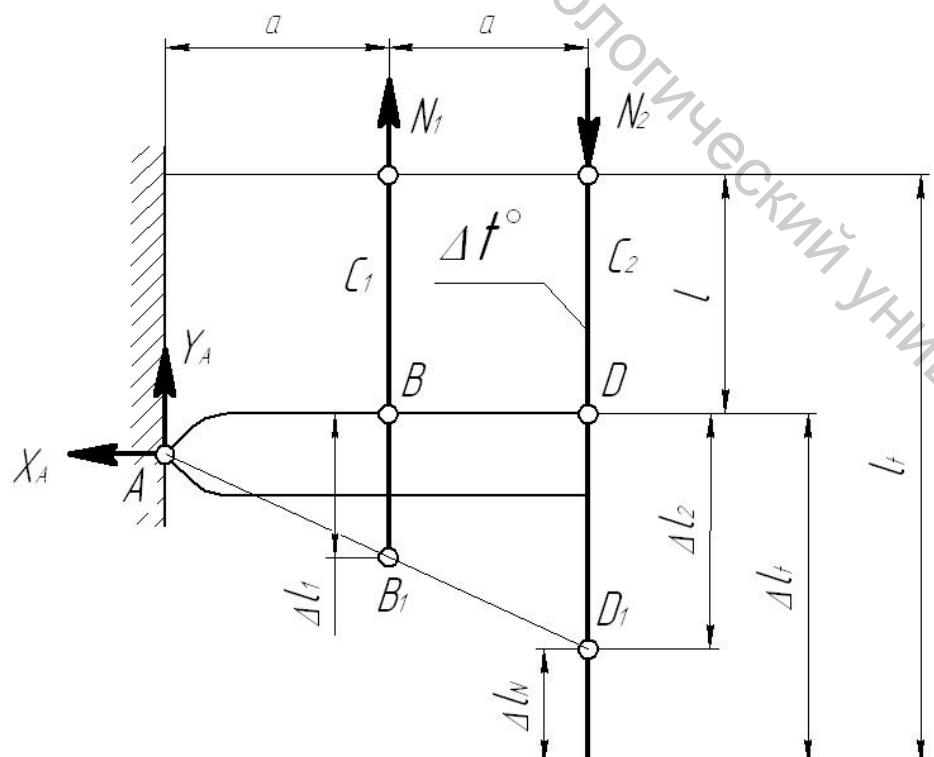
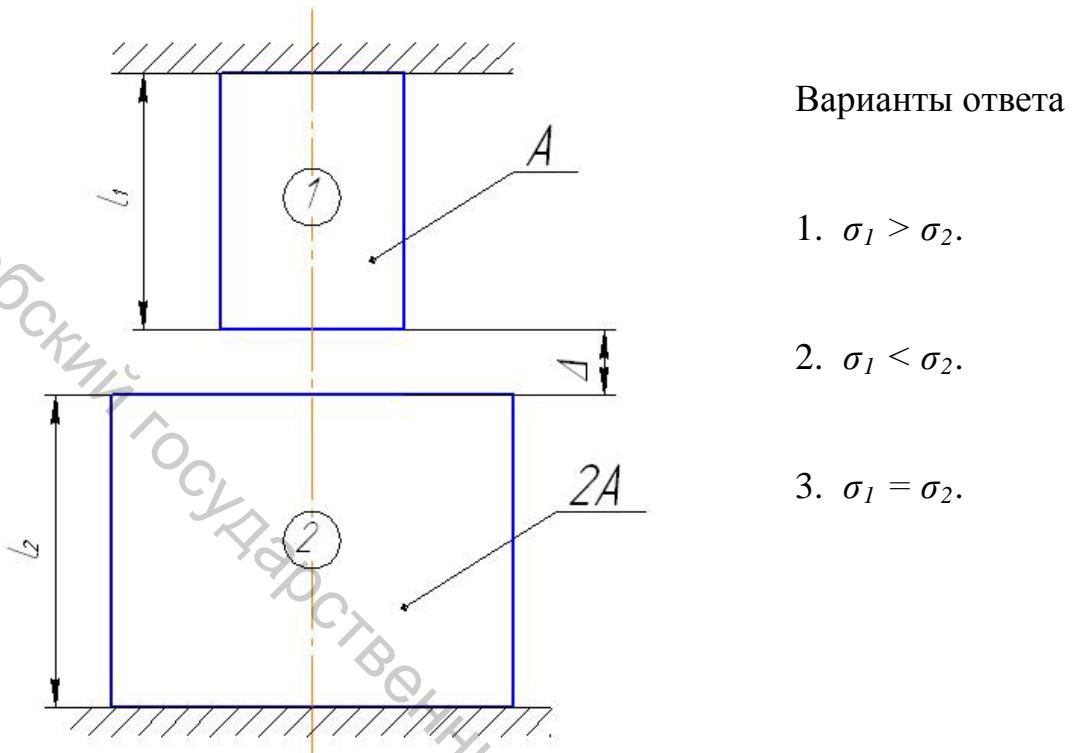


Рисунок 8.2 – Температурная задача

### Тестирование

8.1 Зазор на рисунке 8.3 выбирается – два стержня собираются в один ступенчатый. Каковы монтажные напряжения в стержнях?



Варианты ответа

1.  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

2.  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

3.  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Рисунок 8.3 – Два стержня в монтажной задаче

8.2 Система «стержень-трубка» на рисунке 8.4 (обе детали изготовлены из одного материала) нагрета на  $\Delta t^\circ$ . Каковы температурные напряжения в указанных деталях?

Варианты ответа

1.  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

2.  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

3.  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

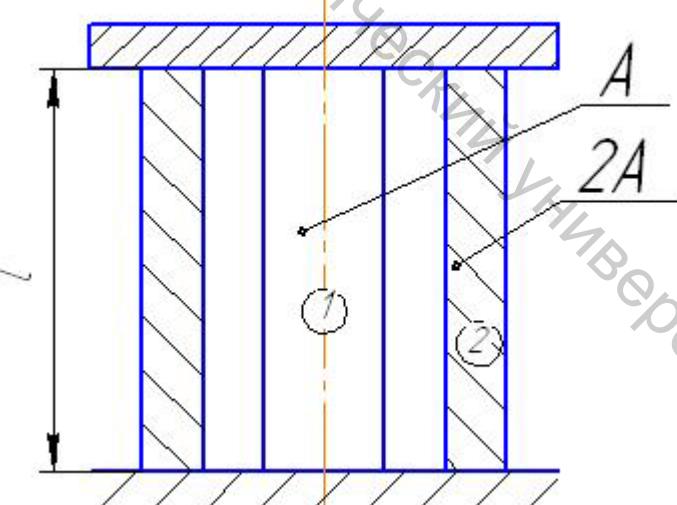
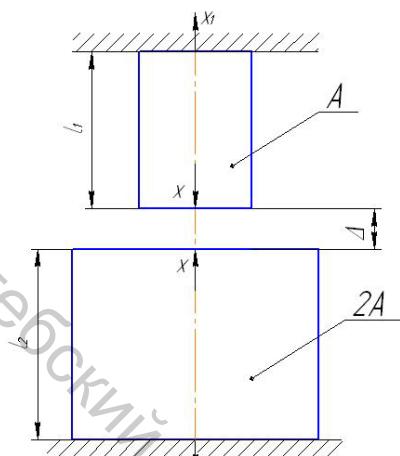


Рисунок 8.4 – Система «стержень-трубка»  
в температурной задаче

## Комментарии

8.1 Уравнение равновесия сил, действующих на собранную систему,  $X_1 - X_2 = 0$ ,  $X_1 = X_2 = X$ , т. е. продольные силы в обоих участках ступенчатого стержня равны:



$$N_1 = N_2 = X.$$

Напряжения (6.2) в стержнях после сборки (монтажа):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{X}{a}, \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{X}{2a}.$$

Верен ответ 1.

8.2 В общей задаче трубка и стержень из разных материалов, например, из меди и стали:  $\alpha_m > \alpha_c$ ,  $E_m < E_c$ . Усилия, сжимающее стержень и растягивающее трубку, одинаковы:

$$N_c = N_m = N. \quad (8.3)$$

Удлинения стержня и трубы одинаковы:

$$\alpha_c \Delta t^\circ l - \frac{N_c l}{E_c A} = \alpha_i \Delta t^\circ l + \frac{N_i l}{E_i 2A}. \quad (8.4)$$

Решение уравнений (8.3, 8.4)

$$N = \frac{(\alpha_c - \alpha_i) \Delta t^\circ}{\frac{1}{E_c} + \frac{1}{2E_i}} A < 0,$$

т. е. стальной стержень растянут, а медная трубка сжата (вопреки предположению). В частном случае на рисунке 8.4 коэффициенты температурного расширения одинаковых материалов трубы и стержня одинаковы, т. е. усилия в них

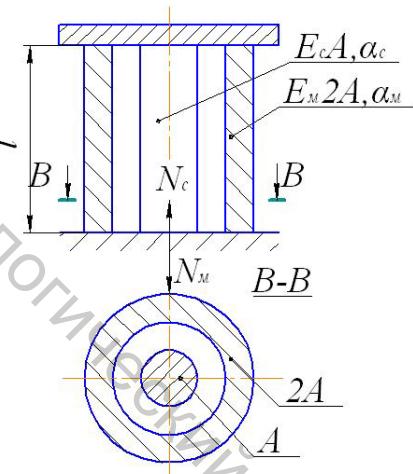
$$N_{cm} = N_{mp} = 0.$$

Температурные напряжения в трубке и стержне равны нулю. Верен ответ 2.

Верный ответ 2 очевиден, если заметить, что стержень и трубка на рисунке 8.4 представляют собой один стержень с поперечным сечением площадью  $3A$ , показанным на рисунке. Напряжения при растяжении – сжатии такого стержня распределяются в его сечении равномерно:  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Вместе с этим стержень с одним защемленным торцом статически определим: температурные усилия – напряжения равны нулю.

В общем случае напряжение в трубке всегда меньше напряжения в стержне:

$$\sigma_{mp} = \frac{N}{2A} < \frac{N}{A} = \sigma_{cm}.$$



## 9 Прямой изгиб балки из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию

Как следует из общей теории лекции 5, нормальные напряжения при прямом изгибе в плоскости  $yz$  (рис. 9.1) определяются по формуле

$$\sigma = -\frac{\frac{1}{2} \delta}{I_x} y. \quad (9.1)$$

Напряжения (9.1), не изменяясь по ширине сечения  $\hat{a}$ , изменяются по высоте  $h$  – по линейному закону. В точках главной центральной оси  $x$  напряжения (9.1) равны нулю. Ось  $x$  – нейтральная (нулевая) линия, а плоскость  $xz$  – нейтральный слой. Продольные волокна, образующие его, не удлиняются и не укорачиваются, но искривляются; продольные волокна, образующие слои, параллельные нейтральному, укорачиваются – сжимаются вверху (на рис. 9.1, 9.2) и удлиняются – растягиваются внизу. Поперечные сечения поворачиваются вокруг нейтральных линий  $x$ , нейтральный слой искривляется, становится цилиндрической поверхностью: точки нейтрального слоя получают перемещения, перпендикулярные к нему; продольная ось искривляется в плоскости  $yz$ , образуя плоскую упругую кривую.

Каковы же внешние силы при прямом изгибе балки в плоскости  $yz$ ? Из трех внутренних моментов сохраняется только изгибающий момент  $M_x$  – все внешние силы действуют в плоскости  $yz$ ; нет внутренних сил  $N_z$  и  $Q_x$  – все внешние силы перпендикулярны к плоскости  $xz$ . Следовательно, наряду с моментом  $M_x$  действует поперечная сила  $Q_y$  – изгиб следует называть прямым поперечным. Если сила  $Q_y \equiv 0$ , изгиб называется прямым чистым. Указанные внешние силы (и возможно, сосредоточенные моменты) показаны на рисунке 9.2 – они действуют в плоскости упругой кривой.

Наибольшие по модулю из напряжений (9.1)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (9.2)$$

где момент сопротивления поперечного сечения при изгибе

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (9.3)$$

В случаях прямоугольника и круга, показанных на рисунке 9.3, моменты сопротивления (9.3)

$$W_x = \frac{\frac{1}{2} \hat{a} h^3}{h/2} = \frac{\frac{1}{2} \hat{a} h^2}{6}, \quad W_x = \frac{\frac{1}{4} \pi d^4}{d/2} = \frac{\frac{1}{32} \pi d^3}{32}. \quad (9.4)$$

Условие прочности (см. напряжения (9.2))

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

Если материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, удобно сделать так, чтобы наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения были одинаковы (из соображений равнопрочно-

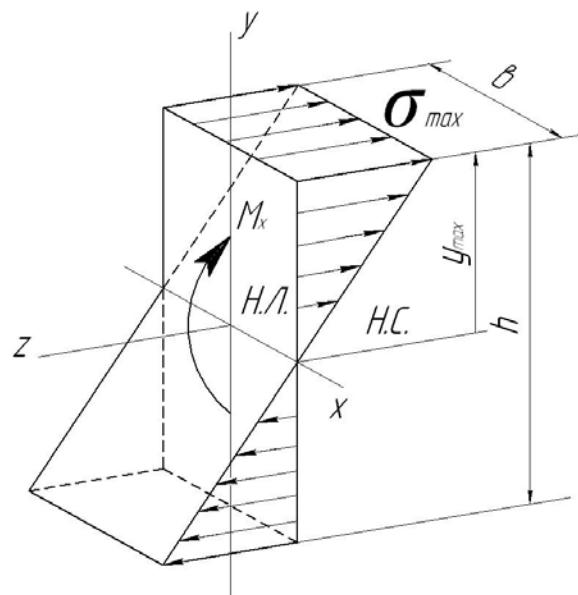


Рисунок 9.1 – Пространственная эпюра нормальных напряжений при прямом изгибе

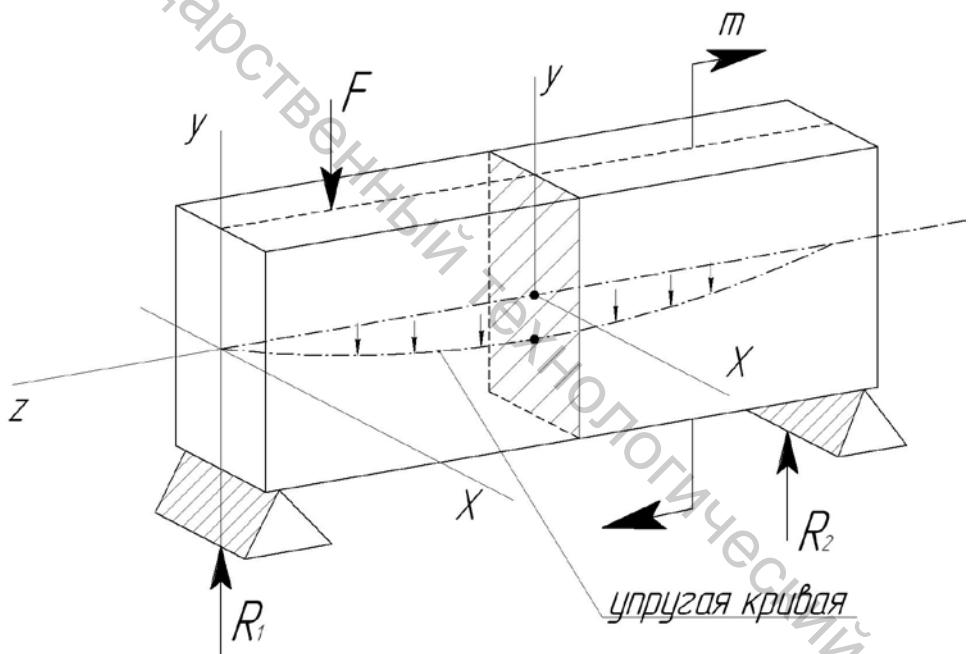


Рисунок 9.2 – Продольная ось искривляется в плоскости нагрузки

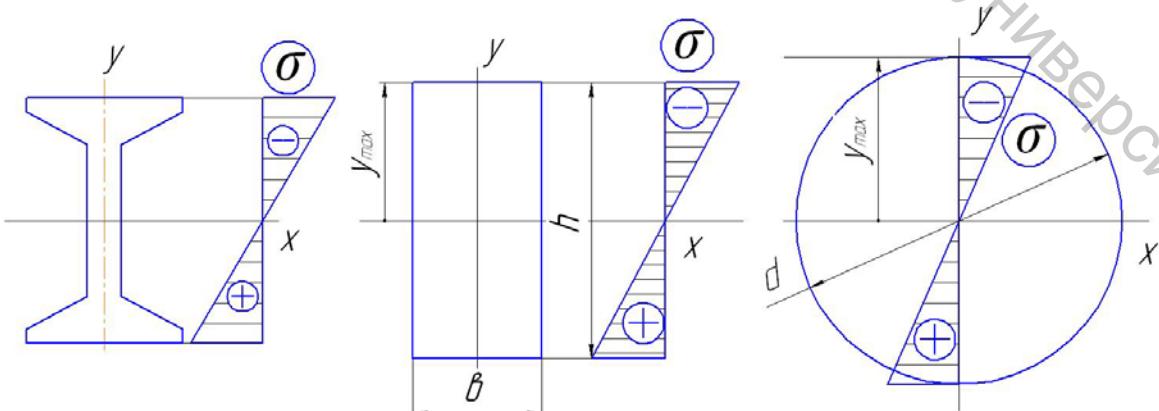


Рисунок 9.3 – Двутавровое, прямоугольное и круглое поперечные сечения равнопрочных балок

сти). Сделаем сечение балки симметричным относительно оси  $x$  (рис. 9.3).

Сечение тем прочнее (при заданной площади сечения), чем больше его момент сопротивления. Добьемся этого, рационально распределив материал в объеме балки.

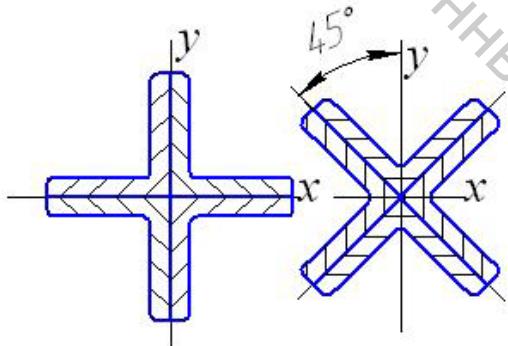
С этой точки зрения, наиболее рационален двутавр. При заданной нагрузке он требует наименьшей площади или наименьшего расхода материала (здесь предусмотрено (рис. 9.3), что материал сосредоточен в зонах, где действуют относительно высокие напряжения). Наименее рационален круг. В его случае материал концентрируется вблизи нейтральной линии  $x$ , где действуют относительно небольшие напряжения. Кольцевое сечение лучше.

При заданном расходе материала (заданной площади сечения) двутавровое сечение обеспечивает наибольшую грузоподъемность, наименьшая грузоподъемность у круглой балки. Круговое сечение, конечно, используется – из технологических соображений.

#### Тестирование

9.1. Поперечное сечение балки (рис. 9.4) составлено из четырех равнобоких уголков. Изменится ли прочность балки, если ее повернуть

относительно плоскости нагрузки  $uz$  на  $45^\circ$ ?



Варианты ответа

1. Прочность увеличится.
2. Прочность снизится.
3. Прочность не изменится.

Рисунок 9.4 – Поперечное сечение балки  
составлено из четырех равнобоких уголков

9.2 Все размеры консоли, находящейся под действием (рис. 9.5) собственного веса, удваиваются. Как изменятся наибольшие нормальные напряжения в балке?

Варианты ответа

1. Не изменятся.
2. Уменьшатся.
3. Возрастут.

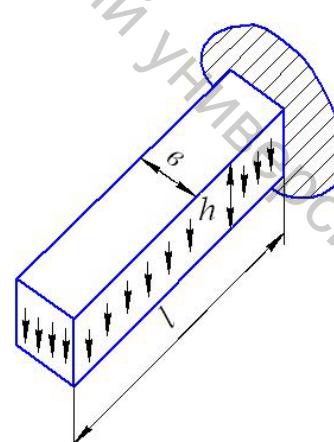
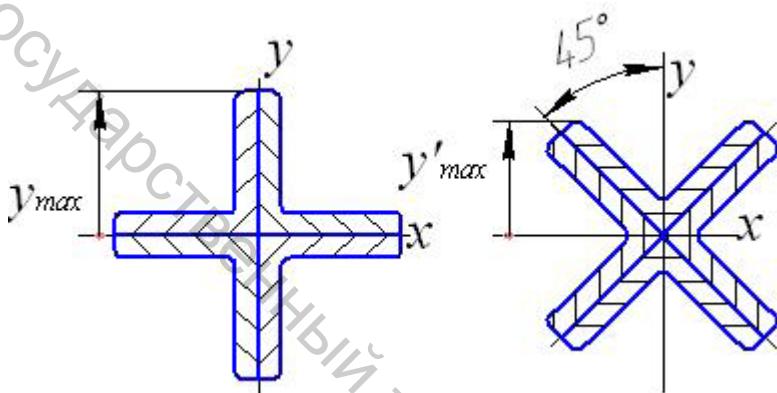


Рисунок 9.5 – Консоль под действием сил тяжести

## Комментарии

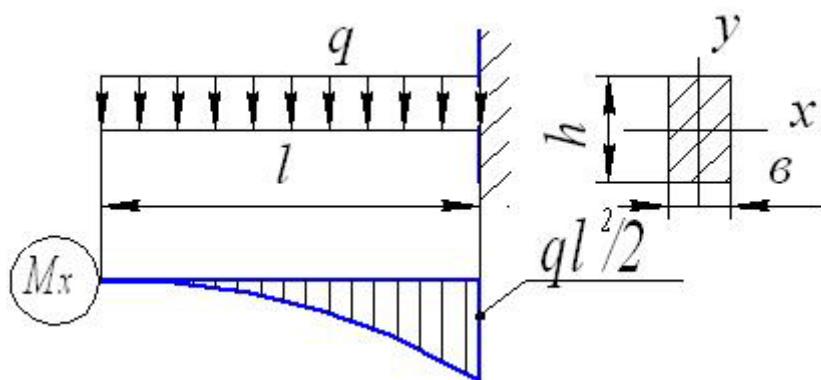
9.1 Оси  $x$  и  $y$  на рисунке в обоих случаях – оси симметрии попечного сечения балки. Следовательно, эти оси – главные центральные оси (в обоих случаях!). Главный центральный момент инерции  $I_x$  не изменяется при повороте сечения, но момент сопротивления сечения при изгибе в плоскости  $yz$   $W_x = I_x / y_{max}$  изменяется. На рисунке  $y_{max} < y_{max}'$ ; соответственно,  $W_x' > W_x$  (при любом повороте балки в пределах прямого угла!). При повороте на  $45^\circ$ , показанном на рисунке,  $y_{max}' = y_{max} / \sqrt{2}$ , т. е.  $W_x' = \sqrt{2}W_x$  – прочность балки возрастет в  $\sqrt{2}$  раз. Верен ответ 1.



9.2 Интенсивность равномерно распределенных сил тяжести

$$q = \gamma \hat{a} h,$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала балки. Наибольший изгибающий момент  $M_x = ql^2 / 2 = \gamma \hat{a} h l^2 / 2$ . Момент сопротивления сечения  $W_x = \hat{a} h^2 / 6$ . Наибольшие напряжения  $\sigma_{max} = M_x / W_x = 3\gamma l^2 / h$  пропорциональны первой степени размера балки. Наибольшее напряжение возрастет в два раза. Верен ответ 3.



## 10 Прямой изгиб балки из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию

Если материал балки различно сопротивляется растяжению и сжатию, его следует концентрировать в той зоне поперечного сечения, где действуют растягивающие напряжения (ибо предел прочности при растяжении  $\sigma_{sp}$  меньше предела прочности при сжатии  $\sigma_{sc}$ ). Этому условию отвечают несимметричный двутавр (рис. 10.1) и (несколько хуже) тавровое сечение (рис. 10.2).

Имея в виду равнопрочность сечения на растяжение и сжатие, потребуем равенства

$$\frac{[\sigma]_c}{y_c} = \frac{[\sigma]_p}{y_p} \quad (10.1)$$

– при росте нагрузки на балку наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения одновременно достигнут допускаемых значений.

Если равенства (10.1) нет, рассматриваются два условия прочности:

$$\max \sigma_p = \frac{M_x}{I_x} y_p \leq [\sigma]_p, \max \sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y_c \leq [\sigma]_c. \quad (10.2)$$

На рисунке 10.3 показана балка треугольного поперечного сечения, допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma]_p = [\sigma]$ ,  $[\sigma]_c = 3[\sigma]$ . Пусть балка поставлена на опоры массивной частью вверх (рис. 10.3 а). Наибольшее по модулю напряжение – растягивающее напряжение  $\max \sigma_p = 3Fl\hat{a}/I_x$ , вместе с этим материал балки работает на сжатие лучше. Из условия прочности

$$\max \sigma_p \leq [\sigma]_p, 3Fl\hat{a}/I_x \leq [\sigma]$$

находим: допускаемая нагрузка

$$[F] = \frac{1}{3} \frac{[\sigma] I_x}{l\hat{a}}. \quad (10.3)$$

Если балку перевернуть (рис. 10.3 б), наибольшее растягивающее напряжение  $2Fl\hat{a}/I_x$  меньше наибольшего сжимающего  $3Fl\hat{a}/I_x$ . Следует воспользоваться двумя условиями прочности (10.2):

$$\max \sigma_p \leq [\sigma]_p, 2Fl\hat{a}/I_x \leq [\sigma]; \max \sigma_c \leq [\sigma]_c, 3Fl\hat{a}/I_x \leq 3[\sigma];$$

допускаемые нагрузки

$$[F]_p = \frac{1}{2} \frac{[\sigma] I_x}{l\hat{a}}, [F]_c = \frac{[\sigma] I_x}{l\hat{a}}.$$

Допускаемая нагрузка – меньшая из двух: эта нагрузка

$$[F] = [F]_p = \frac{1}{2} \frac{[\sigma] I_x}{l\hat{a}} \quad (10.4)$$

больше допускаемой нагрузки (10.3). Перевернув балку, мы увеличили ее прочность.

Напряжения при нагрузке (10.4) указаны на рисунке 10.3 в скобках. В перевернутой балке (рис. 10.3 б) все напряжения удовлетворяют

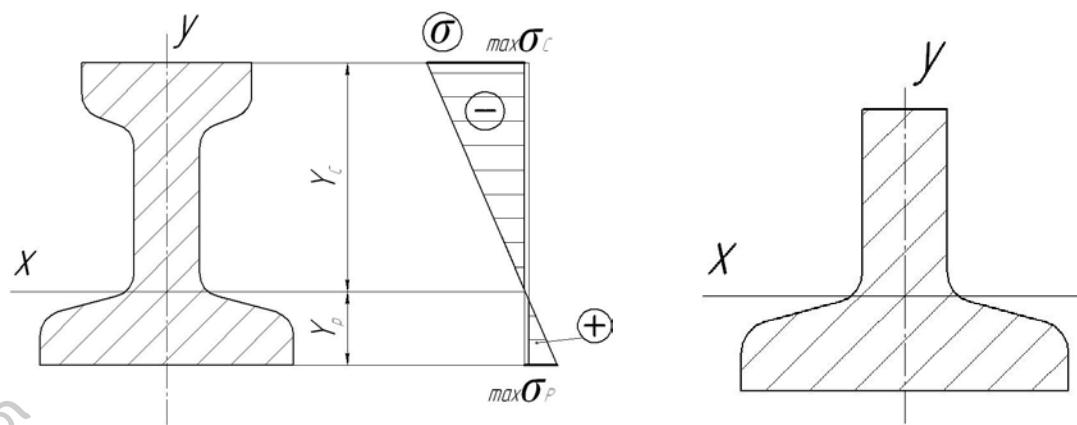


Рисунок 10.1 – Несимметричный двутавр

Рисунок 10.2 – Тавровое сечение

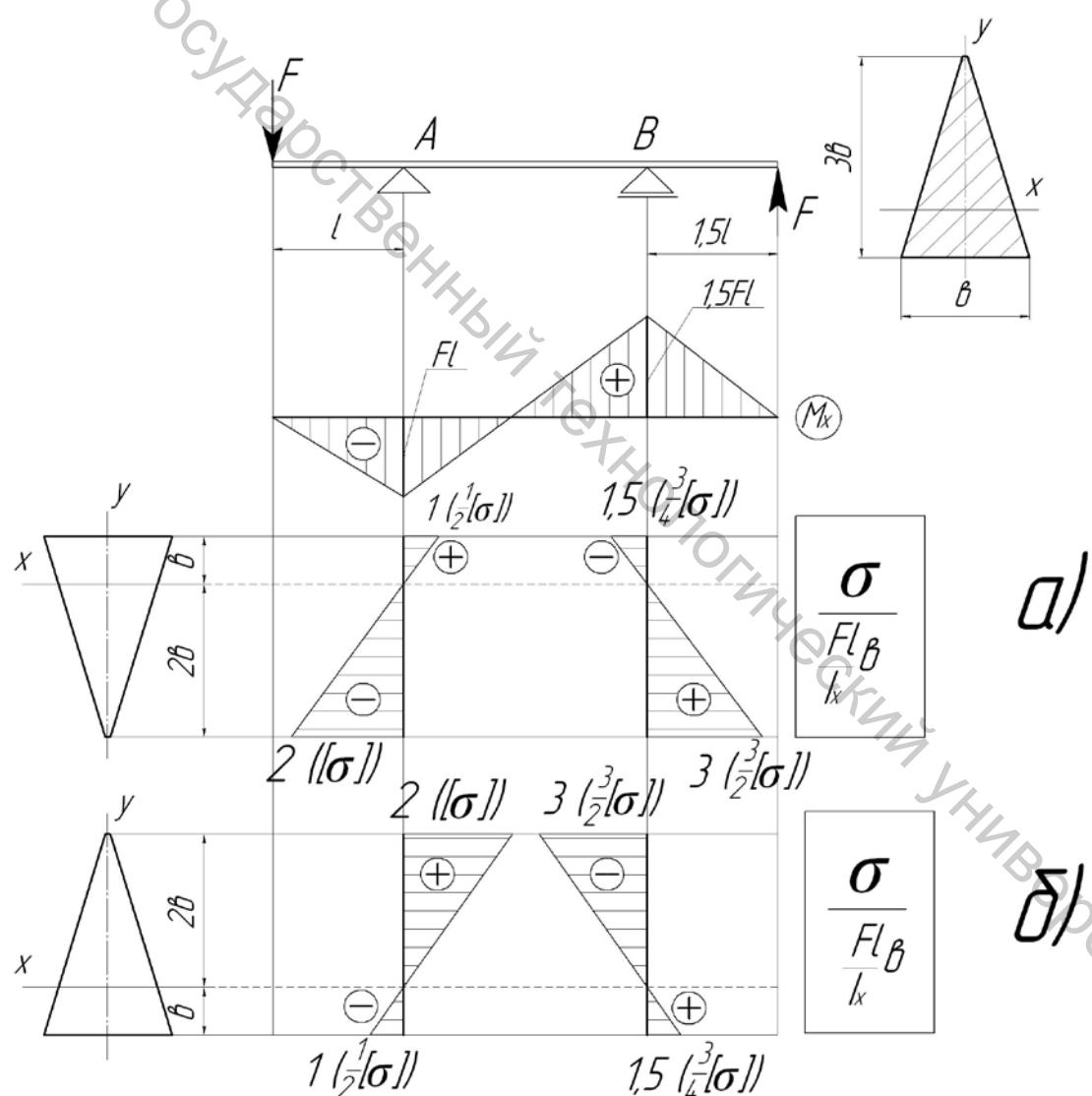


Рисунок 10.3 – К вопросу о допускаемой нагрузке на балку из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию

условиям прочности (10.2). В балке, поставленной массивной частью вверх, сжимающие напряжения меньше допускаемого  $3[\sigma]$ , наибольшее растягивающее напряжение в сечении В превышает допускаемое  $[\sigma]$  (рис. 10.3 а).

Общее правило: балка должна ставиться так, чтобы в сечении, в котором действует наибольший по модулю изгибающий момент, ее массивная часть работала на растяжение. Наибольший изгибающий момент на рисунке 10.3  $1,5Fl$ , соответствующая ордината эпюры  $M_x$  отложена вверх – следовательно, нижняя часть балки работает на растяжение. Балку ставим массивной частью вниз (рис. 10.3 б).

#### Тестирование

10.1 На рисунке 10.4 изображено рациональное поперечное сечение, удовлетворяющее условию (10.1)

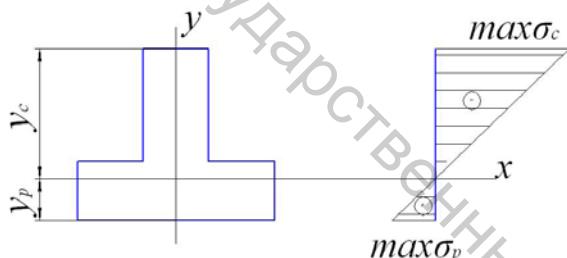


Рисунок 10.4 – Рациональное поперечное сечение

Пусть из-за ошибок, допущенных при изготовлении балки, условие (10.5) нарушено:

$$\frac{y_c}{y_p} > \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}. \quad (10.6)$$

Какое из двух условий прочности (10.2) следует использовать?

#### Варианты ответа

1.  $\max \sigma_p \leq [\sigma]_p$ .
2. Безразлично какое.
3.  $\max \sigma_c \leq [\sigma]_c$ .

10.2 Как изменится допускаемая нагрузка на рисунке 10.5 при изменении ее направления. Полученное сечение балки удовлетворяют условию

$$\frac{y_c}{y_p} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}. \quad (10.7)$$

#### Варианты ответа

1. Уменьшится.
2. Не изменится.
3. Увеличится.

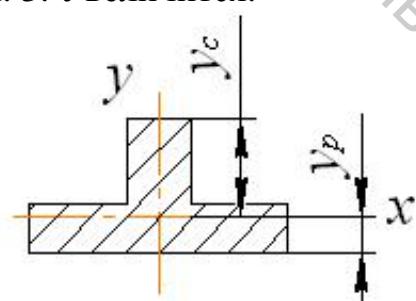
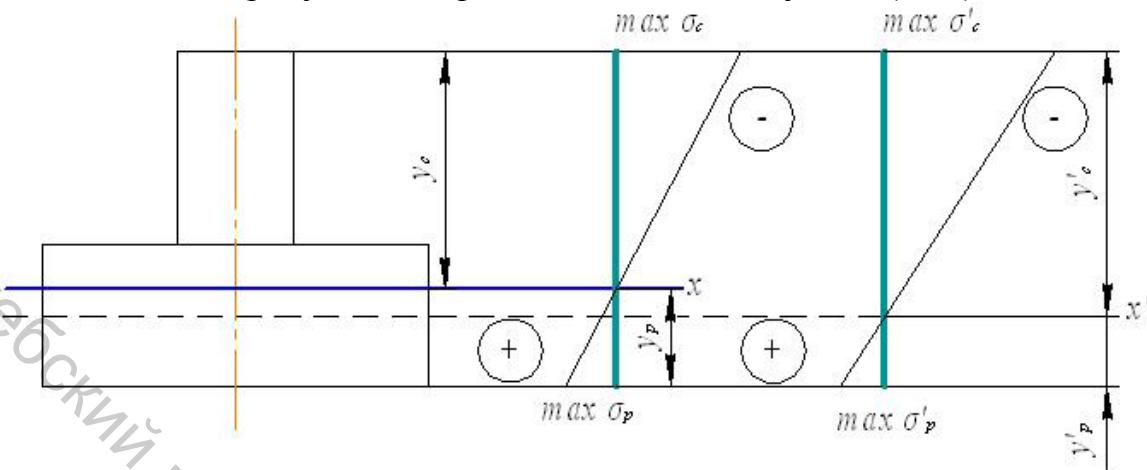


Рисунок 10.5 – Сечение балки не удовлетворяет условию (10.1)

## Комментарии

10.1 На рисунке изображена заданная ситуация (10.6):



$$\frac{y_c}{y_p} = \frac{\max \sigma_c}{\max \sigma_p} > \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}.$$

В момент, когда наибольшее растягивающее напряжение  $\max \sigma_p$  достигнет допускаемого  $[\sigma]_p$ , наибольшие сжимающие напряжения окажутся больше допускаемого  $[\sigma]_c$ , т. е. второе из условий (10.2) будет нарушено. Следовательно, в расчете на прочность следует использовать, именно, это условие. Верен ответ 3.

## 10.2 Из заданного условия (10.7)

$$\frac{y_c}{y_p} = \frac{\max \sigma_c}{\max \sigma_p} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p} \quad (10.8)$$

следует, что при росте нагрузки  $F$  первым будет достигнуто допускаемое напряжение  $[\sigma_p]$ . Наибольшие сжимающие напряжения останутся меньше допускаемого  $[\sigma]_c$ . Допускаемая нагрузка находится из первого из условий прочности (10.2):

$$\max \sigma_p \leq [\sigma]_p, \frac{Fl}{I_x} y_p \leq [\sigma]_p, [F] = \frac{I_x}{l} \frac{[\sigma]_p}{y_p}.$$

При изменении направления силы  $F$  (на рисунке  $F' = F$ ) соотношение (10.8) изменится:

$$\frac{y_c}{y_p} = \frac{\max \sigma_c'}{\max \sigma_p'} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p},$$

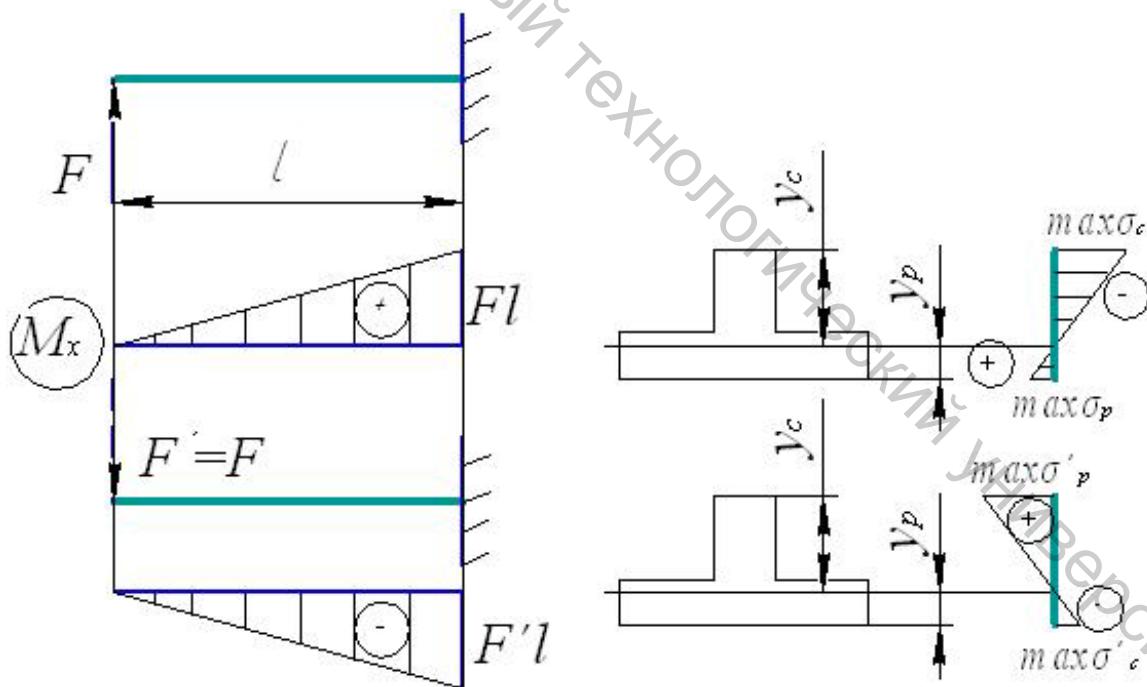
тем более

$$\frac{\max \sigma_c'}{\max \sigma_p'} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}.$$

Допускаемая нагрузка находится опять же из первого из условий прочности (10.2):

$$\max \sigma_p' \leq [\sigma]_p, \frac{F' l}{I_x} y_c \leq [\sigma]_p, [F'] = \frac{I_x}{l} \cdot \frac{[\sigma]_p}{y_c}.$$

На рисунке  $y_c > y_p$ , следовательно,  $[F'] < [F]$ . Верен ответ 1. Во втором нагружении балку следует перевернуть.



## 11 Сложное сопротивление: косой изгиб, внецентренное растяжение

На рисунке 11.1 показаны силы (по одну сторону от рассматриваемого сечения), действующие в одной плоскости, как и в случае прямого изгиба (рис. 9.2). Однако плоскость эта не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции стержня – плоскостей  $yz$  и  $xz$ . Как и в случае прямого изгиба, можно найти внутренний момент относительно оси  $u$ , перпендикулярной к силовой плоскости. Но момент этот ( $M_u$ ) не внутренний силовой фактор, ибо изгибающие моменты – ВСФ находятся относительно главных центральных (естественных) осей  $x$  и  $y$ . Изгибающий момент  $M_u$  разлагают на два ВСФ –  $M_x$  и  $M_y$ . Впрочем, силы, действующие на брус (стержень), можно разложить на две плоские системы сил – в плоскостях  $yz$  и  $xz$  – и определить изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  – ВСФ. Изгибающий момент  $M_u$  – их геометрическая сумма. При таком подходе косой изгиб на рисунке 11.1 становится частным случаем общего случая изгиба произвольными силами (рис. 11.2).

Если дуговые стрелки на рисунках 11.1 и 11.2 представить себе «сделанными» из гибкой проволоки и «прижать» их к плоскости поперечного сечения, получим «векторы» изгибающих моментов  $\overrightarrow{M_x}, \overrightarrow{M_y}, \overrightarrow{M_u}$ ; последний действует вдоль силовой линии  $c - c$  (рис. 11.1). Нормальные напряжения при изгибе найдем на основе принципа независимости действия сил (рассматривая наложение двух прямых изгибов – см. формулу (9.1) – в плоскостях  $yz$  и  $xz$ ) или используя формулу (5.4):

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (11.1)$$

Если векторы напряжений (11.1) отложить от плоскости сечения, их концы составят плоскость, пересекающую плоскость поперечного сечения по нейтральной линии  $H - H$  – ее уравнение

$$\sigma = 0, -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0, y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x. \quad (11.2)$$

Отношение  $M_y / M_x = \operatorname{tg} \alpha$  (рис 11.1), т. е. угловой коэффициент в уравнении прямой (11.2)

$$\operatorname{tg} \beta = -(\operatorname{tg} \alpha) \frac{I_x}{I_y} \quad (11.3)$$

– нейтральная линия уклоняется от перпендикуляра к силовой линии и в сторону оси наименьшего момента инерции. Действительно, при  $I_x > I_y$   $|\operatorname{tg} \beta| > |\operatorname{tg} \alpha|, \beta > \alpha$ ; при  $I_y > I_x$   $|\operatorname{tg} \beta| < |\operatorname{tg} \alpha|, \beta < \alpha$ .

При косом изгибе на рисунке 11.1 угол  $\beta$  (11.3) один и тот же во всех сечениях бруса. Нейтральные линии  $H - H$  образуют слой, становящийся при изгибе цилиндрической поверхностью, – точки слоя получают перемещения, перпендикулярные к слою, или перпендикулярные к нейтральным линиям  $H - H$ . Направления прогибов  $f$  не совпадают

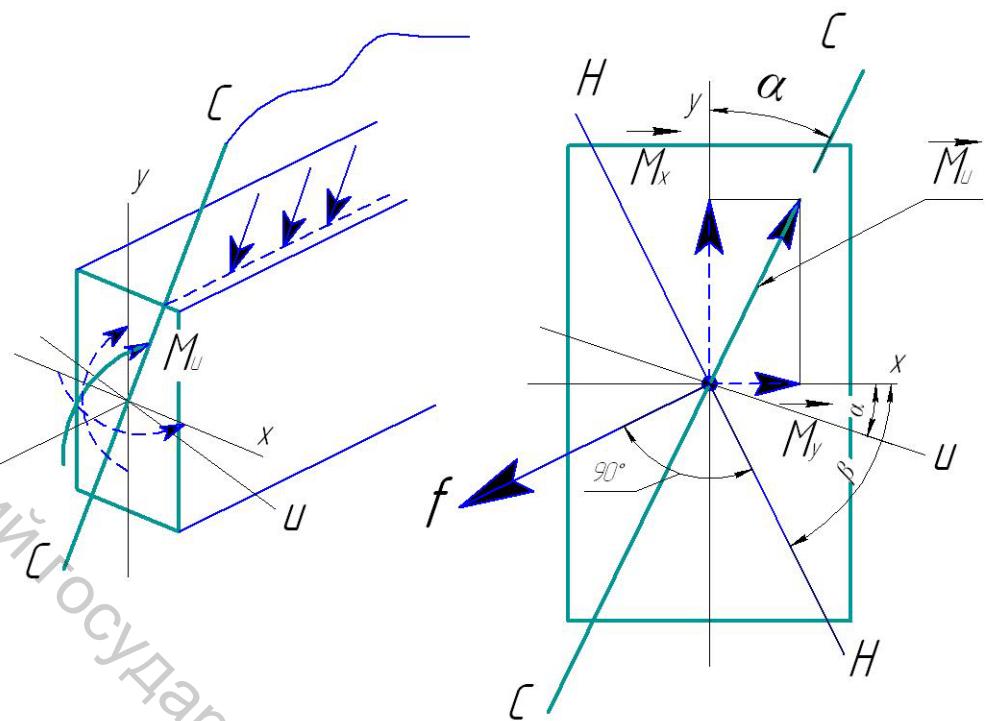


Рисунок 11.1 – Косой изгиб

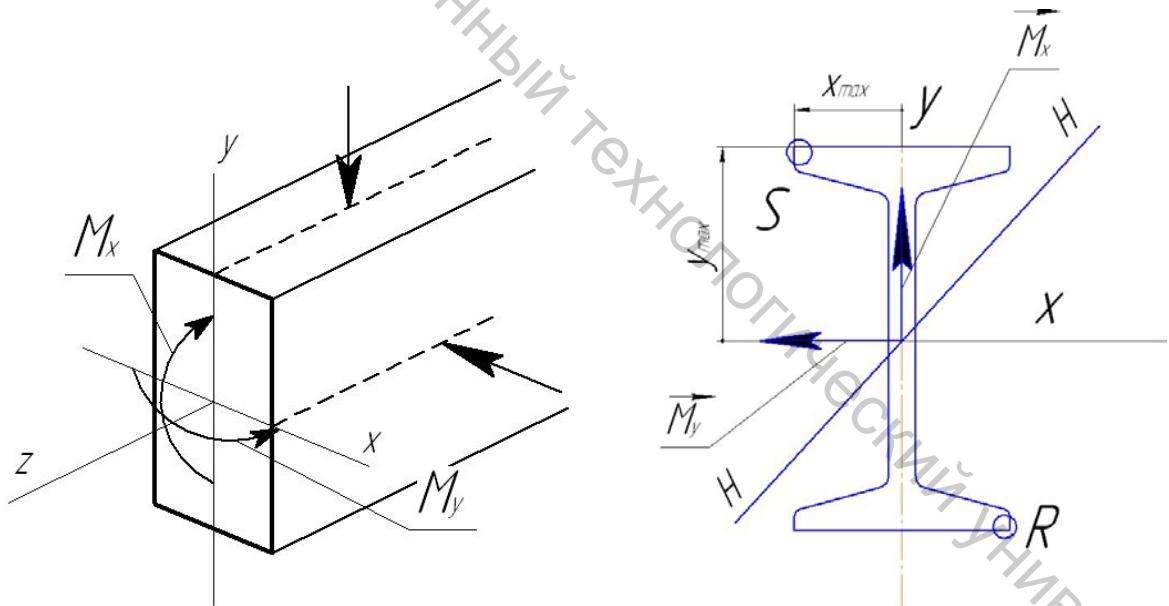


Рисунок 11.2 – Произвольная система изгибающих сил

Рисунок 11.3 – Опасные точки двутаврового сечения при изгибе

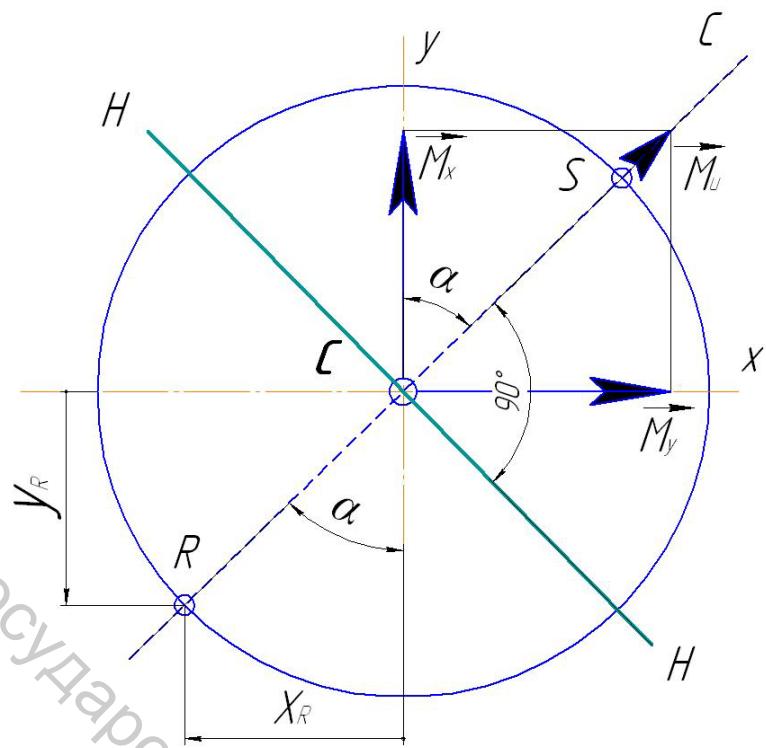


Рисунок 11.4 – Опасные точки круглого сечения

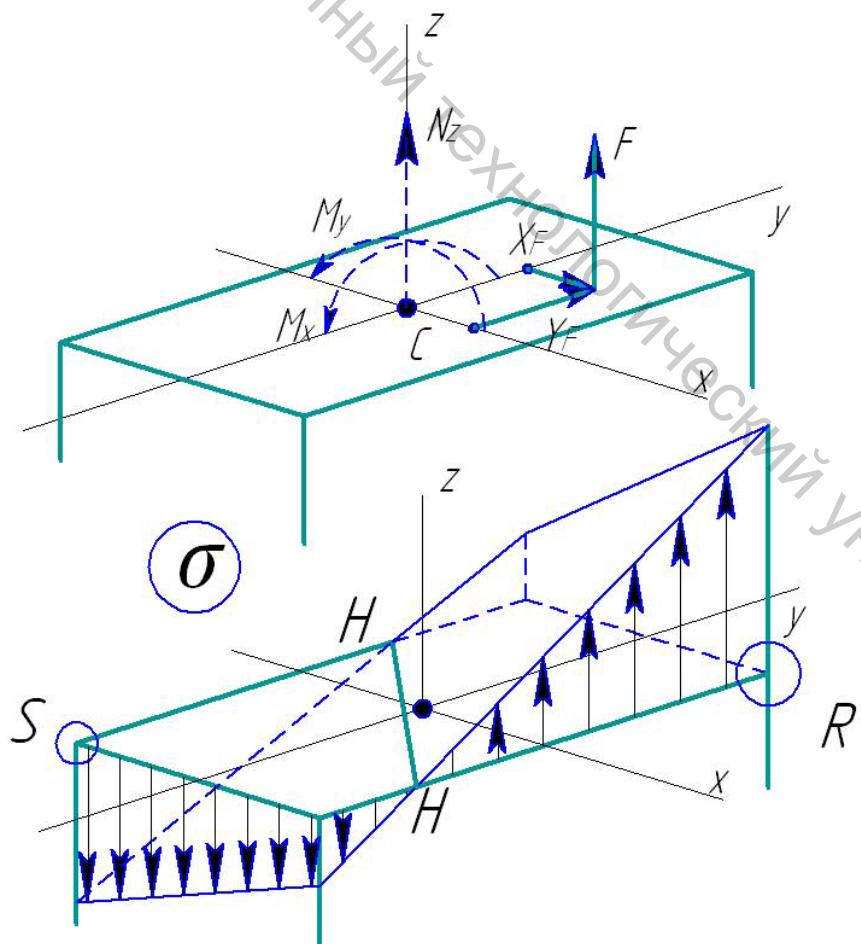


Рисунок 11.5 – Внеклентренное растяжение: равнодействующая внутренних сил, эпюра напряжений  $\sigma$

(рис. 11.1) с силовыми линиями  $C - C$ , одинаковыми во всех сечениях, т. е. продольная ось стержня искривляется в плоскости, отличной от силовой.

Наибольшие по модулю напряжения действуют в опасных точках, наиболее удаленных от нейтральной линии  $H - H$ . В частных случаях сечений, подобных двутавру, это точки  $R$  и  $S$  с наибольшими ординатой и абсциссой (рис. 11.3) находим по формуле (11.1)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} y_{\max} + \frac{|M_y|}{I_y} x_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}. \quad (11.4)$$

Моменты инерции круглого сечения (рис. 11.4) равны, т. е. угол (11.3)  $\beta = \alpha$ , нейтральная линия совпадает с осью  $u$  – перпендикуляром к силовой линии  $C - C$ . Опасные точки  $S$  и  $R$  – точки пересечения окружности – границы сечения с силовой линией. Координаты одной из них, например, точки  $R$

$$y_R = \frac{d}{2} \cos \alpha, x_R = \frac{d}{2} \sin \alpha,$$

где  $d$  – диаметр сечения; изгибающие моменты

$$M_x = M_u \cos \alpha, M_y = M_u \sin \alpha.$$

Наибольшие по модулю напряжения в точках  $S$  и  $R$  находим по формуле (11.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u \cos \alpha}{I_x} \frac{d}{2} \cos \alpha + \frac{M_u \sin \alpha}{I_y} \frac{d}{2} \sin \alpha = \frac{M_u}{W_u}, \quad (11.5)$$

где изгибающий момент  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ , момент сопротивления при изгибе  $W_u = I_x / (d/2) = \pi d^3 / 32$  таков же, как момент сопротивления при прямом изгибе (9.4). Что же касается формулы (11.4), применять ее в случае круга нельзя!

На рисунке 11.5 показан результат приведения внутренних сил при внецентренном растяжении стержня – равнодействующая  $F$ . Однако, она не ВСФ. ВСФ получим, приводя силу  $F$  к центру тяжести сечения: найдем продольную силу  $N_z = F$  и изгибающие моменты

$$M_x = -Fy_F, M_y = -Fx_F.$$

Напряжения определяются по формуле (5.4):

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_F}{I_x} y + \frac{Fx_F}{I_y} x = \frac{F}{A} \left( 1 - \frac{y}{a_y} - \frac{x}{a_x} \right), \quad (11.6)$$

где введены обозначения

$$a_x = -\left( \frac{I_y}{A} \right) \cdot \frac{1}{x_F}, a_y = -\left( \frac{I_x}{A} \right) \cdot \frac{1}{y_F}; \quad (11.7)$$

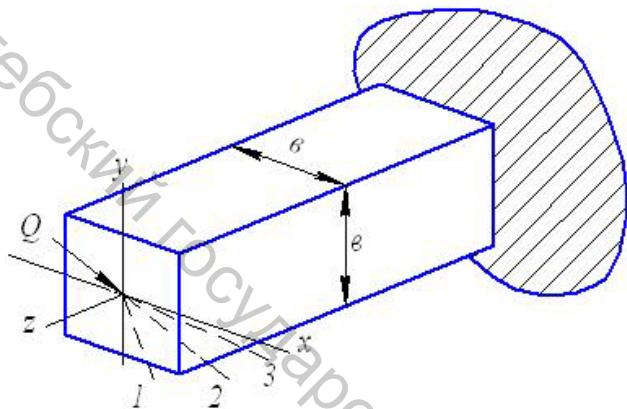
уравнение нейтральной линии

$$\sigma = 0, \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1. \quad (11.8)$$

В уравнении (11.8) величины (11.7) – отрезки, отсекаемые нейтральной линией  $H - H$  на естественных осях  $x$  и  $y$ . Эпюра напряжений, построенная по формуле (11.6), показана в нижней части рисунка 11.5.

#### Тестирование

11.1 Балка с квадратным поперечным сечением на рисунке 11.6 изгибается силой  $Q$ . С каким из направлений совпадает направление перемещения (прогиба) свободного конца балки?



Варианты ответа

1. С направлением 1.
2. С направлением 2.
3. С направлением 3.

Рисунок 11.6 – Изгиб балки

11.2 Ступенчатый стержень из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, на рисунке 11.7 сжат силой  $F$ . Какой из участков стержня прочнее?

Варианты ответа

1. Верхний участок.
2. Стержень равнопрочный.
3. Нижний участок.

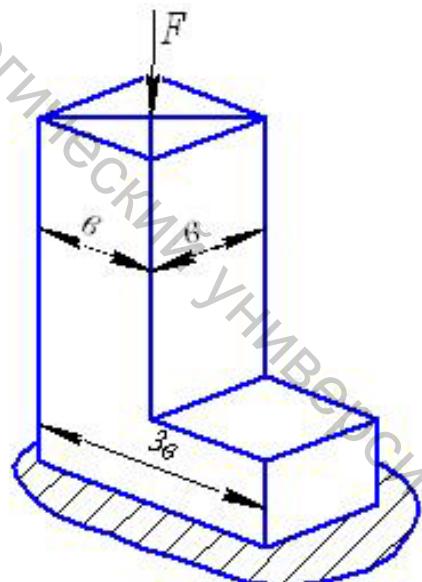
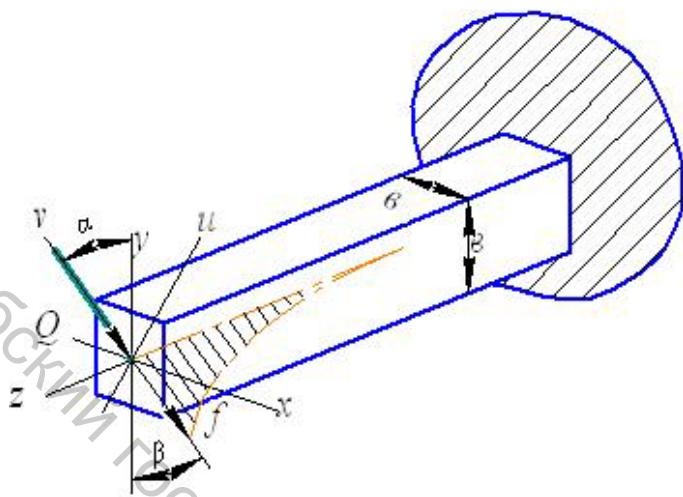


Рисунок 11.7 – Сжатие ступенчатого стержня

## Комментарии

11.1 Главные центральные моменты инерции квадрата  $I_x = I_y$ .

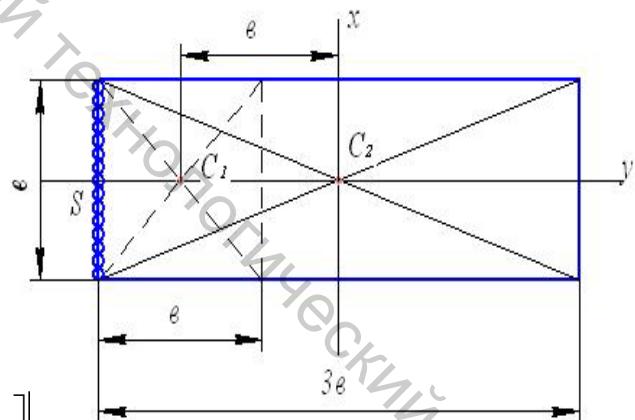
Угол (11.3)  $\beta = \alpha$ . Верен ответ 2.



11.2 Верхний участок стержня на рисунке 11.7 работает на сжатие, напряжение в этом участке  $\sigma_1 = F / \hat{a}^2$ . Второй (нижний) участок сжат внецентренно: приведение равнодействующей внутренних сил  $F$ , приложенной в точке  $C_1$ , к центру тяжести сечения  $C_2$  дает ВСФ – продольную силу  $N_z = -F$ , изгибающие моменты

$$M_x = -F \cdot C_1 C_2 = -F \hat{a}, M_y = 0.$$

Наибольшие сжимающие напряжения, действующие в точках  $S$  ( $y_s = -3\hat{a}/2$ ), находятся по формулам (11.6, 11.7):



$$\max \sigma_c = \left| -\frac{F}{(\hat{a} \cdot 3\hat{a})} \left[ 1 - \frac{\frac{(-3\hat{a})}{2}}{\frac{\hat{a} \cdot (3\hat{a})^3}{12(\hat{a} \cdot 3\hat{a})} \cdot \frac{1}{(-\hat{a})}} \right] \right| = \frac{F}{\hat{a}^2}$$

Или, налагая на основе принципа независимости действия сил сжатие на прямой изгиб, получим

$$\max \sigma = \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} = \frac{F}{\hat{a} \cdot 3\hat{a}} + \frac{F\hat{a}}{\hat{a}(3\hat{a})^2} = \frac{F}{\hat{a}^2}.$$

Участки стержня равнопрочны. Верен ответ 2.

## 12 Касательные напряжения при прямом поперечном изгибе

«Вырежем» из стержня бесконечно малый параллелепипед – элемент. На его взаимно перпендикулярных гранях действуют в общем случае (рис.1.4) 9 напряжений: 3 нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и 6 касательных  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ;  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ ;  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xz}$ . Напряжения на параллельных бесконечно близких гранях, конечно, отличаются друг от друга – на бесконечно малые величины (см., например, на рисунке 12.1 напряжения  $\sigma_z$  и  $\sigma_z + d\sigma_z$ ).

На рисунке 12.1 удержаны (из 9 напряжений) напряжения, параллельные оси  $z$ , и касательные напряжения, действующие в плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ . Уравнение проекций всех сил, действующих на элемент, на ось  $z$

$$(\tau_{zx} + d\tau_{zx})dydz - \tau_{zx}dydz + (\tau_{zy} + d\tau_{zy})dzdx - \tau_{zy}dzdx + (\sigma_z + d\sigma_z)dx dy - \sigma_z dx dy + G_z dx dy dz = 0, \quad (12.1)$$

где силы, действующие на грани элемента, получены умножением напряжений на площади граней;  $G_z$  – проекция плотности объемных сил (силы, действующей на единицу объема). Уравнение моментов относительно оси  $x$  (см. второй рисунок)

$$[(\tau_{zy} + d\tau_{zy})dx dz]dy - [\tau_{yz}dx dy]dz + [G_z dx dy dz]dh_z + [G_z dx dy dz]dh_y = 0, \quad (12.2)$$

где  $G_y$  и  $G_z$  – величины составляющих плотности  $G$  (равные ее проекциям), перпендикулярных к оси  $x$ ,  $dh_z$  и  $dh_y$  – их плечи.

Все бесконечно малые, входящие в уравнение (12.1), одного порядка; моменты объемных сил и момент силы  $[d\tau_{zy}dx dz]dy$  в уравнении (12.2) четвертого порядка малости, тогда как моменты поверхностных сил – третьего порядка – первые вычеркиваем. Найдем в итоге уравнения

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + G_z = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (12.3)$$

Аналогичным образом найдем еще четыре уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + G_x = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + G_y = 0, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Вторые в уравнениях (12.3 – 12.4) носят название закона парности касательных напряжений. Именно поэтому на первом из рисунков

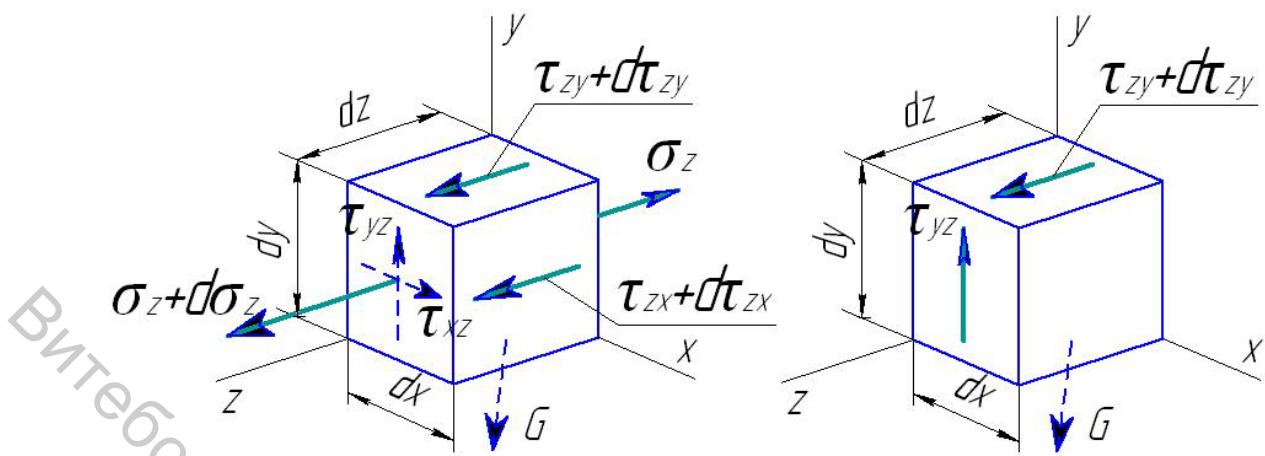


Рисунок 12.1 – К выводу уравнений равновесия в напряжениях

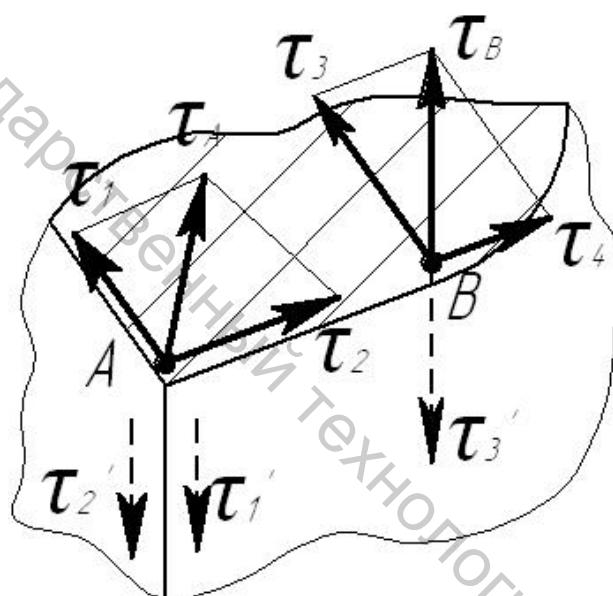


Рисунок 12.2 – Касательные напряжения на границе сечения

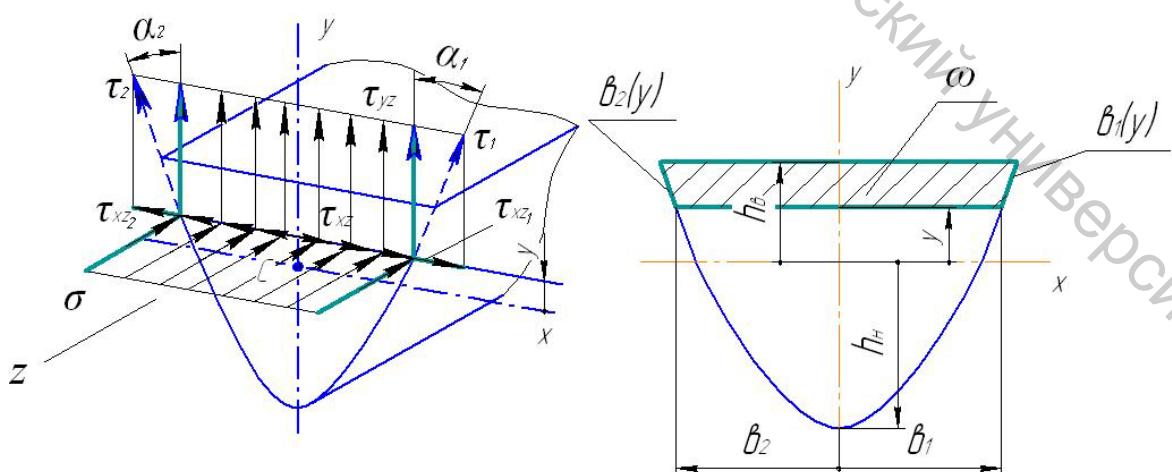


Рисунок 12.3 – Нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении балки

12.1 показаны касательные напряжения  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$  (не входящие в число напряжений, параллельных оси  $z$ ): по закону парности напряжения  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zx}$  возникают и исчезают только совместно.

Рассмотрим (рис. 12.2) касательные напряжения в точках кусочно-гладкой границы поперечного сечения стержня. Положим, что касательное напряжение  $\tau_A$  в вершине «выходящего» угла отлично от нуля. Разложим его по сторонам угла. Составляющим  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отвечают парные касательные напряжения  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$  на свободной поверхности стержня:  $\tau'_1 = 0$ ,  $\tau'_2 = 0$ ; следовательно, напряжение  $\tau_A = 0$ . Разложим касательное напряжение в точке  $B$  гладкого участка границы. Нормальной составляющей  $\tau_3$  отвечает парное напряжение  $\tau'_3 = 0$ ; следовательно, напряжение  $\tau_B = \tau_4$ , т. е. направлено по касательной к границе.

На рисунке 12.3 показано поперечное сечение балки. Полагаем, что нормальные напряжения распределяются по сечению по закону (9.1)

$$\sigma(z, y) = -\frac{M_x(z)}{I_x} y; \quad (12.5)$$

т. е., изменяясь по высоте сечения, не изменяются по его ширине (не зависят от координаты  $x$ ). Полагаем, что и касательные напряжения  $\tau_{yz}(y)$  не изменяются по ширине сечения. На границе сечения касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  направлены (рис. 12.2) по касательным к границе, следовательно, будут составляющие  $\tau_{xz}(x, y)$ .

Проинтегрируем уравнение (12.3) по площади, заштрихованной на рисунке 12.3:

$$\int_{\omega} \frac{\partial \tau_{xz}(x, y)}{\partial x} dx dy + \int_{\omega} \frac{\partial \tau_{yz}(y)}{\partial y} dx dy + \int_{\omega} \frac{\partial \sigma_z(y)}{\partial z} dy = 0; \quad (12.6)$$

(плотность объемных сил  $G_z$  полагаем равной нулю). Первый из интегралов в сумме (12.6)

$$I_1 = \int_{\omega} \frac{\partial \tau_{xz}(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_y^{h\hat{a}} dy \int_{-\hat{a}_2(y)}^{\hat{a}_1(y)} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx = \int_y^{h\hat{a}} (\tau_{xz_1} - \tau_{xz_2}) dy, \quad (12.7)$$

где касательные напряжения (рис. 12.3)  $\tau_{xz_1} = \tau_{yz} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$ ,  $\tau_{xz_2} = -\tau_{yz} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$ , т. е. интеграл (12.7)

$$I_1 = \int_y^{h\hat{a}} \tau_{yz} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) dy = \int_y^{h\hat{a}} \tau_{yz} \left( \frac{d\hat{a}_1}{dy} + \frac{d\hat{a}_2}{dy} \right) dy = \int_y^{h\hat{a}} \tau_{yz}(y) d\hat{a}(y). \quad (12.8)$$

Второй интеграл в сумме (12.6) берется по частям:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\omega} \frac{\partial \tau_{yz}(y)}{\partial y} dx dy = \int_y^{h\hat{a}} \frac{\partial \tau_{yz}(y)}{\partial y} dy \int_{-\hat{a}_2(y)}^{\hat{a}_1(y)} dx = \int_y^{h\hat{a}} \frac{\partial \tau_{yz}(y)}{\partial y} \hat{a}(y) dy = \\
 &= \tau_{yz} \hat{a} \Big|_y^{h\hat{a}} - \int_y^{h\hat{a}} \tau_{yz} \frac{d\hat{a}}{dy} dy = -\tau_{yz}(y) \hat{a}(y) - \int_y^{h\hat{a}} \tau_{yz} d\hat{a}(y)
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

$(\tau_{yz}(h\hat{a})\hat{a}(h\hat{a})=0$ , ибо на верхней плоскости балки касательных напряжений  $\tau_{zy}$  нет,  $\tau_{yz}=0$ ; или в вершине сечения  $\hat{a}(h\hat{a})=0$  – см., например, наименшую точку сечения, где  $\hat{a}(h_H)=0$ ). В третьем интеграле в сумме (12.6) используем формулу (12.5):

$$I_3 = \int_{\omega} \frac{\partial [\sigma(y)]}{\partial z} dx dy = \int_{\omega} \frac{-dM_x}{I_x} y d\omega = \frac{Q_y}{I_x} S_x^{\omega}, \tag{12.10}$$

где при показанном направлении оси  $z$   $Q_y = -dM_x / dz$  – поперечная сила в сечении,  $S_x^{\omega} = \int_{\omega} y d\omega$  – статический момент «отсеченной» (заштрихованной на рисунке 12.3) площади  $\omega$  относительно нейтральной линии  $x$ .

После подстановки интегралов (12.8 – 12.10) в сумму (12.6) получим формулу Журавского

$$\tau_{yz}(y) = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{I_x \hat{a}(y)}. \tag{12.11}$$

Что же касается распределения напряжений  $\tau_{xz}(y, x)$  по ширине сечения, оно получается из уравнения (12.3): поскольку производные  $\partial \tau_{zy} / \partial y = \partial \tau_{yz} / \partial y$  и  $\partial \sigma_z / \partial z$  не зависят от координаты  $x$ , напряжения  $\tau_{xz}$  изменяются по ширине сечения по линейному закону от  $\tau_{xz_2} = -\tau_{yz} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$  до  $\tau_{xz_1} = \tau_{yz} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$ .

### Тестирование

12.1 Отношение статического момента  $S_x^{\omega} = \omega y_{c_1}$  к ширинам  $\hat{a}(Y)$  в формуле Журавского (12.11) в случаях на рисунке 12.4

$$\frac{S_x^{\square}}{\hat{a}^{\square}} = \frac{\left[ \hat{a} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)}{\hat{a}}, \quad \frac{S_x^{\square}}{\hat{a}^{\square}} = \frac{\left[ \frac{1}{2} \hat{a}(Y) (h - Y) \right] \left[ \frac{2}{3} h - \frac{2}{3} (h - Y) \right]}{\hat{a}(Y)} \tag{12.12}$$

– квадратичная функция ординаты  $y(Y)$ . Учитывая, что функции (12.12) и напряжения (12.11)  $\tau(y = \pm h/2) = 0$ ;  $\tau(Y = 0) = 0$ ,  $\tau(Y = h) = 0$ , получим соответственно параболические эпюры с максимумом в середине высоты, причем в обоих случаях

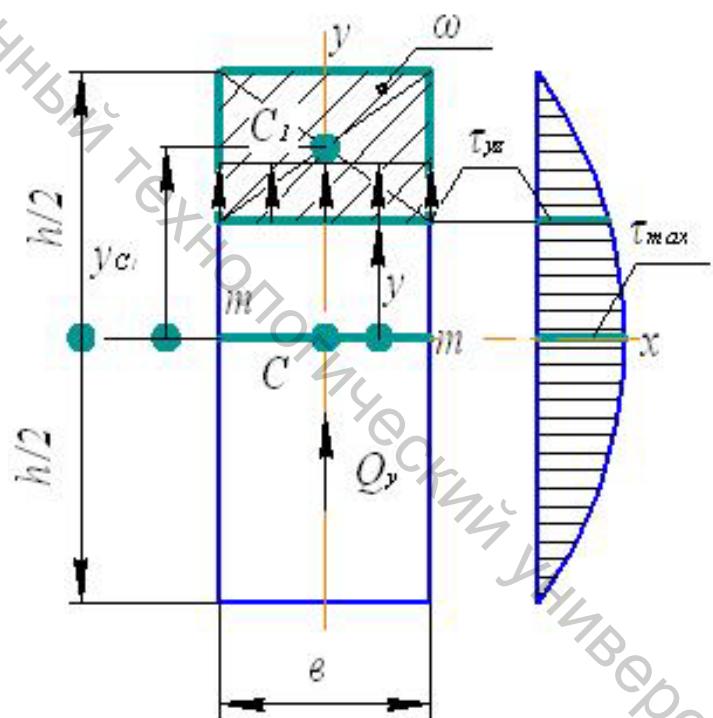
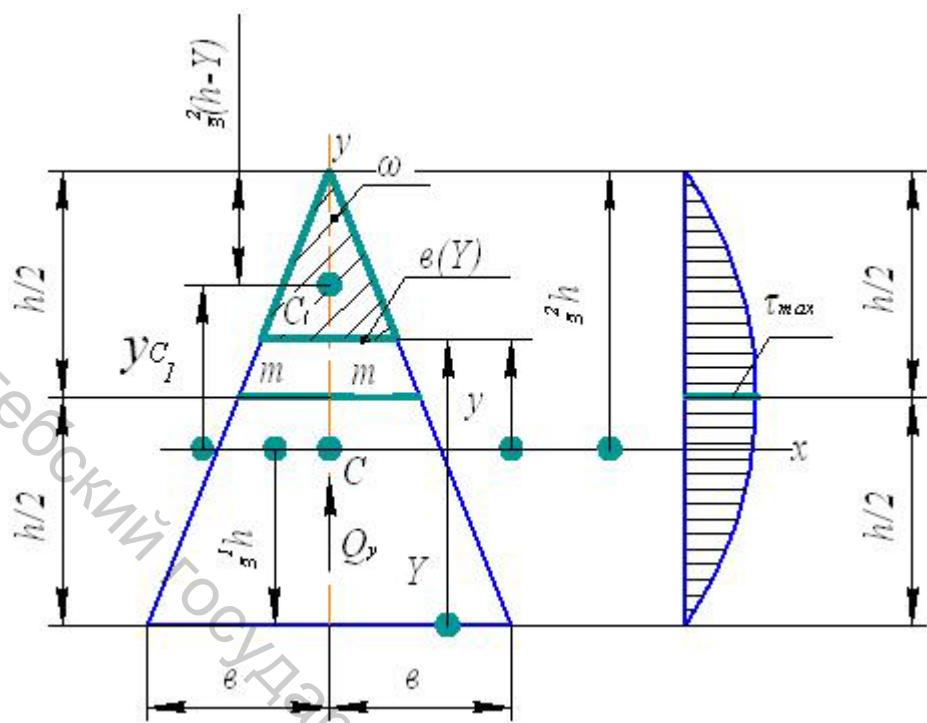


Рисунок 12.4 – Эпюры напряжений (12.11) в прямоугольном и треугольном сечениях

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A}. \quad (12.13)$$

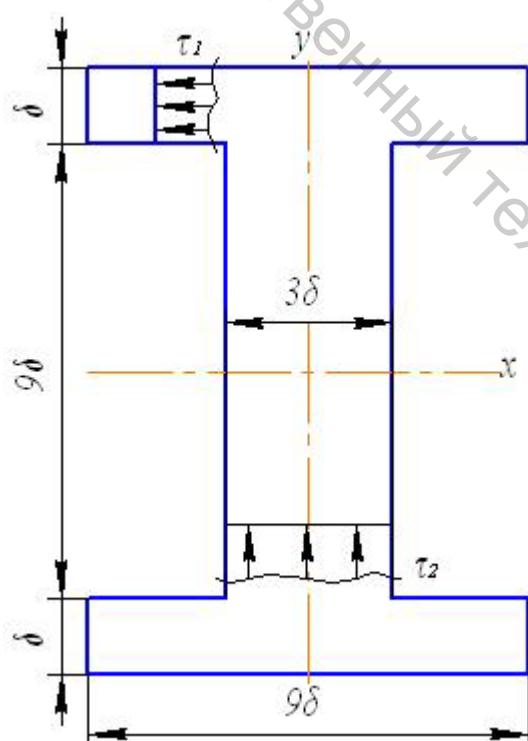
Какие из напряжений  $\tau_{\text{лев}}^{\square}$ ,  $\tau_{\text{прав}}^{\square}$  больше?

Варианты ответа

$$1. \tau_{\text{лев}}^{\square} > \tau_{\text{прав}}^{\square}. \quad 2. \tau_{\text{лев}}^{\square} < \tau_{\text{прав}}^{\square}. \quad 3. \tau_{\text{лев}}^{\square} = \tau_{\text{прав}}^{\square}.$$

12.2 Какие из касательных напряжений, показанных на рисунке 12.5, меньше?

Варианты ответа



$$1. \tau_1 > \tau_2.$$

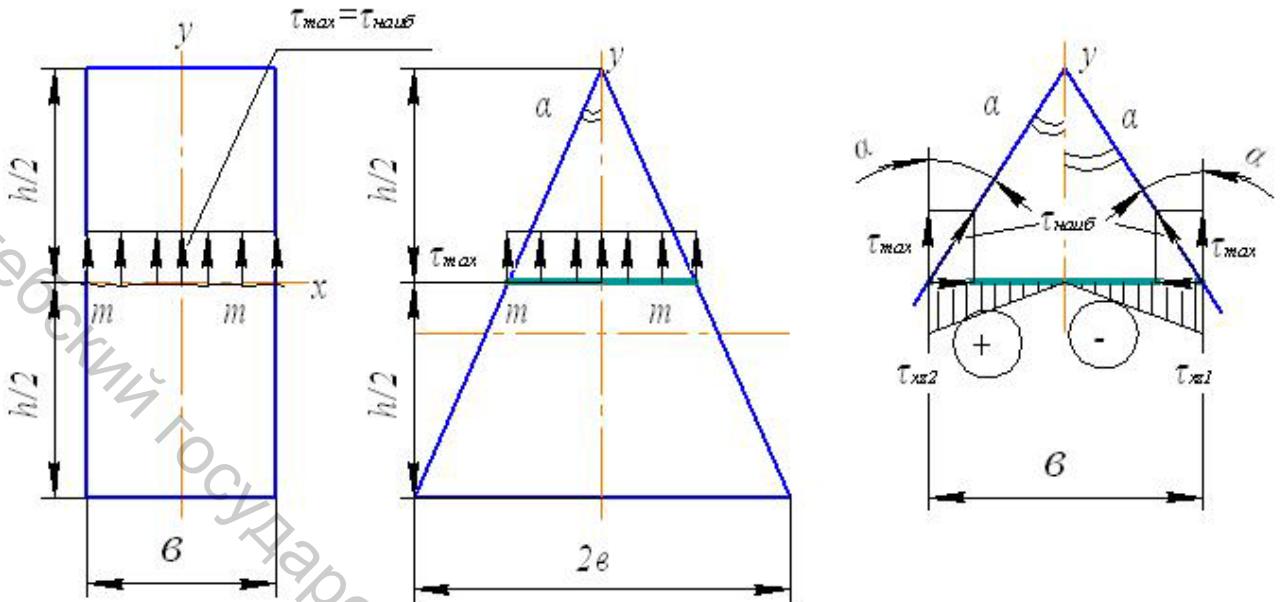
$$2. \tau_1 = \tau_2.$$

$$3. \tau_1 < \tau_2.$$

Рисунок 12.5 – Касательные напряжения в двутавровом сечении

## Комментарии

### 12.1



Наибольшие напряжения  $\tau_{yz}$  (12.13) в прямоугольном сечении

$$\tau_{\max}^{\square} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\hat{a}h},$$

наибольшие напряжения (12.13) в треугольном сечении

$$\tau_{\max}^{\square} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\frac{1}{2} 2\hat{a}h} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\hat{a}h},$$

но в первом случае углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 12.3) равны нулю, следовательно, наибольшие касательные напряжения, действующие вдоль прямоугольных границ прямоугольного сечения:

$$\tau_{\text{кас}}^{\square} = \tau_{\max}^{\square} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\hat{a}h};$$

во втором случае касательные напряжения  $\tau_{yz}$  возникают совместно с касательными напряжениями  $\tau_{xz}$ , изменяющимися по ширине  $\hat{a}$  по линейному закону. Наибольшие (по модулю) напряжения

$$\tau_{xz_1}^{\square} = -\tau_{\max}^{\square} \operatorname{tg} \alpha, \quad \tau_{xz_2}^{\square} = \tau_{\max}^{\square} \operatorname{tg} \alpha$$

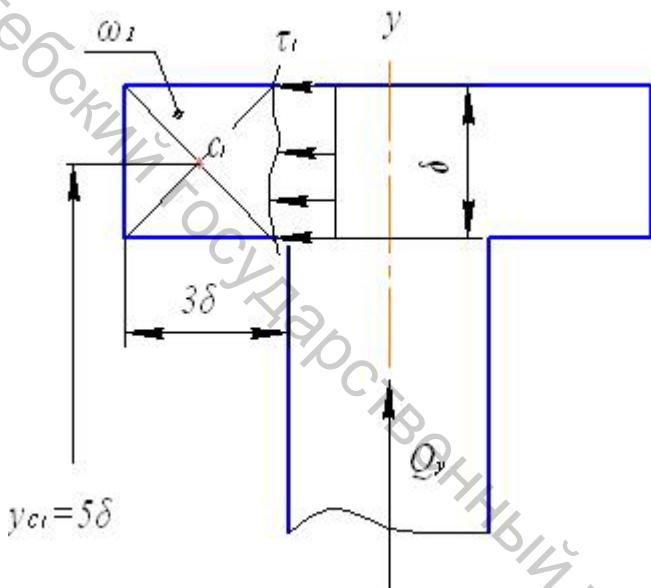
возникают на границе сечения, где  $\operatorname{tg} \alpha = \hat{a}/h$ ; наибольшие касательные напряжения, действующие вдоль прямолинейных границ треугольного сечения:

$$\tau_{\text{кас}}^{\square} = \sqrt{\left(\tau_{\max}^{\square}\right)^2 + \left(\tau_{xz}^{\square}\right)^2} = \tau_{\max}^{\square} \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2},$$

$$\tau_{i\text{дeа}}^{\square} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\hat{a}h} \sqrt{1 + \left(\frac{\hat{a}}{h}\right)^2}.$$

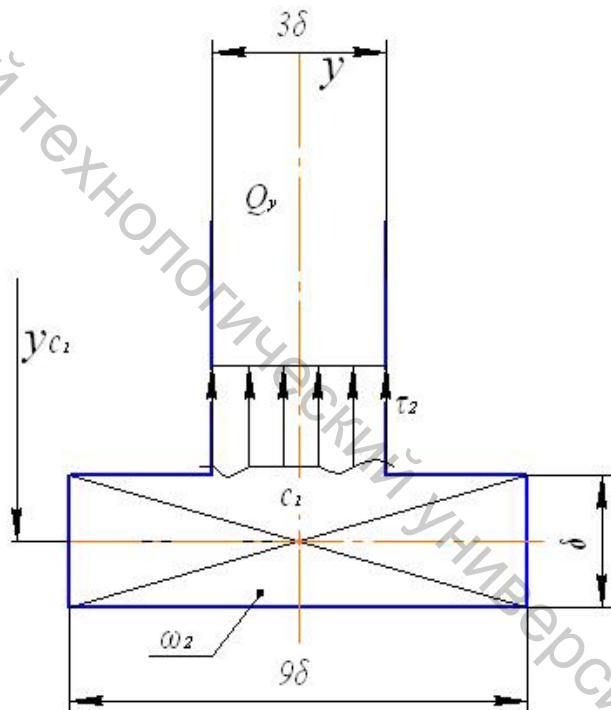
Верен ответ 2.

12.2 При определении касательных напряжений, распределенных по ширине  $\delta$  полки двутавра, пользуемся площадью  $\omega_1 = 3\delta \cdot \delta = 3\delta^2$  и ее статическим моментом  $S_x^{\omega_1} = \omega_1 \cdot y_{c_1} = 3\delta^2 y_{c_1}$ ; искомые касательные напряжения



$$\tau_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{S_x^{\omega_1}}{\hat{a}_1} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{3\delta^2 y_{c_1}}{\delta} = 3\delta \frac{Q_y}{I_x} y_{c_1}.$$

При определении касательных напряжений, распределенных по ширине стенки двутавра на рисунке 12.5, пользуемся площадью  $\omega_2 = 9\delta \cdot \delta = 9\delta^2$  и ее статическим моментом  $|S_x^{\omega_2}| = \omega_2 |y_{c_2}| = \omega_2 \cdot y_{c_1} = 9\delta^2 y_{c_1}$ ; касательные напряжения



$$\tau_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{S_x^{\omega_2}}{\hat{a}_2} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{9\delta^2 y_{c_1}}{3\delta} = 3\delta \frac{Q_y}{I_x} y_{c_1}.$$

Верен ответ 2.

### 13 Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние на рисунке 13.1 можно изобразить напряжениями на двух парах взаимно перпендикулярных площадок, бесконечно близких к рассматриваемой точке. Третья площадка, перпендикулярная к ним, свободна от напряжений. Напряжения на наклонной площадке, отсекающей треугольную призму (находящуюся в равновесии как и весь элемент), показаны на рисунке 13.1 с приращениями  $d\sigma_\alpha$  и  $d\tau_\alpha$ . Эти нормальные и касательные напряжения находятся из уравнений проекций

$$\sum_{n=0}^n (\sigma_\alpha + d\sigma_\alpha) dA_\alpha - (\sigma_z dA_z) \cos \alpha + (\tau_{yz} dA_z) \sin \alpha - (\sigma_y dA_y) \sin \alpha + (\tau_{zy} dA_y) \cos \alpha = 0, \quad (13.1)$$

$$\sum_{t=0}^t (\tau_\alpha + d\tau_\alpha) dA_\alpha - (\sigma_z dA_z) \sin \alpha - (\tau_{yz} dA_z) \cos \alpha + (\sigma_y dA_y) \cos \alpha + (\tau_{zy} dA_y) \sin \alpha = 0,$$

где площади граней, перпендикулярных направлениям  $z$  и  $y$ ,  $dA_z = dA_\alpha \cos \alpha$ ,  $dA_y = dA_\alpha \sin \alpha$ ,  $dA_\alpha$  – площадь наклонной грани. Вычеркивая из этих уравнений бесконечно малые высших порядков, находим, что приращения  $d\sigma_\alpha$  и  $d\tau_\alpha$  можно не указывать. Именно поэтому напряжения на правой и верхней гранях исходного элемента на рисунке 13.1 и всех прочих рисунках указаны без приращений.

Разрешая уравнения (13.1) относительно напряжений на наклонной площадке, найдем, используя закон парности (12.2 – 12.3), формулы

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yz} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cos 2\alpha,$$

или, переходя к тригонометрическим функциям двойного угла:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yz} \sin 2\alpha, \quad (13.2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cos 2\alpha. \quad (13.3)$$

Площадки, на которых действуют экстремальные (главные) нормальные напряжения (13.2), (главные площадки) и площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения (13.3), находятся из уравнений  $d\sigma_\alpha / d\alpha = 0, d\tau_\alpha / d\alpha = 0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y}, \operatorname{tg} 2\alpha'' = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_{yz}}. \quad (13.4)$$

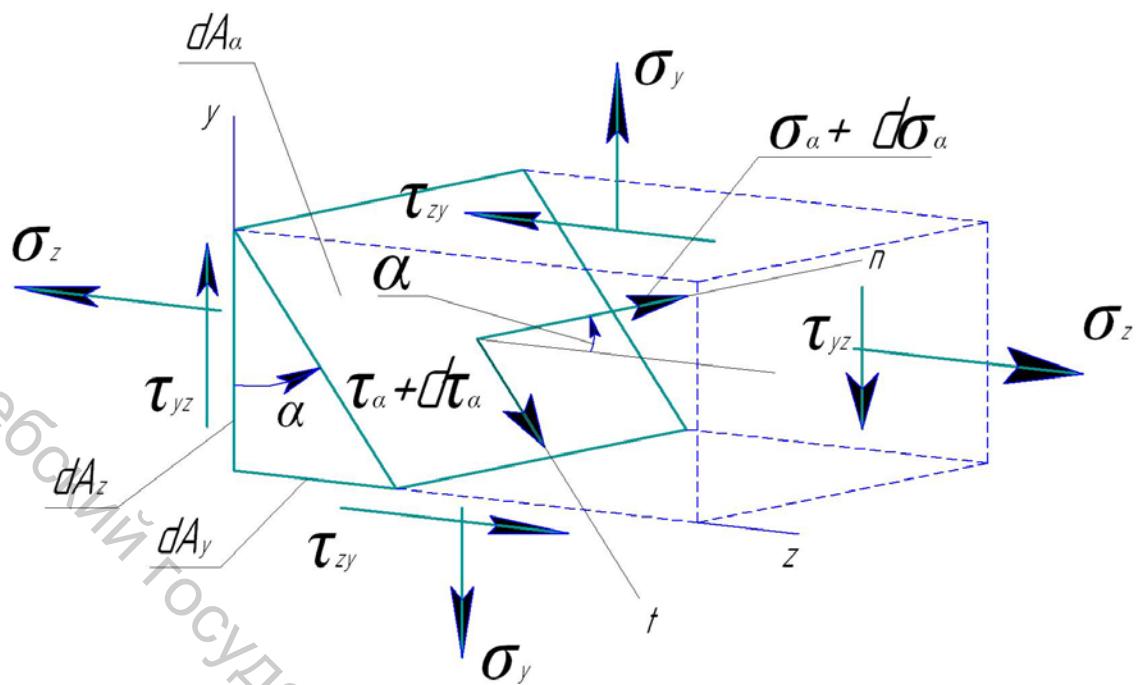


Рисунок 13.1 – Плоское напряжённое состояние

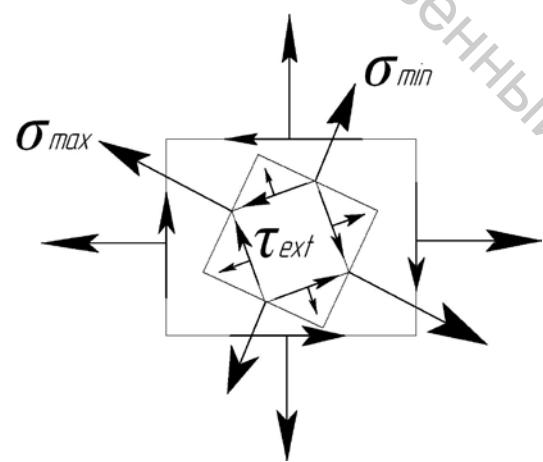


Рисунок 13.2 – Главные напряжения и  
экстремальные касательные  
напряжения

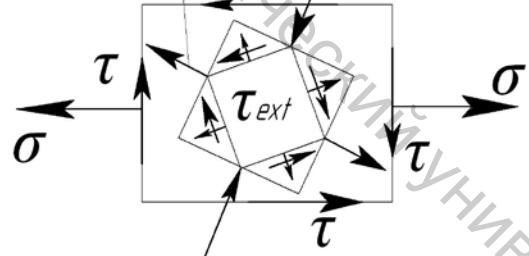
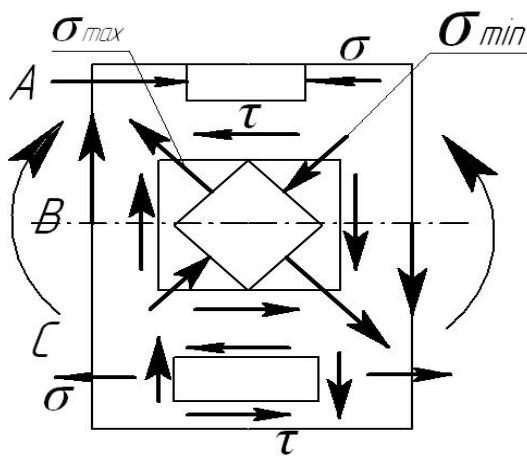


Рисунок 13.3 – Упрощенное плоское  
напряженное состояние

Рисунок 13.4 – Напряженное состояние при прямом поперечном изгибе

Нетрудно видеть, что каждому из уравнений (13.4) удовлетворяют два угла, различающиеся на  $90^\circ$ , например, из равенства  $\alpha'_2 = \alpha'_1 + 90^\circ$  следует другое:

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_2 = \operatorname{tg} 2\left(\alpha'_1 + 90^\circ\right) = \operatorname{tg}\left(2\alpha'_1 + 180^\circ\right) = \operatorname{tg} 2\alpha'_1,$$

причем углы  $\alpha'$ , определяющие главные площадки, отличаются от углов  $\alpha''$ , определяющих площадки с экстремальными касательными напряжениями, на  $45^\circ$ . Действительно, произведение тангенсов (13.4) равно  $-1$ , следовательно,  $2\alpha' = 2\alpha'' + 90^\circ = 2\left(\alpha'' + 45^\circ\right)$ , что показано на рисунках 13.2, 13.3.

Найдем экстремумы напряжений (13.2, 13.3). В формулу (13.2) входит функция

$$\begin{aligned}\hat{O}(2\alpha) &= \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yz} \sin 2\alpha = C \cos 2\alpha - B \sin 2\alpha = \\ &= \sqrt{C^2 + B^2} \left( \frac{C}{\sqrt{C^2 + B^2}} \cos 2\alpha - \frac{B}{\sqrt{C^2 + B^2}} \sin 2\alpha \right).\end{aligned}$$

Коэффициенты в скобках не превышают единицы, а сумма их квадратов равна единице: положим  $C/\sqrt{C^2 + B^2} = \sin \beta, B/\sqrt{C^2 + B^2} = \cos \beta$  – тогда экстремумы функции  $\hat{O}(2\alpha) = \sqrt{C^2 + B^2} \sin(\beta - 2\alpha)$

$$\hat{O}_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}, \hat{O}_{\min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}.$$

Таковы же  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$ . Итак, главные напряжения –  $\max$  и  $\min$  напряжений (13.2) и экстремальные касательные напряжения –  $\max$  и  $\min$  напряжений (13.3)

$$\sigma_{\max_{\min}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}; \quad (13.5)$$

$$\tau_{\max_{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (13.6)$$

Площадки, на которых касательные напряжения (13.3) равны нулю, определяются углами  $\alpha'$  (13.4), т. е. совпадают с главными площадками. Тем самым всякое плоское напряженное состояние сводится к растяжению – сжатию в двух перпендикулярных направлениях – главных на-

правлениях. Главные напряжения позволяют выделить частные случаи: в линейном напряженном состоянии напряжения (13.5)  $\sigma_{max} = \sigma$ ,  $\sigma_{min} = 0$  или  $\sigma_{max} = 0$ ,  $\sigma_{min} = -\sigma$ ; в чистом сдвиге  $\sigma_{max} = \sigma$ ,  $\sigma_{min} = -\sigma$ ; в упрощенном плоском напряженном состоянии  $\sigma_{max} > 0$ ,  $\sigma_{min} < 0$ . На рисунке 13.4 представлены первое (в точке  $A$ ), второе (в точке  $B$ ), третье (в точке  $C$ ). Действительно, главные напряжения (13.5) в точке  $B$   $\sigma_{max} = +\tau$ ,  $\sigma_{min} = -\tau$ ; главные напряжения в точке  $C$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} > 0,$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < 0.$$

Формулы (13.5) могут быть переписаны:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \tau_{\frac{max}{min}}, \quad (13.7)$$

или

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \left(\sigma_{\frac{max}{min}}\right)_{\times C},$$

где  $\left(\sigma_{\frac{max}{min}}\right)_{\times C}$  – главные напряжения при чистом сдвиге напряжениями (13.6). Иначе, растяжение – сжатие главными напряжениями (13.5) можно представить наложением чистого сдвига напряжениями (13.6) на растяжение равными главными напряжениями  $(\sigma_z + \sigma_y) / 2$ . При таком растяжении все площадки главные, на всех действуют нормальные напряжения  $(\sigma_z + \sigma_y) / 2$ . Они же действуют и на площадках с экстремальными напряжениями (13.6).

Найдем, наконец, углы  $\alpha_1'$  и  $\alpha_2'$ , где действуют главные напряжения  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  (13.5), – ведь формулами (13.4) пользоваться неудобно, они не дают указаний, под каким из двух углов  $\alpha'$  действует, например,  $\sigma_{max}$ . Положим, что наклонная площадка на рисунке 13.1 – главная площадка с напряжениями  $\sigma_\alpha = \sigma_{max}$ ,  $\tau_\alpha = 0$ . Уравнение проекций  $\sum Z = 0$ ,  $\sigma_{max} dF_{\alpha_1'} \cos \alpha_1' - \sigma_z dF_z + \tau_{yz} dF_y = \sigma_{max} dF_{\alpha_1'} \cos \alpha_1' - \sigma_z dF_{\alpha_1'} \cos \alpha_1' + \tau_{yz} dF_{\alpha_1'} \sin \alpha_1' = 0$  дает формулу

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{\sigma_z - \sigma_{max}}{\tau_{yz}}. \quad (13.8)$$

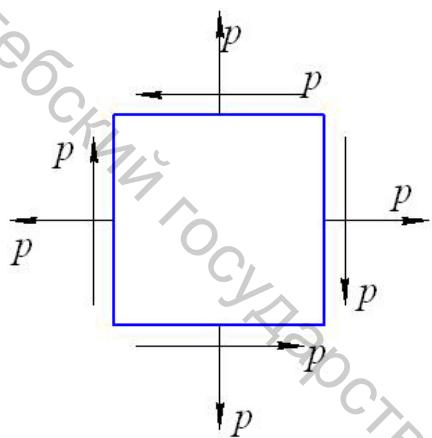
Уравнение проекций на ось  $u$  даст формулу

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}. \quad (13.9)$$

При подстановке в формулы (13.8, 13.9) напряжения  $\sigma_{min}$  получим  $\operatorname{tg} \alpha'_2$ .

### Тестирование

13.1 Каково показанное на рисунке 13.5 плоское напряженное состояние?

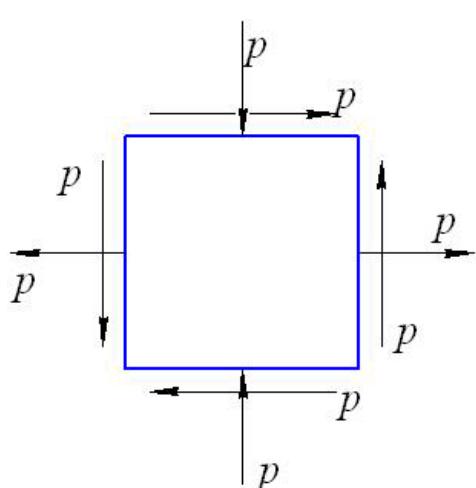


Варианты ответа

1. Линейное напряженное состояние.
2. Чистый сдвиг.
3. Упрощенное плоское напряженное состояние.

Рисунок 13.5 – Плоское напряженное состояние

13.2 Каково показанное на рисунке 13.6 плоское напряженное состояние?



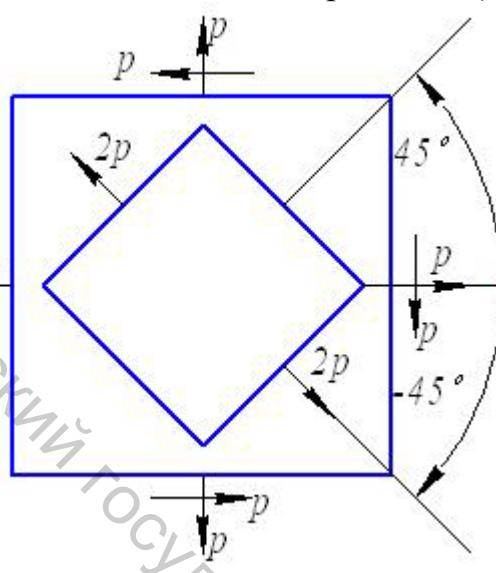
Варианты ответа

1. Чистый сдвиг.
2. Упрощенное плоское напряженное состояние.
3. Линейное напряженное состояние.

Рисунок 13.6 – Плоское напряженное состояние

## Комментарии

### 13.1 Главные напряжения (13.5)



$$\sigma_{\min} = \frac{p + p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p - p}{2}\right)^2 + p^2},$$

$$\sigma_{\max} = 2p, \sigma_{\min} = 0.$$

На рисунке линейное напряженное состояние. Верен ответ 1).

Углы, определяющие главные площадки, находятся по формулам (13.8, 13.9):

$$\tan \alpha'_1 = \frac{p - 2p}{p} = -1, \alpha'_1 = -45^\circ;$$

$$\tan \alpha'_2 = \frac{p}{p - 0} = 1, \alpha'_2 = 45^\circ.$$

### 13.2 Главные напряжения (13.5)

$$\sigma_{\min} = \frac{p - p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p + p}{2}\right)^2 + p^2},$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{2}p, \sigma_{\min} = -\sqrt{2}p.$$

Углы, определяющие главные площадки:

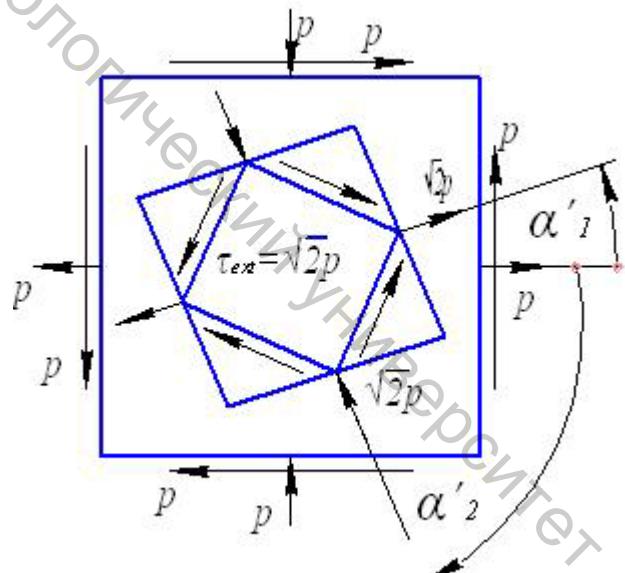
$$\tan \alpha'_1 = \frac{-p}{-p - \sqrt{2}p} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 0,412, \alpha'_1 = 22^\circ 30';$$

$$\tan \alpha'_2 = \frac{p + \sqrt{2}p}{-p} = -(1 + \sqrt{2}), \alpha'_2 = -67^\circ 30'.$$

Экстремальные касательные напряжения (13.6)

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{2}p. \quad (13.10)$$

Нормальные напряжения на площадках, где действуют напряжения (13.10), равны нулю. Верен ответ 1.



## 14 Круг Мора для напряжений

Формулы (13.2, 13.3) определяют напряжения на любой площадке (рис. 13.1). Исходные величины – напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках – на любой паре взаимно перпендикулярных площадок. Возьмем исходными главные напряжения:  $\sigma_z = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_y = \sigma_{\min}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ , формулы (13.2) приобретут вид

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (14.1)$$

( $\alpha$  – угол (рис. 14.1) между площадкой с напряжениями (14.1) и главной площадкой с напряжением  $\sigma_{\max}$ ). Введем обозначения

$$\sigma_\alpha = x, \quad \tau_\alpha = y; \quad \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = a, \quad \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = R; \quad 2\alpha = \varphi. \quad (14.2)$$

Формулы (14.1) в обозначениях (14.2)

$$\begin{aligned}x &= a + R \cos \varphi, \\ y &= R \sin \varphi\end{aligned}$$

– параметрические уравнения окружности (рис. 14.1). Если вернемся к прежним обозначениям (14.2), получим круг Мора для напряжений. Заметим, что угол  $\alpha$  между площадками на круге Мора удваивается: точки  $P_1$  и  $P_2$  – концы диаметра круга – отвечают взаимно перпендикулярным площадкам.

Обратимся к напряженному состоянию на рисунке 13.1. Исходные площадки на нем – взаимно перпендикулярные площадки с нормальными и касательными напряжениями (произвольные площадки). Построим (рис. 14.2) в осях  $\sigma$  и  $\tau$  (индекс  $\alpha$  на рисунке 14.1 опускаем) точки  $V$  ( $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ) и  $H$  ( $\sigma_y$ ,  $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$ ). Отрезок  $VH$  – диаметр круга Мора; проводя его, найдем центр круга  $C$  и опишем окружность радиусом  $CV$ .

Точки  $N_1$  и  $N_2$  пересечения окружности с осью  $\sigma$  – сравните с рисунком 14.1 – отвечают главным площадкам; их координаты, изображенные отрезками  $ON_1$  и  $ON_2$ , дают величины главных напряжений  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . Угол  $\alpha'_1$ , составленный первой из главных площадок  $N_1$  с площадкой  $V$ , вдвое меньше угла  $VCN_1$  – от центральных углов удобно перейти к вписанным углам. Проведем (рис. 14.3) через точку  $V$  прямую, параллельную нормали к площадке  $V$  (рис. 14.2); точка на пересечении с окружностью – полюс  $P$  круга Мора. Луч, проведенный из полюса  $P$ , например, в точку  $N_1$ , укажет направление нормали к площадке  $N_1$  (направление нормального напряжения на этой площадке); в случае точки

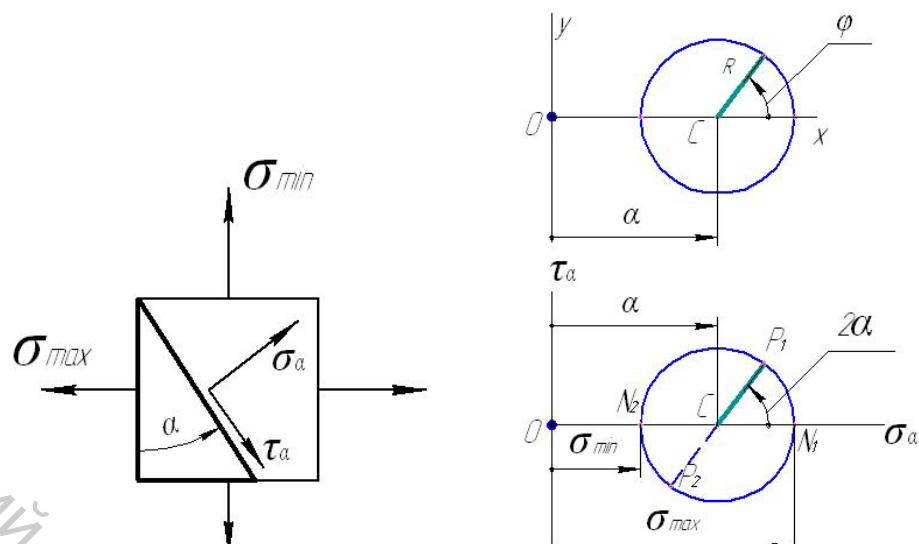


Рисунок 14.1 – Круг Мора для напряжений :  $a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ ,  
 $R = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$

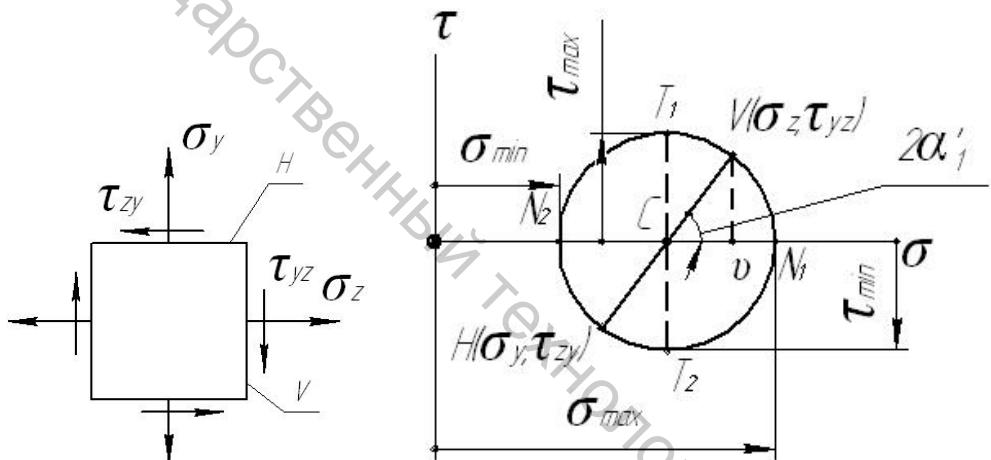


Рисунок 14.2 – Главные напряжения и экстремальные касательные напряжения

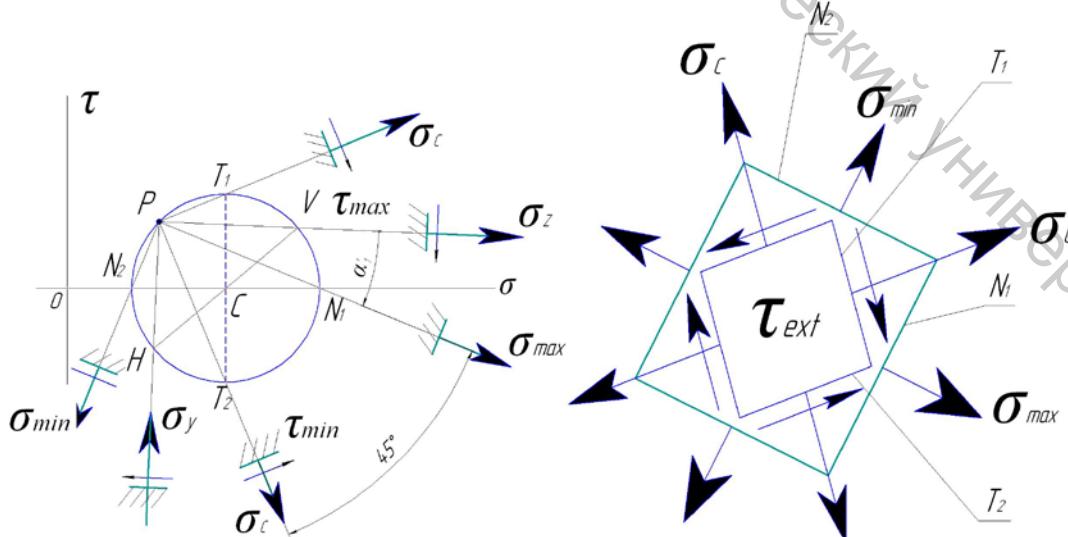


Рисунок 14.3 – Главные площадки и площадки с экстремальными касательными напряжениями

$N_1$  – направление главного напряжения  $\sigma_{\max}$ . Лучи  $PN_2$ ,  $PT_1$ ,  $PT_2$  укажут соответственно направления нормалей ко второй главной площадке  $N_2$  и к площадкам с экстремальными касательными напряжениями (13.6) – все эти площадки с напряжениями на них показаны на круге Мора (рис. 14.3). Углы между главными площадками  $N_1$  и  $N_2$  и площадками с экстремальными касательными напряжениями равны 45° (см., например, угол  $N_1PT_2$ ). Величины экстремальных касательных напряжений на рисунке 14.2

$$\tau_{\max} = \pm CT_1 = \pm CV = \pm \sqrt{Cv^2 + vV^2} = \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_c)^2 + \tau_{yz}^2},$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$$

– получаем формулы (13.6). Главные напряжения

$$\sigma_{\max} = OC \pm CV = \sigma_c \pm CV = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \tau_{\max}$$

– получаем формулы (13.7).

Круг Мора полностью описывает плоское напряженное состояние. Круги Мора в частных случаях линейного напряженного состояния (ЛНС), чистого сдвига (ЧС) и упрощенного плоского напряженного состояния изображены на рисунке 14.4.

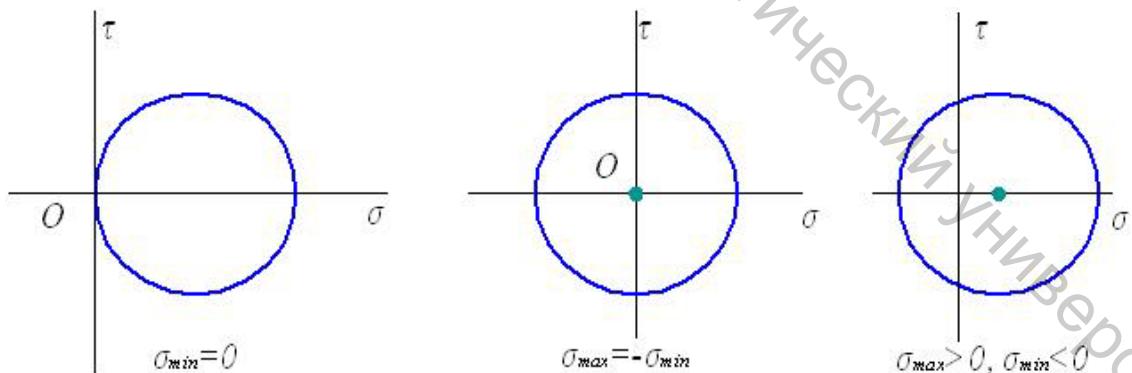


Рисунок 14.4 – Круги Мора для ЛНС, ЧС, УПНС

## Тестирование

14.1 На рисунке 14.5 изображен чистый сдвиг. Каковы нормальные напряжения  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$ ?

Варианты ответа

1.  $\sigma_z = \sigma_y$ .
2.  $|\sigma_z| = |\sigma_y|$ .
3.  $\sigma_z = -\sigma_y$ .

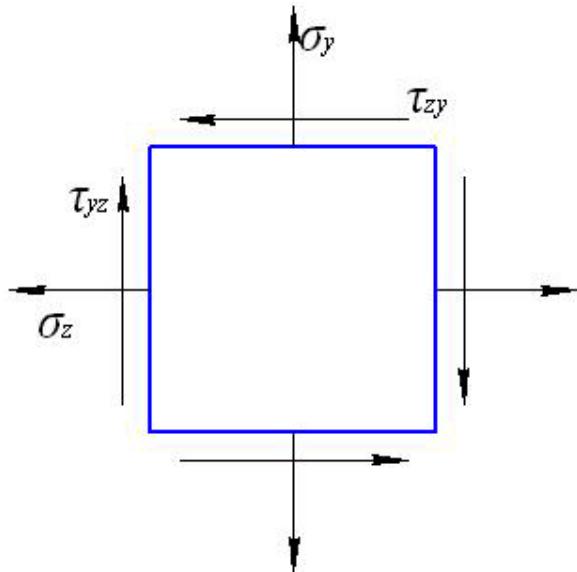
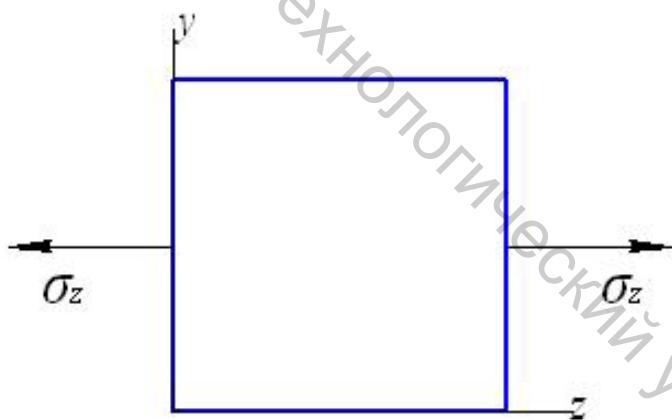


Рисунок 14.5 – Плоское напряженное состояние

14.2 Какое напряженное состояние нужно наложить на изображенное линейное, чтобы получить УПНС?

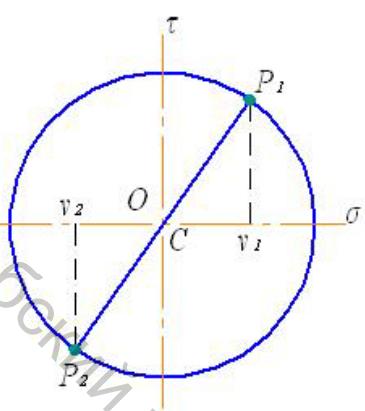


Варианты ответа

1. Линейное сжатие в направлении оси  $y$ .
2. Раствжение во всех направлениях равными напряжениями.
3. Сжатие во всех направлениях равными напряжениями, превышающими по модулю заданные  $\sigma_z$ .

### Комментарии

14.1 Круг Мора для чистого сдвига изображен на рисунке 14.4. Его характерная особенность – центр круга находится в начале координат  $\sigma, \tau$ : как ни выбирай (рис. 14.6) точки  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 14.1) – концы диаметра круга  $P_1P_2$ , абсциссы этих точек  $Ov_1$  и  $Ov_2$  равны по величине и противоположны по знаку. Соответственно нормальные напряжения на рисунке 14.5



$$\sigma_z = -\sigma_y.$$

Верен ответ 3. Конечно, в этом случае  $|\sigma_z| = |\sigma_y|$ , но и в случае неверного ответа 1)  $|\sigma_z| = |\sigma_y|$ , так что ответ 2 не верный.

Рисунок 14.6 – Круг Мора для чистого сдвига

14.2 При наложении напряженного состояния 2 исходные напряжения  $\sigma_z$  и  $\sigma_y = 0$  – первое увеличится, второе станет растягивающим (положительным). Круг Мора (рис. 14.7) не пересекает оси  $\tau$  (характерная особенность круга

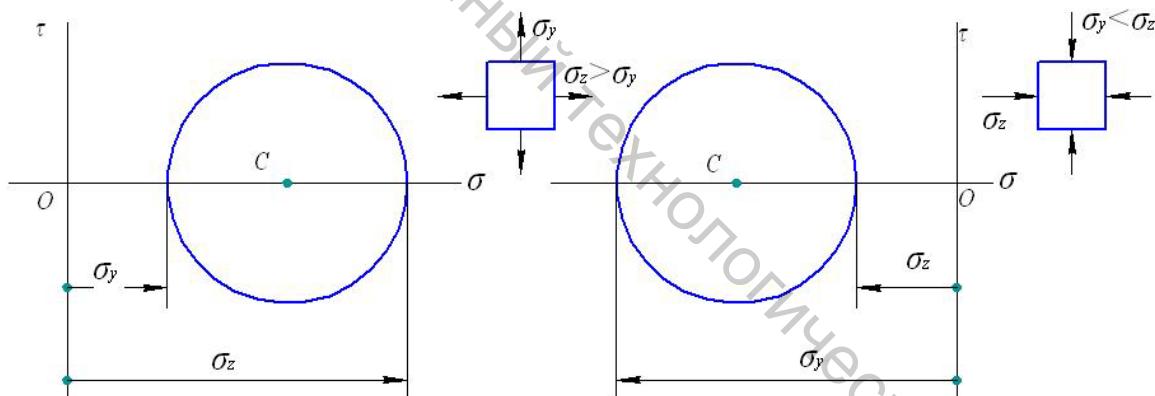


Рисунок 14.7 – Круги Мора для растяжения (сжатия) в двух взаимно перпендикулярных направлениях

Мора (рис. 14.4) для УПНС). При наложении напряженного состояния 3 напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  становятся сжимающими (отрицательными). Круг Мора (рис. 14.7) опять же не пересекает ось  $\tau$ . Верен ответ 1 – см. рисунок 14.8.

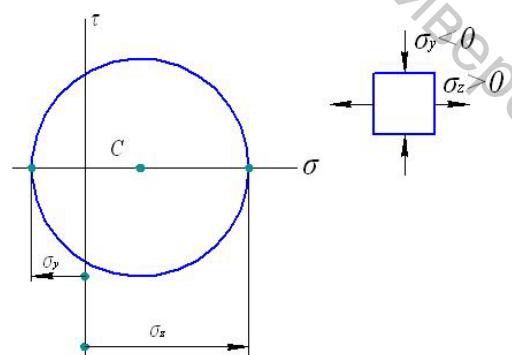


Рисунок 14.8 – Круг Мора для растяжения – сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях

## 15 Объемное напряженное состояние

Мысленно «вырежем» из элемента на рисунке 1.4 «пирамидку» (рис. 15.1). На ее взаимно перпендикулярных гранях (перпендикулярных к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) действуют исходные напряжения (рис. 1.4), на наклонной грани – напряжение, представленное тремя взаимно перпендикулярными составляющими  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ . Площадь наклонной грани –  $dA$ , площади граней с исходными напряжениями:  $dA_x = (dA)l$ ,  $dA_y = (dA)m$ ,  $dA_z = (dA)n$ , где  $l = \cos\alpha$ ,  $m = \cos\beta$ ,  $n = \cos\gamma$  – направляющие косинусы нормали  $n$  к наклонной грани. Проектируя все силы, действующие на «пирамидку» на рисунке 15.1, на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, p_x dA - \sigma_x dA_x - \tau_{xy} dA_y - \tau_{xz} dA_z = 0, \\ \sum Y &= 0, p_y dA - \tau_{yx} dA_x - \sigma_y dA_y - \tau_{yz} dA_z = 0, \\ \sum Z &= 0, p_z dA - \tau_{zx} dA_x - \tau_{zy} dA_y - \sigma_z dA_z = 0,\end{aligned}$$

откуда составляющие напряжения на наклонной площадке, проведенной внутри элемента на рисунке 1.4:

$$\begin{aligned}p_x &= \left( \frac{dA_x}{dA} \right) \sigma_x + \left( \frac{dA_y}{dA} \right) \tau_{xy} + \left( \frac{dA_z}{dA} \right) \tau_{xz} = \\ &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}, \\ p_y &= l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz}, \\ p_z &= l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z\end{aligned}\tag{15.1}$$

– напряжения на произвольной площадке определяются, если заданы нормальные и касательные напряжения на трех взаимно перпендикулярных (исходных) площадках. В частном случае плоского напряженного состояния (рис. 13.1) напряжения на произвольной площадке (13.2, 13.3) определяются, если заданы нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных (исходных) площадках. Все эти площадки, впрочем, перпендикулярны к третьей, свободной от напряжений.

Главной площадкой назовем площадку, на которой нет касательных напряжений  $\tau$  (см. рисунок 15.2). На главной площадке действуют только нормальные (главные) напряжения, составляющие главное напряжение  $\sigma$  представлены на рисунке 15.2. Подставляя указанные составляющие в формулы (15.1), получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , определяющих здесь главную площадку:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0. \end{cases}\tag{15.2}$$

Поскольку направляющие косинусы удовлетворяют теореме Пифагора

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,\tag{15.3}$$

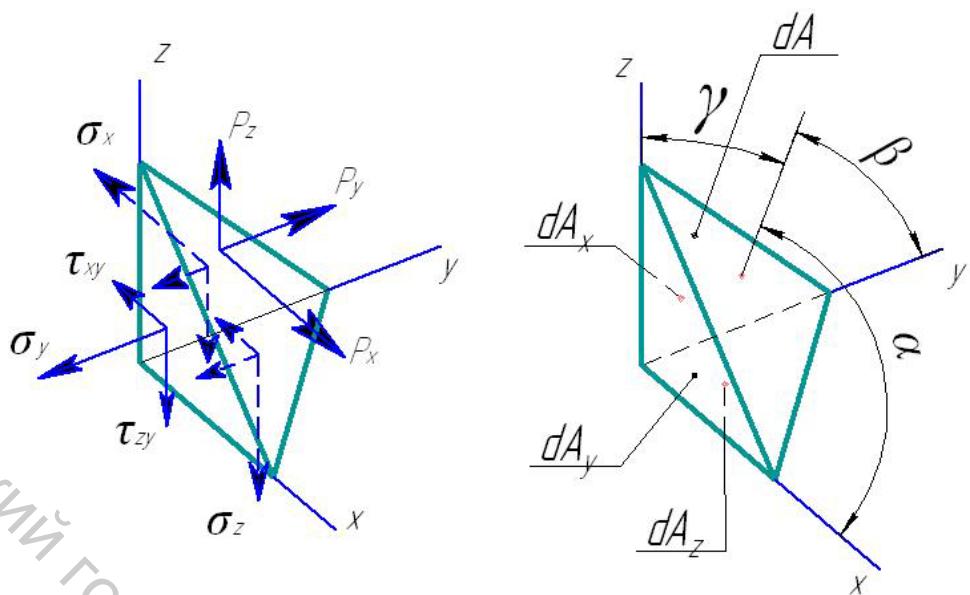


Рисунок 15.1 – Напряжения на исходных и произвольной площадках

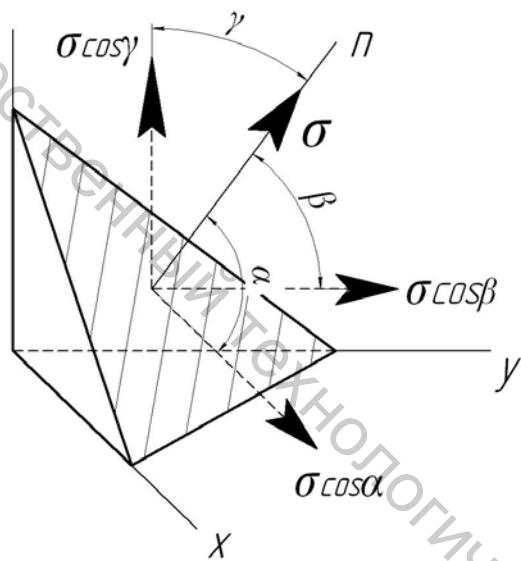


Рисунок 15.2 – Главное напряжение и его составляющие

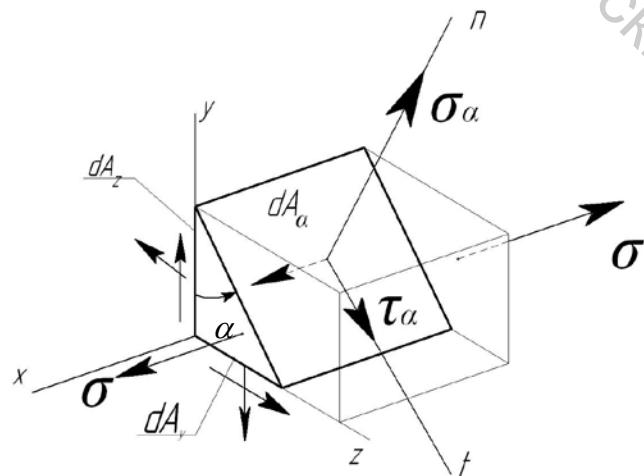


Рисунок 15.3 – Напряжения на площадке, параллельной главному направлению, – касательного напряжения, показанного штриховой стрелкой, по закону парности нет

они одновременно не исчезнут, т. е. решение системы (15.2) заведомо не нулевое – определитель системы (15.2)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (15.4)$$

Раскроем определитель в характеристическом уравнении (15.4) – получим кубическое уравнение, заведомо имеющее один действительный корень. Подставляя его в систему (15.2), найдем, что ее определитель (15.4) равен нулю, т.е. три уравнения (15.2) линейно зависимы. Используя любые два уравнения и решая их совместно с нелинейным уравнением (15.3), отыщем направляющие косинусы главной площадки с главным напряжением  $\sigma$ .

Пользуясь этим, возьмем три новые взаимно перпендикулярные площадки, одна из которых найденная главная площадка. Проектируя все силы, действующие на отсеченную часть элемента на рисунке 15.3, на оси  $l$  и  $m$ , получим формулы (13.2, 13.3), на основе которых доказано существование двух взаимно перпендикулярных главных площадок – главное напряжение  $\sigma$  никак не скажется на этих фактах, ибо, будучи перпендикулярным к осям  $l$  и  $m$ , не войдет в уравнения (13.1). Тем самым доказано существование трех взаимно перпендикулярных главных площадок – вместе с этим существование трех действительных корней характеристического уравнения (15.4), их нумеруют в порядке убывания:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Если главные площадки взять в качестве исходных на рисунке 15.1, все исходные касательные напряжения исчезнут, формулы (15.1) дадут составляющие напряжения на произвольной площадке:

$$p_x = \sigma_1 l, p_y = \sigma_2 m, p_z = \sigma_3 n,$$

модуль его

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2};$$

очевидно,

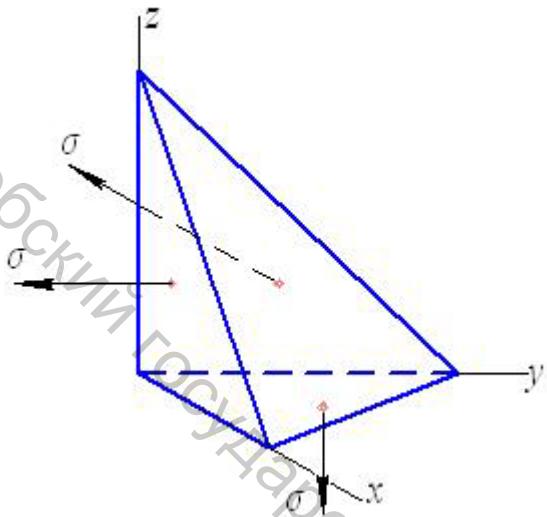
$$p \leq \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} = \sigma_1, p \geq \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} = \sigma_3$$

–  $\sigma_1$  – наибольшее из напряжений,  $\sigma_3$  – наименьшее.

Итак, всякое напряженное состояние сводится в общем случае к растяжению – сжатию в трех взаимно перпендикулярных (главных) направлениях. В частном случае, когда одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние – плоское; когда два корня уравнения (15.4) равны нулю, напряженное состояние – линейное.

### Тестирование

15.1 Главные напряжения (рис. 15.4)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ . Какие напряжения действуют на произвольной площадке?

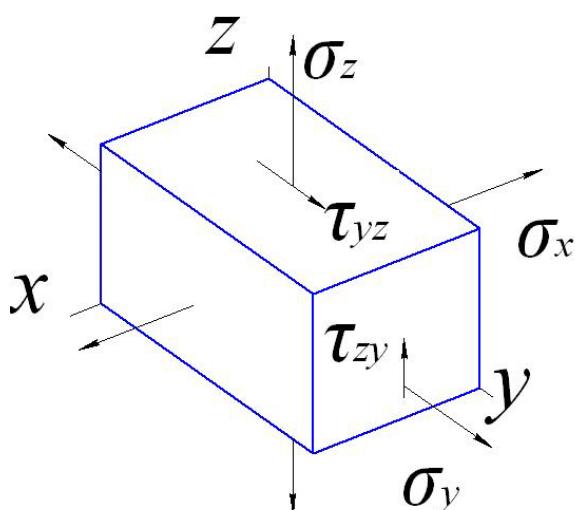


Варианты ответа

1. Нормальные и касательные напряжения.
2. Только нормальные напряжения.
3. Только касательные напряжения.

Рисунок 15.4 – Случай равных главных напряжений

15.2 Характеристическое уравнение (15.4) напряженного состояния, заданного напряжениями, показанными на рисунке 15.5, имеет вид



$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (15.5)$$

где по закону парности касательных напряжений  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Каковы корни уравнения (15.5)?

Рисунок 15.5 – Одна из трех исходных площадок – главная

Варианты ответа

1. Один действительный и два комплексно-сопряженных.
2. Три действительных корня.
3. Два действительных корня и один комплексный.

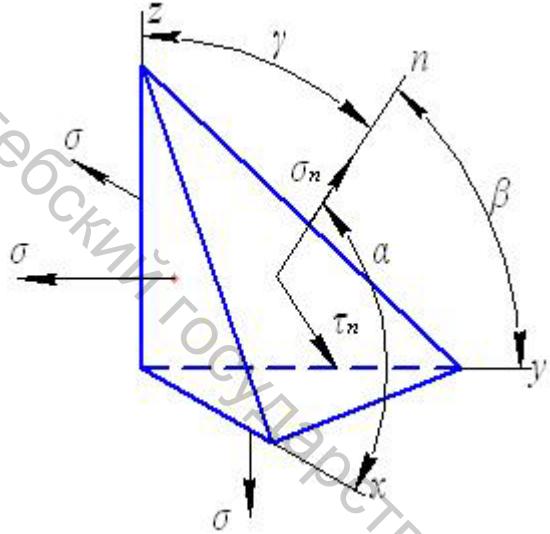
## Комментарии

### 15.1 Составляющие напряжения на произвольной площадке

(15.1)

$$p_x = \sigma l, p_y = \sigma m, p_z = \sigma n,$$

где  $l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma$  – направляющие косинусы нормали  $n$  к площадке. Величина напряжения



$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{\sigma^2(l^2 + m^2 + n^2)} = \sigma$   
– см. соотношение (15.3). На рис. 1.2 представлено разложение напряжения  $p$  на нормальное  $\sigma_n$  и касательное  $\tau_n$ . Нормальное напряжение

$$\sigma_n = np_n \vec{p} = np_n (\vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z) = p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + p_z \cos \gamma,$$

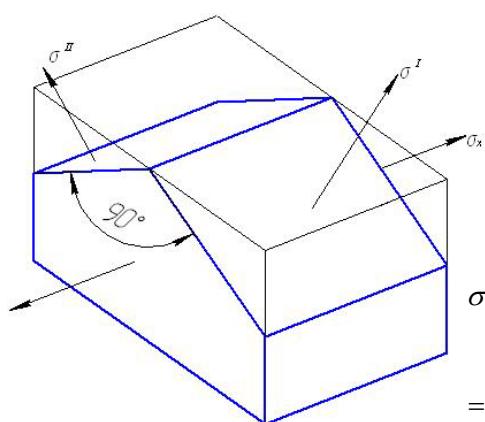
или

$$\sigma_n = \sigma(l^2 + m^2 + n^2) = \sigma.$$

Касательное напряжение  $\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2} = 0$ .

Любая из площадок – главная (с главным напряжением  $\sigma$ ). Верен ответ 2.

15.2 Раскроем определитель в уравнении (15.5):



$$(\sigma_x - \sigma) [(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{yz}^2] = 0,$$

или

$$(\sigma_x - \sigma) [\sigma^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma + \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2] = 0,$$

корни уравнения

$$\sigma^{III} = \sigma_x,$$

$$\sigma^{I,II} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}\right)^2 - \sigma_y \sigma_z + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (15.6)$$

действительные.

Заметим: главные напряжения (15.6) уже определялись – в плоском напряженном состоянии на рисунке 13.1 – см. формулы (13.5).

Верен ответ 2. Кстати, вариант 3 не возможен – комплексному корню всегда сопутствует комплексно-сопряженный.

## 16 Гипотеза прочности Треска – Сен – Венана и ее обобщение по Мору

Наступление текучести при растяжении плоских стальных образцов с полированной поверхностью сопровождается (рис. 16.2) возникающими на поверхности линиями Чернова, наклоненными к оси бруса под углами  $45^\circ$ . Напряженное состояние образца линейное: продольные и поперечные площадки – главные, на площадках, наклоненных к ним под углами  $45^\circ$  действуют экстремальные касательные напряжения  $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$ . Линии Чернова – следы скольжения слоев материала друг по другу, и мысль, возникшая у исследователей, – объявить наибольшие касательные напряжения критерием появления текучести в любом напряженном состоянии.

По Треска – Сен – Венану текучесть возникает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают некоторой предельной величины, не зависящей от вида напряженного состояния, зависящей только от свойств материала. Следовательно, эту предельную величину можно определить при любом напряженном состоянии, например, при линейном (рис. 16.2). В предельном состоянии главные напряжения  $\sigma = \pm\sigma_0$  (пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы), наибольшие касательные напряжения  $\tau_{\max} = |\tau_{\min}| = |\sigma|/2$  достигают в предельном состоянии предела текучести при чистом сдвиге

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (16.1)$$

Остается найти наибольшие касательные напряжения в произвольном объемном напряженном состоянии (рис. 16.1). Рассмотрим совокупность площадок, параллельных одному из главных напряжений; на рисунке 16.1 показана одна из площадок, параллельных главному напряжению  $\sigma_2$ . Касательному напряжению на ней, параллельному напряжению  $\sigma_2$ , отвечает парное касательное напряжение на второй главной площадке – оба парных напряжения показаны штриховыми стрелками. Но на главной площадке касательных напряжений нет, нет и другого из них – парного (оно на рисунке 16.1 зачеркнуто). На заштрихованной площадке, параллельной главному напряжению  $\sigma_2$ , действуют напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , перпендикулярные к главному напряжению  $\sigma_2$ . Уравнения проекций сил, действующих на отсеченную часть элемента, на оси  $n$  и  $t$  дадут выражения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  через главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  ( $\sigma_2$  в эти формулы не войдет!) – такие же, как в плоском напряженном состоянии. Если площадкам с напряжениями  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  сопоставить точки с прямоугольными координатами  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , точки, отвечающие всем площадкам, параллельным главному напряжению  $\sigma_2$ , составят круг Мора – наибольший круг (рис. 16.3). Рассматривая площадки, параллельные двум другим главным напряжениям, получим еще два круга.

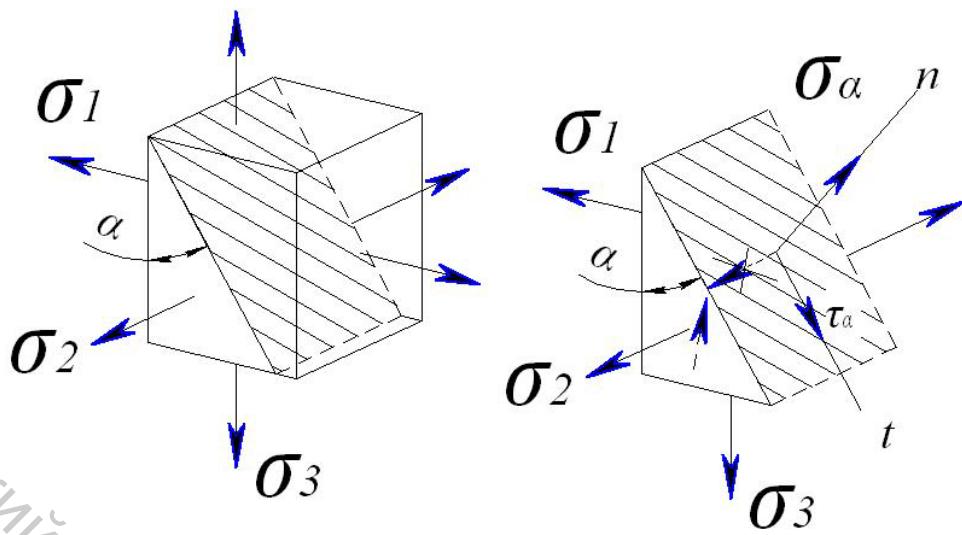


Рисунок 16.1 – Объемное напряженное состояние как результат наложения ЛНС на ПНС

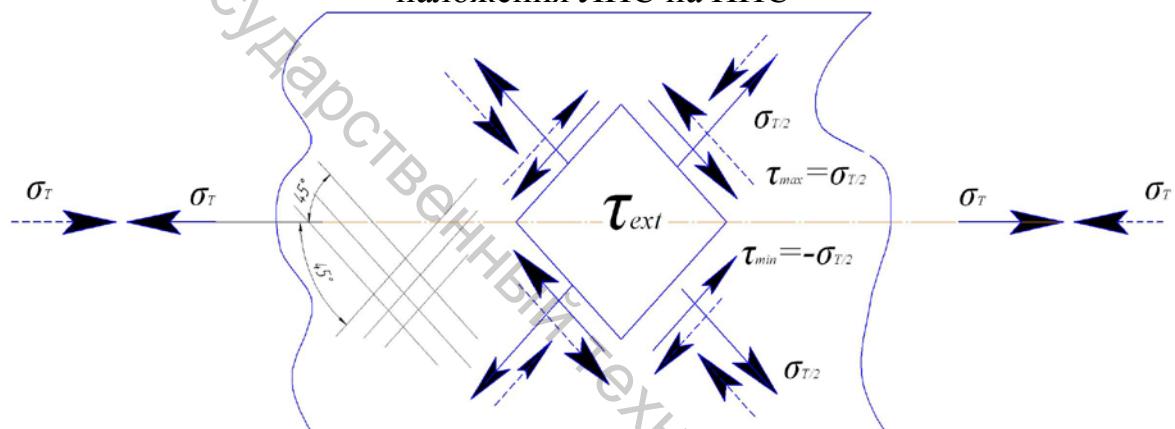


Рисунок 16.2 – Линии Чернова

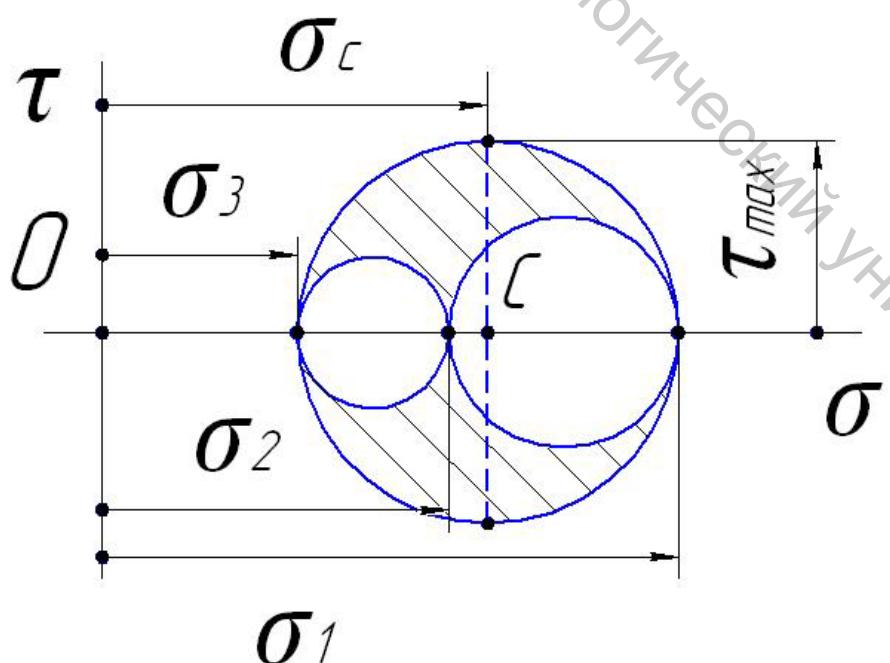


Рисунок 16.3 – Круги Мора объемного напряженного состояния

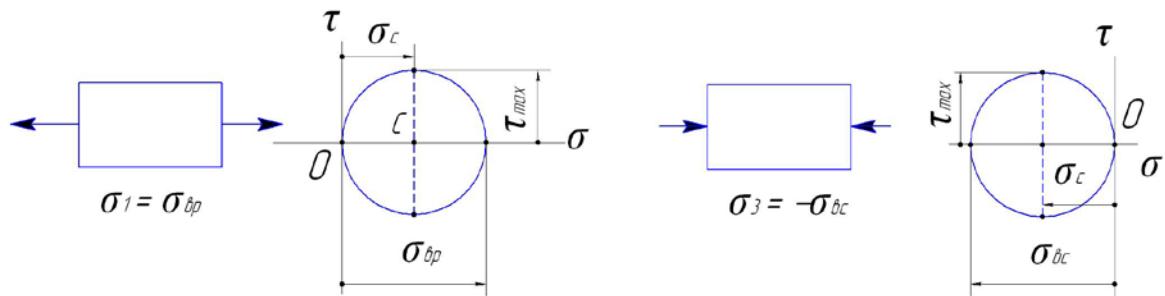


Рисунок 16.4 – Предельные ЛНС при растяжении и сжатии

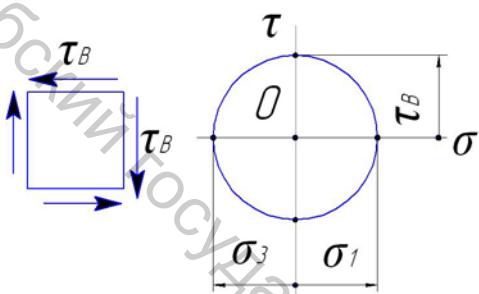


Рисунок 16.5 – Предельный чистый сдвиг

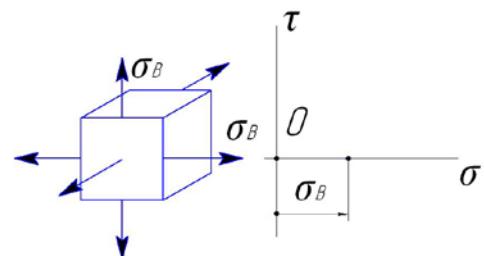


Рисунок 16.6 – Предельное растяжение в плоскости

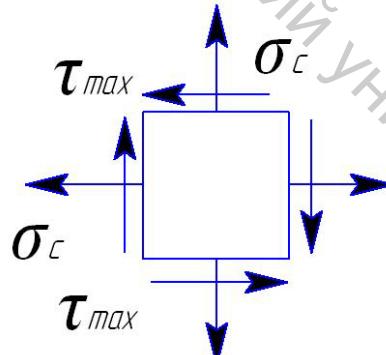
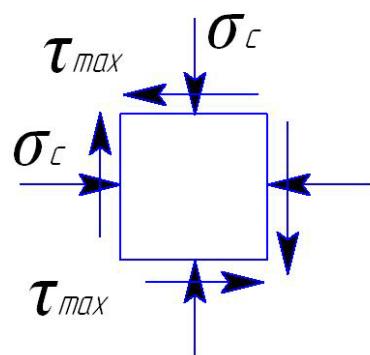
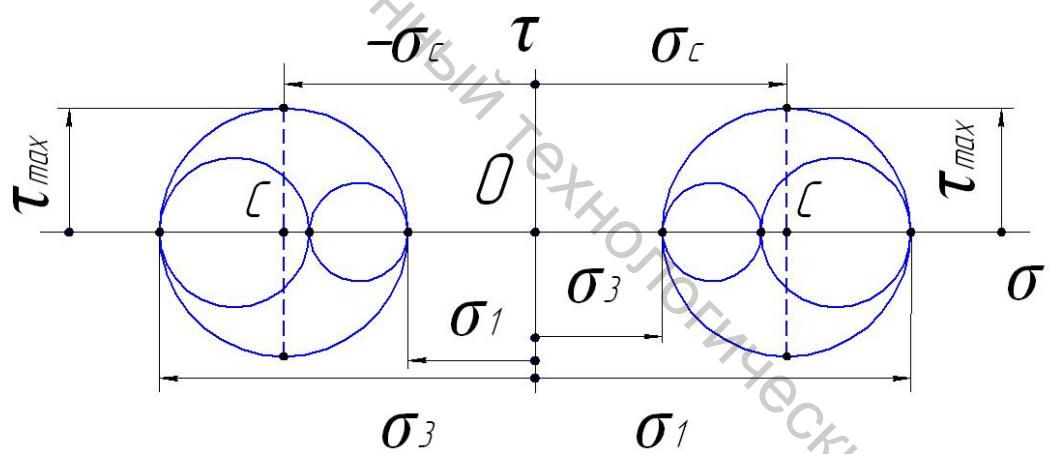


Рисунок 16.7 – Наложение растяжения – сжатия в плоскости на чистый сдвиг и растяжение – сжатие в направлении, перпендикулярном к плоскости

Каждый из трех кругов касается двух других. Наибольшие по модулю касательные напряжения (рис. 16.3)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (16.2)$$

Условие наступления текучести по Треска – Сен – Венану

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (16.3)$$

Используя здесь напряжения (16.2) и предел (16.1), напишем условие (16.3) в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (16.4)$$

Условие прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (16.5)$$

Левую часть условий (16.4, 16.5) называют эквивалентным напряжением по Треска – Сен – Венану. Условия (16.4, 16.5) переписываются:

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{N}-\hat{A}} = \sigma_{\hat{o}}, \quad \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{N}-\hat{A}} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{N}-\hat{A}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (16.6)$$

Еще раз подчеркнем, что условия и формула для эквивалентного напряжения (16.6) применимы к материалам, одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию, пределы текучести которых при растяжении  $\sigma_{\hat{o}}$  и сжатии  $\sigma_{\hat{a}}$  одинаковы.

Обобщим критерий Треска – Сен – Венана (16.3) на случай материалов, пределы прочности которых при растяжении  $\sigma_{\hat{o}}$  и сжатии  $\sigma_{\hat{a}}$  различны. Учтем с этой целью (рис. 16.3) наряду с наибольшими касательными напряжениями  $\tau_{\max}$  нормальные напряжения  $\sigma_c$ . Материалы с различными пределами прочности работают на сжатие лучше ( $\sigma_{\hat{a}} > \sigma_{\hat{o}}$ ); следует ожидать, что эквивалентное напряжение по обобщенному критерию при сжимающих  $\sigma_{\hat{a}}$  окажется меньше эквивалентного напряжения при растягивающих  $\sigma_{\hat{o}}$ .

По Мору напряжения  $\tau_{\max}$  и  $\sigma_{\hat{a}}$ , взятые в предельном состоянии (в момент разрушения), связаны уравнением

$$f(\tau_{\max}, \sigma_c) = \text{const}. \quad (16.7)$$

Положим левую часть уравнения (16.7) линейной:

$$\tau_{\max} + a\sigma_c = \hat{a}, \quad (16.8)$$

где  $a$  и  $\hat{a}$  – константы, зависящие только от свойств материала. Пусть круг Мора на рисунке 16.3 отвечает предельному состоянию – разрушению. Напряжения в уравнении (16.8)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (16.9)$$

Остается найти константы  $a$  и  $\hat{a}$ . Они не зависят от вида напряженного состояния и могут быть найдены при любых двух предельных: напри-

мер, при ЛНС ( $\sigma_1 = \sigma_{\hat{a}\hat{a}}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) и при втором предельном ЛНС ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{\hat{a}\hat{a}}$ ) (рис. 16.4): вычисляя напряжения (16.9) и подставляя их в уравнение (16.8), получим два уравнения

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{\hat{a}\hat{\sigma}}}{2} + \hat{a} \frac{\sigma_{\hat{a}\hat{\sigma}}}{2} = \hat{a}, \\ \frac{\sigma_{\hat{a}\hat{n}}}{2} - \hat{a} \frac{\sigma_{\hat{a}\hat{n}}}{2} = \hat{a}. \end{cases} \quad (16.10)$$

### Решение системы (16.10)

$$\hat{a} = \frac{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}} - \sigma_{\hat{a}\delta}}{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}} + \sigma_{\hat{a}\delta}} = \frac{1-m}{1+m}, \quad \hat{a} = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta} \sigma_{\hat{a}\tilde{n}}}{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}} + \sigma_{\hat{a}\delta}} = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{1+m}, \quad m = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}}} < 1. \quad (16.11)$$

После подстановки решения (16.11) в условие разрушения (16.8), напишем его в виде

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{l}\hat{i}\delta} = \sigma_1 - m\sigma_3 = \sigma_{\hat{a}\delta}. \quad (16.12)$$

Нетрудно видеть, что при чистом сдвиге (рис. 16.5)

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\hat{a}}, \quad \tau_{\hat{A}} + m\tau_{\hat{A}} = \sigma_{\hat{a}\delta},$$

т. е. предел прочности при чистом сдвиге

$$\therefore \tau_{\hat{A}} = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{1+m} = \hat{a}. \quad (16.13)$$

При равномерном растяжении в промтранстве (рис. 16.6) круг Мора вырождается в точку:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_{\hat{a}}, \quad \sigma_{\hat{a}} - m\sigma_{\hat{a}} = \sigma_{\hat{a}\delta},$$

т. е. предел прочности при равномерном растяжении в пространстве

$$\sigma_{\hat{a}} = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{1-m}. \quad (16.14)$$

### Отношение пределов (16.13, 16.14)

$$\frac{\tau_{\hat{A}}}{\sigma_{\hat{A}}} = \frac{1-m}{1+m} = a. \quad (16.15)$$

Предел (16.13) и отношение (16.15) пределов (16.13, 16.14) – константы  $\nu$  и  $a$  в условии разрушения (16.8).

Рассмотрим теперь напряженные состояния на рисунке 16.7. В правом из них главные напряжения и эквивалентное напряжение (16.12)

$$\sigma_1 = \sigma_c + \tau_{\max}, \quad \sigma_3 = \sigma_c - \tau_{\max}, \quad \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{j} \hat{i} \hat{\delta}} = (1-m)\sigma_c + (1+m)\tau_{\max}; \quad (16.16)$$

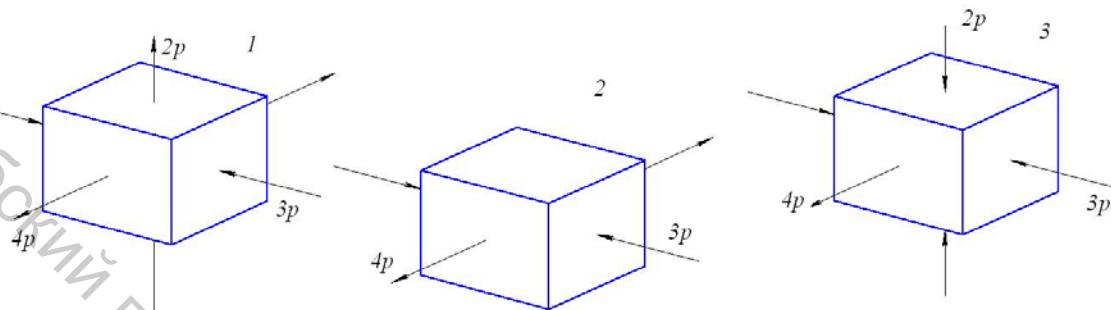
в левом из них

$$\sigma_1 = -\sigma_c + \tau_{\max}, \quad \sigma_3 = -\sigma_c - \tau_{\max}, \quad \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{l}\hat{i}\hat{\delta}} = -\sigma_c (1-m) + (1+m) \tau_{\max} \quad (16.17)$$

– действительно, эквивалентное напряжение при сжимающих  $\sigma_{\bar{n}}$  (16.17) меньше эквивалентного напряжения при растягивающих  $\sigma_{\bar{s}}$  (16.16).

### Тестирование

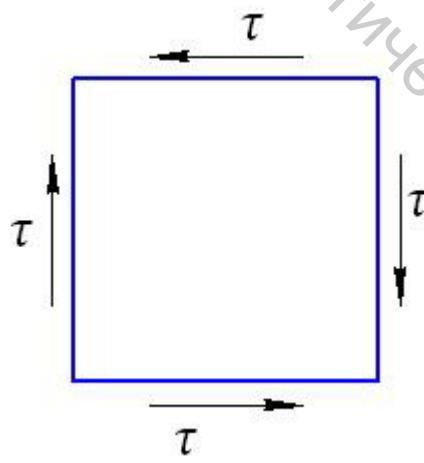
16.1 На рисунке показаны три напряженных состояния. Какое из них наиболее опасно?



Варианты ответа

1. 1.      2. 3      3. Все напряженные состояния равноопасны.

16.2 Напряженное состояние стали углеродистой марки Ст. 3 с пределом текучести  $\sigma_t = 220\text{МПа}$  и отливки из серого чугуна марки СЧ – 21 с пределом прочности при растяжении  $\sigma_{\text{вр}} = 220\text{МПа}$  и пределом прочности при сжатии  $750\text{МПа}$  – чистый сдвиг. Какой из материалов прочнее?



Варианты ответа

1. Чугун.      2. Сталь.      3. Материалы равнопрочны.

## Комментарии

16.1 Эквивалентное напряжение по Треска – Сен – Венану (16.6)

$$\sigma_{\text{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{N}-\hat{A}} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

эквивалентное напряжение по Мору (16.12)

$$\sigma_{\text{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{I}-\hat{\sigma}} = \sigma_1 - m\sigma_3.$$

Главные напряжения в заданных напряженных состояниях

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 4\delta, \sigma_2 = 2\delta, \sigma_3 = -3\delta; \quad \sigma_1 = 4\delta, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -3\delta; \quad \sigma_1 = 4\delta, \sigma_2 = -2\delta, \\ \sigma_3 &= -3\delta,\end{aligned}$$

т. е. во всех трех наибольшее и наименьшее напряжения

$$\sigma_1 = 4\delta, \sigma_3 = -3\delta.$$

Эквивалентные напряжения

$$\sigma_{\text{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{N}-\hat{A}} = 4\delta - (-3\delta) = 7\delta, \quad \sigma_{\text{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{I}-\hat{\sigma}} = 4\delta - m(-3\delta) = 4p + 3mp.$$

Верен ответ 3: заданные напряженные состояния равноопасны, хотя и отличаются друг от друга минимаксом  $\sigma_2$ . Неучет минимакса – недостаток рассмотренных критериев.

16.2 Предел текучести стали при сдвиге по Треска – Сен – Венану (16.1)

$$\tau_T = \frac{1}{2}\sigma_T = \frac{1}{2}220 = 110 \text{ МПа},$$

предел прочности чугуна при сдвиге по Мору (16.13)

$$\tau_{\hat{A}} = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{1+m}, \quad m = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{\sigma_{\hat{a}\hat{n}}} = \frac{220}{750} = 0,294, \quad \tau_{\hat{A}} = \frac{220}{1+0,294} = 170 \text{ МПа}.$$

Верен ответ 1.

## 17 Универсальное уравнение упругой кривой

Положим, что точки материала деформируемого тела (сплошной среды) перемещаются под нагрузкой (рис. 17.1) в плоскости  $yz$  – не перемещаясь в направлении оси  $x$  (перемещения  $u = 0$ ). Считая все перемещения малыми (по сравнению с размерами тела), напишем перемещения (рис. 17.1) точек, бесконечно близких к точке  $A$ :

$$w_B = w_A + \frac{\partial w}{\partial z} dz, \quad v_B = v_A + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad w_c = w_A + \frac{\partial w}{\partial y} dy. \quad (17.1)$$

Малость перемещений (17.1) гарантирует малость разностей

$$w_B - w_A = \frac{\partial w}{\partial z} dz, \quad v_B - v_A = \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad w_c - w_A = \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (17.2)$$

и, следовательно, малость углов (рис. 17.1)  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и замену длин отрезков  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  на длины отрезков  $A_1B'_1$  и  $A_1C'_1$  : малые абсолютное и относительное удлинения отрезка  $AB$  (см. первую из разностей (17.2))

$$\Delta(dz) = w_B - w_A = \frac{\partial w}{\partial z} dz, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (17.3)$$

аналогично этому,  $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$ ; угол сдвига в плоскости  $yz$  (см. вторую и третью из разностей (17.2))

$$\gamma_{yz} = \angle CAB - \angle C_1A_1B_1 = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{v_B - v_A}{dz + \Delta(dz)} + \frac{w_c - w_A}{dy + \Delta(dy)} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (17.4)$$

(удлинениями  $\Delta(dz)$  и  $\Delta(dy)$  пренебрегли в виду их малости по сравнению с первоначальными размерами  $dz$  и  $dy$ ).

Используем соотношения (17.4), (17.3) в теории прямого изгиба. Полагая, что поперечные сечения стержня перемещаются, оставаясь плоскими, а углы между ними и продольными “волокнами” остаются прямыми (рис. 17.1), найдем, что

$$\gamma_{yz} = 0, \quad \frac{\partial v(z)}{\partial z} = -\frac{\partial w(y, z)}{\partial y}, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y}. \quad (17.5)$$

По закону Гука (4.2)  $\varepsilon_z = \sigma_z / E$ ; нормальные напряжения при прямом изгибе (9.1)

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} y,$$

т. е. дифференциальное уравнение для прогибов (дифференциальное уравнение упругой кривой) стержня (балки) (17.5) приобретает вид

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{M_x}{EI_x} y \right) = \frac{M_x(z)}{EI_x}. \quad (17.6)$$

Проинтегрируем уравнение (17.6) (считая жесткость  $EI_x$  постоянной) на первом участке нагружения балки (рис. 17.3). Изгибающий момент в произвольном сечении первого участка

$$M_{x1} = M_0 + Q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2} \equiv M_0 z^0 + Q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2}, \quad M_0 z^0 \equiv M_0. \quad (17.7)$$

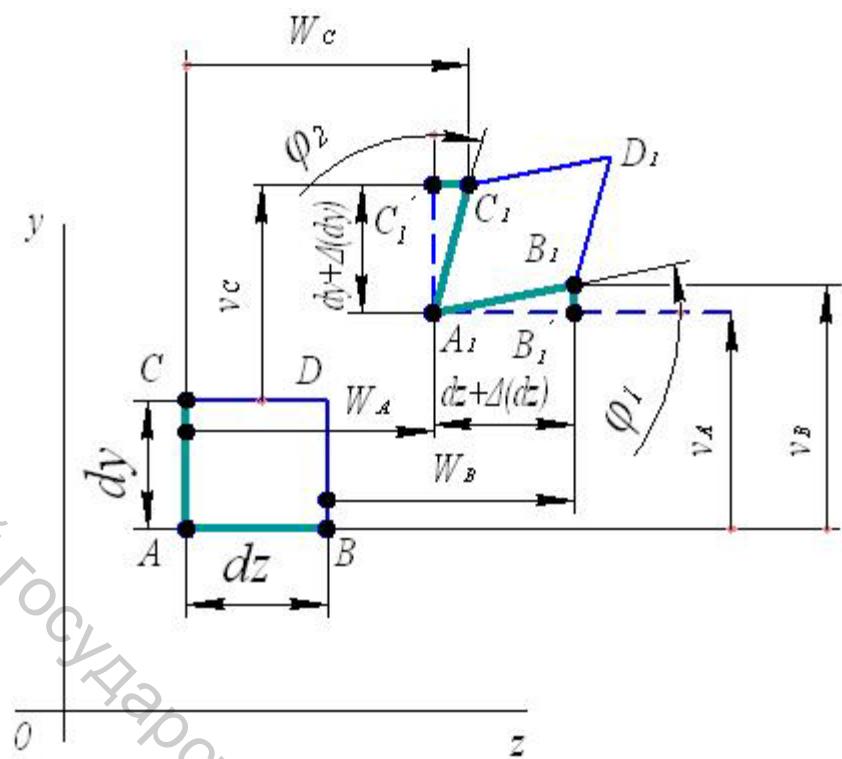


Рисунок 17.1 – Малые перемещения и деформации в плоской деформации сплошной среды

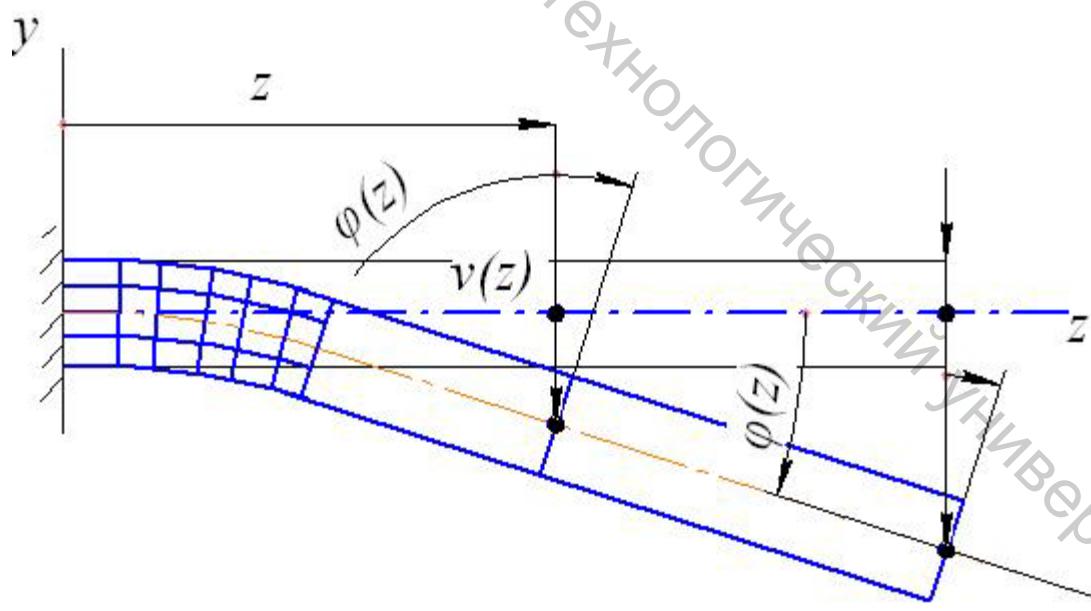


Рисунок 17.2 – Малые перемещения при прямом изгибе: прогибы и углы поворота поперечных сечений

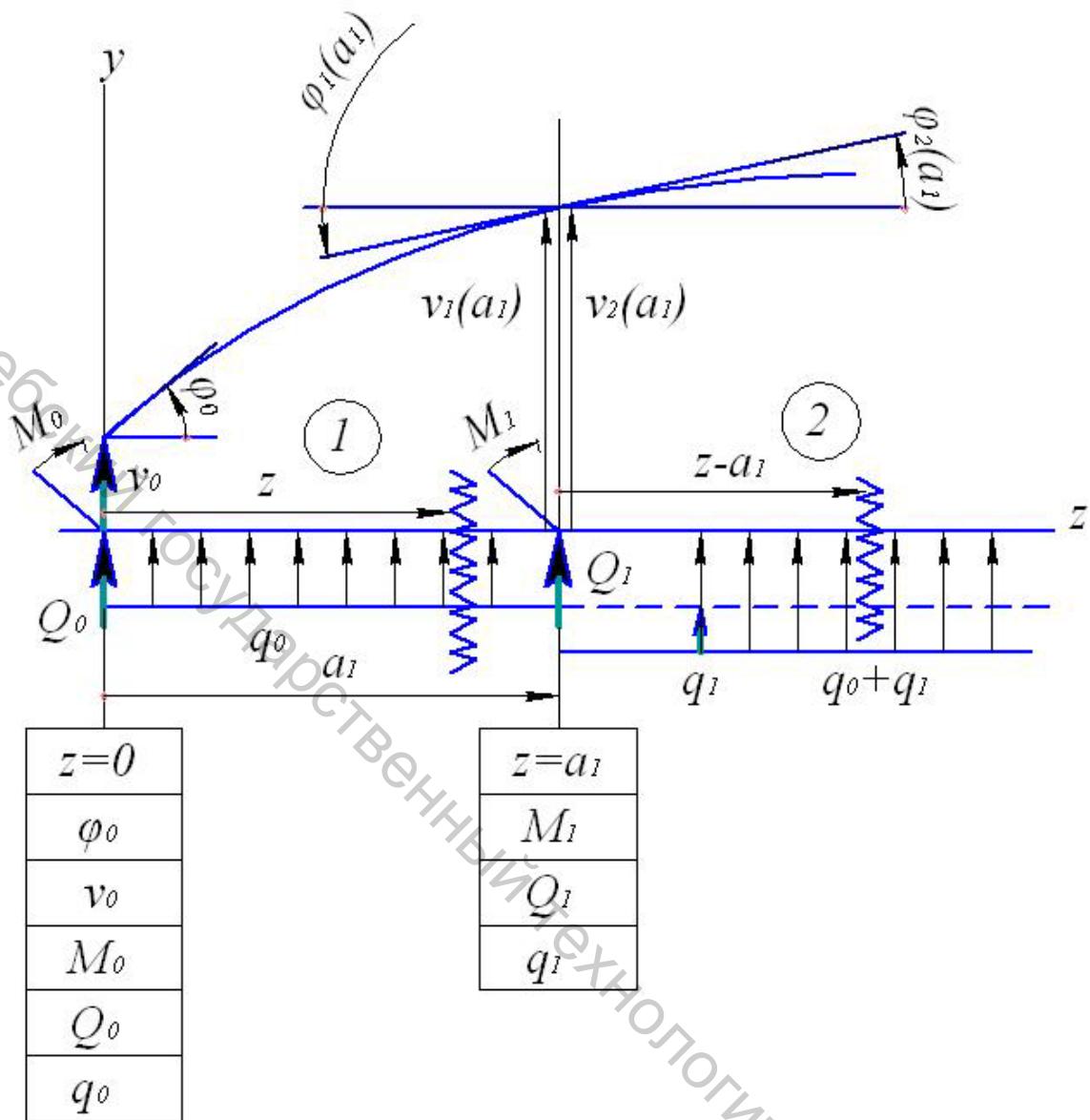


Рисунок 17.3 – Первый и второй участки нагружения балки

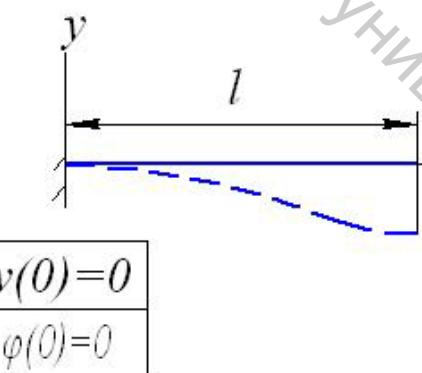
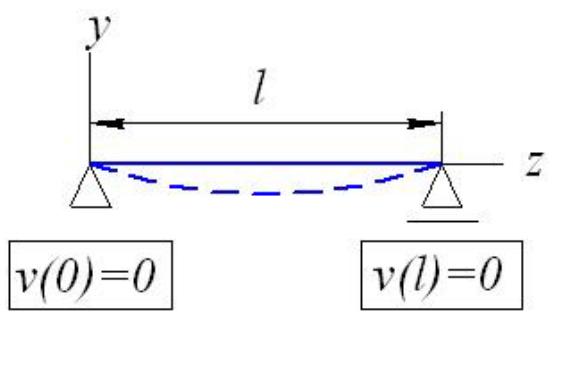


Рисунок 17.4 – Краевые условия – условия закрепления шарнирно-опертой и защемленной балок

Первое интегрирование дает углы поворота поперечных сечений – углы наклона касательных к упругой кривой

$$EI_x \varphi_1(z) \approx EI_x \operatorname{tg} \varphi_1(z) = EI_x \frac{dv_1(z)}{dz} = M_0 z + \frac{1}{2} Q_0 z^2 + \frac{1}{6} q_0 z^3 + C_1 = \Phi_0(z) + C_1, \quad (17.8)$$

$$\Phi_0(z) = M_0 z + \frac{1}{2} Q_0 z^2 + \frac{1}{6} q_0 z^3;$$

второе интегрирование – прогибы

$$EI_x v_1(z) = \frac{1}{2} M_0 z^2 + \frac{1}{6} Q_0 z^3 + \frac{1}{24} q_0 z^4 + C_1 z + D_1 = V_0(z) + C_1 z + D_1, \quad (17.9)$$

$$V_0(z) = \frac{1}{2} M_0 z^2 + \frac{1}{6} Q_0 z^3 + \frac{1}{24} q_0 z^4,$$

$C_1$  и  $D_1$  – произвольные постоянные интегрирования.

Изгибающий момент в произвольном сечении второго участка (рис. 17.3)

$$M_{x2} = M_0 z^0 + Q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2} + M_1(z - a_1)^0 + Q_1(z - a_1) + q_1 \frac{(z - a_1)^2}{2} \quad (17.10)$$

– к моментам, вычисляемым по формуле (17.7), добавлены изгибающие моменты  $M_1(z - a_1)^0 \equiv M_1$ ,  $Q_1(z - a_1)$  и момент добавленной распределенной нагрузки с интенсивностью  $q_1$ . Первое интегрирование момента (17.10) дает (см. функцию  $\Phi_0$  (17.8)) углы поворота поперечных сечений

$$EI_x \varphi_2(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z - a_1) + C_2, \quad (17.11)$$

второе (см. функцию  $V_0$  (17.9)) – прогибы

$$EI_x v_2(z) = V_0(z) + V_1(z - a_1) + C_2 z + D_2. \quad (17.12)$$

Используем в функциях (17.8) и (17.11) условие гладкости упругой кривой на границе между участками нагружения – полагая в них  $z = a_1$ : на рисунке 17.3  $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$ , т. е.

$$\Phi_0(a_1) + C_1 = \Phi_0(a_1) + \Phi_1(a_1 - a_1) + C_2, \quad C_1 = C_2 = C. \quad (17.13)$$

Используем в прогибах (17.9, 17.12) условие непрерывности  $v_1(a_1) = v_2(a_1)$ :

$$V_0(a_1) + C_1 a_1 + D_1 = V_0(a_1) + V_1(a_1 - a_1) + C_2 a_1 + D_2, \quad D_1 = D_2 = D. \quad (17.14)$$

На всех участках нагружения произвольные постоянные интегрирования (17.13, 17.14) одни и те же. Найдем их из начальных условий на первом участке (рис. 17.3)  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ ,  $v_1(0) = v_0$ : используя выражения (17.8, 17.9), найдем  $C = EI_x \varphi_0$ ,  $D = EI_x v_0$ . Распространяя теперь выражение (17.12) на случай  $n$ -го участка нагружения, напишем универсальное уравнение для прогибов:

$$\begin{aligned}
 EI_x v(z) = & EI_x v_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{1}{2} M_0 z^2 + \frac{1}{6} Q_0 z^3 + \frac{1}{24} q_0 z^4 \Big|_1 + \\
 & + \frac{1}{2} M_1 (z - a_1)^2 + \frac{1}{6} Q_1 (z - a_1)^3 + \frac{1}{24} q_1 (z - a_1)^4 \Big|_2 + \\
 & + \dots + \frac{1}{2} M_{n-1} (z - a_{n-1})^2 + \frac{1}{6} Q_{n-1} (z - a_{n-1})^3 + \frac{1}{24} q_{n-1} (z - a_{n-1})^4 \Big|_n.
 \end{aligned} \quad (17.15)$$

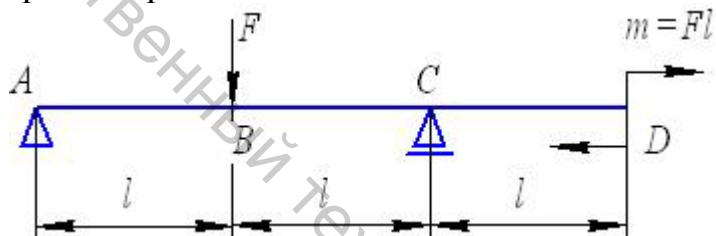
Выражение для углов поворота может быть получено (см. уравнение (17.8)) дифференцированием прогиба (17.15).

В уравнении (17.15) начальный прогиб  $v_0$  и начальный угол поворота  $\varphi_0$  (по существу, произвольные постоянные интегрирования) остались неизвестными. Они определяются из краевых условий, примеры которых показаны на рисунке 17.4.

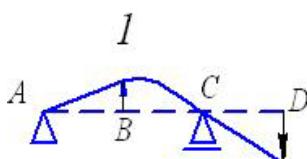
Заметим в заключение, что уравнение (17.15) даст прогибы на любом ( $k$ -ом) участке нагружения балки – для их вычисления берем все слагаемые слева от черты  $|_e$ .

#### Тестирование

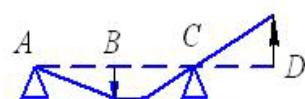
17.1 На рисунке показана шарнирно-опертая балка. Какой из вариантов упругой кривой принадлежит ей?



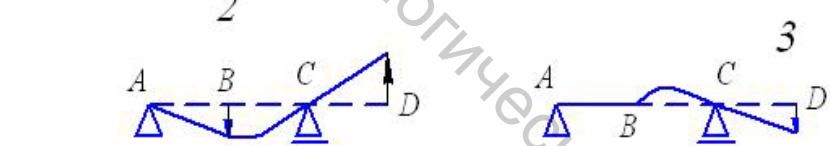
Варианты ответа



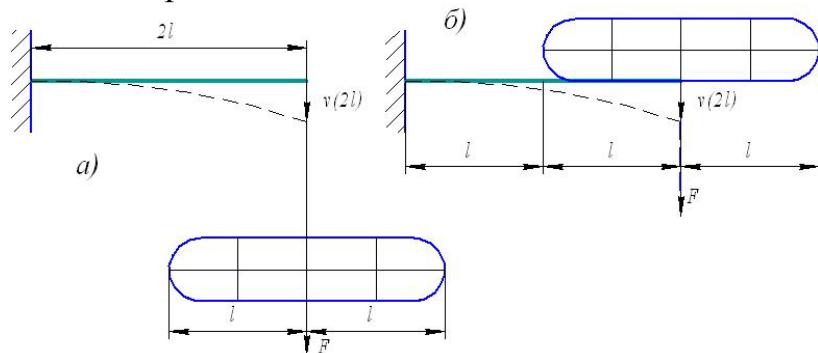
2



3



17.2 На рисунке показана консольная полка. В каком из случаев нагружения тюком прогиб ее свободного конца больше?

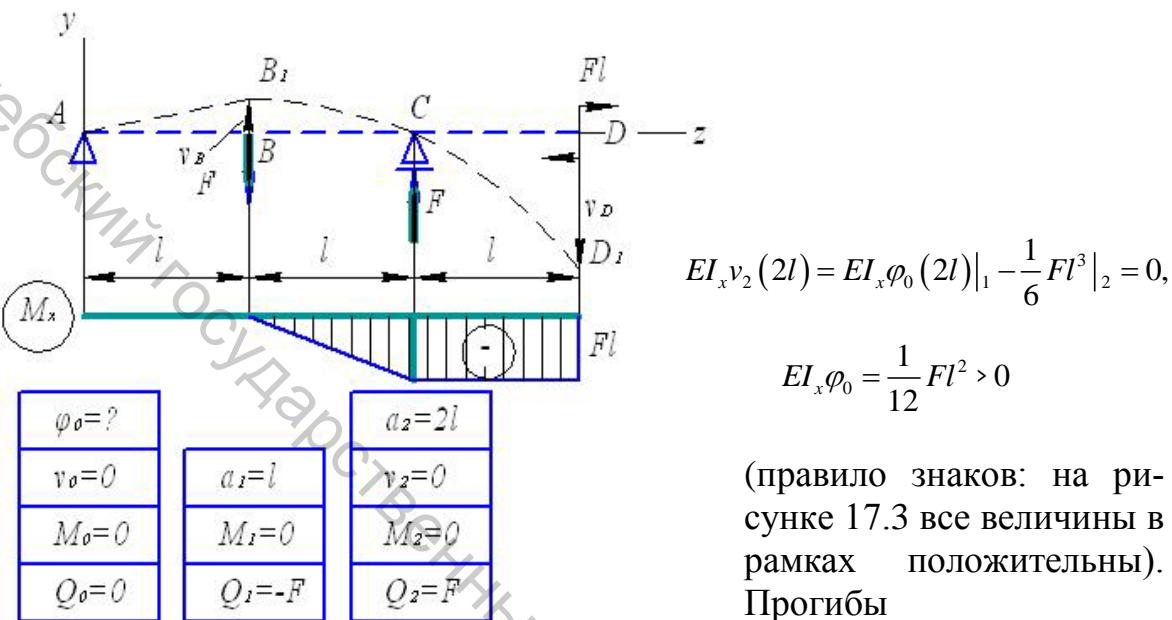


Варианты ответа

1. В случае а).    2. В случае б).    3. Прогибы одинаковы.

### Комментарии

17.1 На участке  $AB$  изгибающие моменты  $M_x = 0$  – участок не искривляется (остается прямолинейным), поворачиваясь на угол  $\varphi_0$ , пока неизвестный. Его можно определить, записывая уравнение (17.15) на втором участке  $BC$  с подстановкой в него значения  $z = a_2 = 2l$ , т. е. используя краевое условие  $v_c = v_2(2l) = 0$ :



$$EI_x v_2(2l) = EI_x \varphi_0(2l) \Big|_1 - \frac{1}{6} Fl^3 \Big|_2 = 0,$$

$$EI_x \varphi_0 = \frac{1}{12} Fl^2 > 0$$

(правило знаков: на рисунке 17.3 все величины в рамках положительны).  
Прогибы

$$EI_x v_B = EI_x v_1(l) = \frac{1}{12} Fl^2 \cdot l = \frac{1}{12} Fl^3,$$

$$EI_x v_D = EI_x v_3(3l) = \frac{1}{12} Fl^2 \cdot 3l \Big|_1 - \frac{1}{6} F(2l)^3 \Big|_2 + \frac{1}{6} Fl^3 \Big|_3 = -\frac{11}{12} Fl^3.$$

Впрочем, можно руководствоваться качественными соображениями. Вторая производная  $d^2v/dz^2$  равна при малых перемещениях кривизне упругой кривой. При отрицательных моментах балка изгибается выпуклостью вверх. Проводя через точку  $C$  ( $v_c = 0$ ) выпуклую вверх кривую  $B_1CD_1$  и сопрягая ее с прямой  $AB_1$ , найдем ответ 1. Ответ 2 не учитывает правило знаков для изгибающих моментов. Ответ 3 предлагает негладкую в точке  $B$  кривую.

17.2 В случае *a*) уравнение (17.15) дает

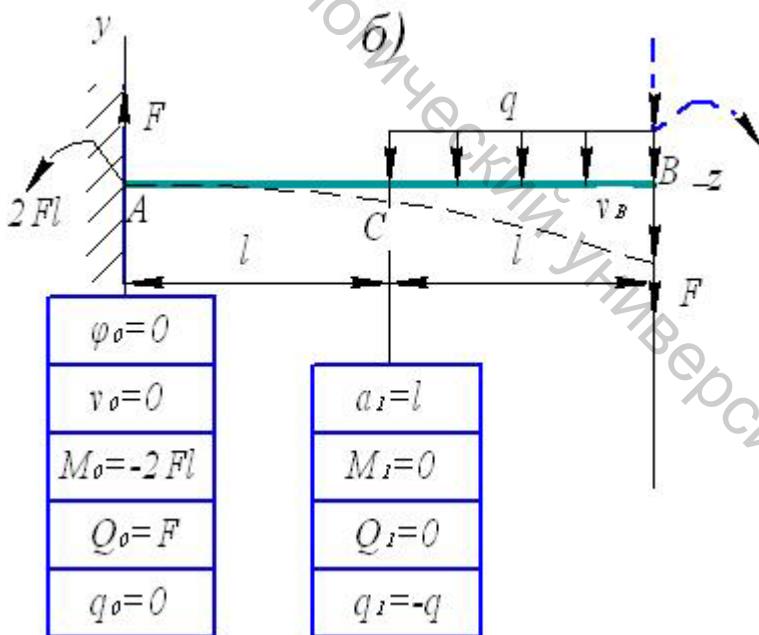
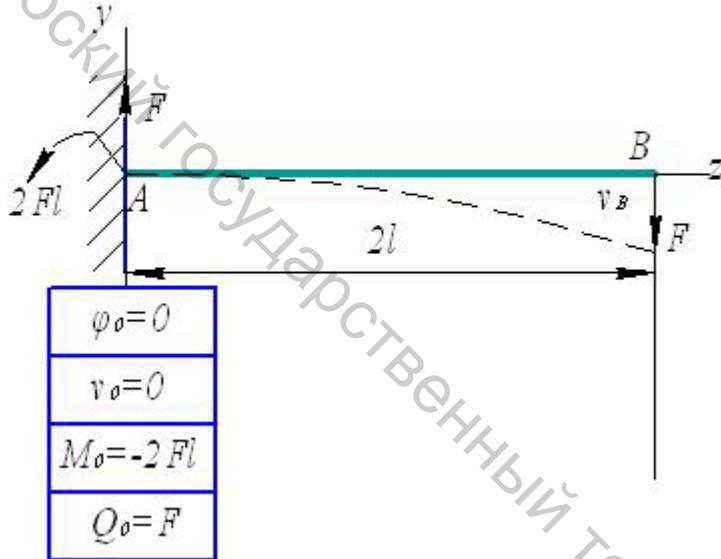
$$EI_x v_B = EI_x v_1(2l) = -\frac{1}{2} 2Fl(2l)^2 + \frac{1}{6} F(2l)^3 = -\frac{8}{3} Fl^3. \quad (17.16)$$

В случае *б*) силы тяжести, действующие на тюк и передающиеся на полку, приводятся к равнодействующей  $F$ , приложенной в точке  $B$ , – реакции заделки останутся прежними. Но (как кажется!) к значению (17.16) следует добавить результат действия равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью  $q = F/(2l)$ :

$$EI_x v_B = EI_x v_2 (2l) = -\frac{1}{2} 2Fl (2l)^2 + \frac{1}{6} F (2l)^3 \Big|_1 - \frac{1}{24} \frac{F}{2l} l^4 \Big|_2 = -\frac{8}{3} Fl^3 - \frac{1}{48} Fl^3 = -\frac{129}{48} Fl^3$$

– абсолютная величина искомого прогиба выросла. Однако ответ 2 не верен. Лежащая на полке часть тюка не давит на полку, интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q=0$ . Верен ответ 3.

a)



## 18 Обобщенный закон Гука

Упругие деформации – относительные удлинения  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  ребер элемента (рис. 1.4) и углы его сдвига  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  в общем случае объемной деформации (не плоской) находятся по формулам, обобщающим формулы (17.3, 17.4) для случая плоской деформации (рис. 17.1),

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (18.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Упругие деформации элемента сплошной анизотропной среды (18.1) связаны с напряжениями на рисунке 1.4 линейными соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots + a_{26}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + \dots + a_{36}\tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + \dots + a_{46}\tau_{zx}, \\ \gamma_{yz} &= a_{51}\sigma_z + a_{52}\sigma_y + \dots + a_{56}\tau_{zx}, \\ \gamma_{zx} &= a_{61}\sigma_z + a_{62}\sigma_y + \dots + a_{66}\tau_{zx}, \\ a_{ik} &= a_{ki} \end{aligned} \quad (18.2)$$

– обобщенным законом Гука. Вводя в рассмотрение матрицы – столбцы («векторы») деформаций и напряжений и симметричную  $6 \times 6$  – матрицу коэффициентов деформации, напишем закон Гука (18.2) наиболее компактно:

$$\vec{\varepsilon} = (a_{ik}) \vec{\sigma},$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \vdots \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}, \quad (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{16} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{61} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{66} \end{pmatrix}, \quad (18.3)$$

штрихами показана главная диагональ матрицы.

Пусть в направлениях  $z$  и  $z'$ , симметричных относительно плоскости  $xy$ , упругие свойства среды одинаковы. Направление  $z$  – главное направление упругости, плоскость  $xy$  – плоскость упругой симметрии. Такую плоскость можно указать в любой точке среды, все они параллельны.

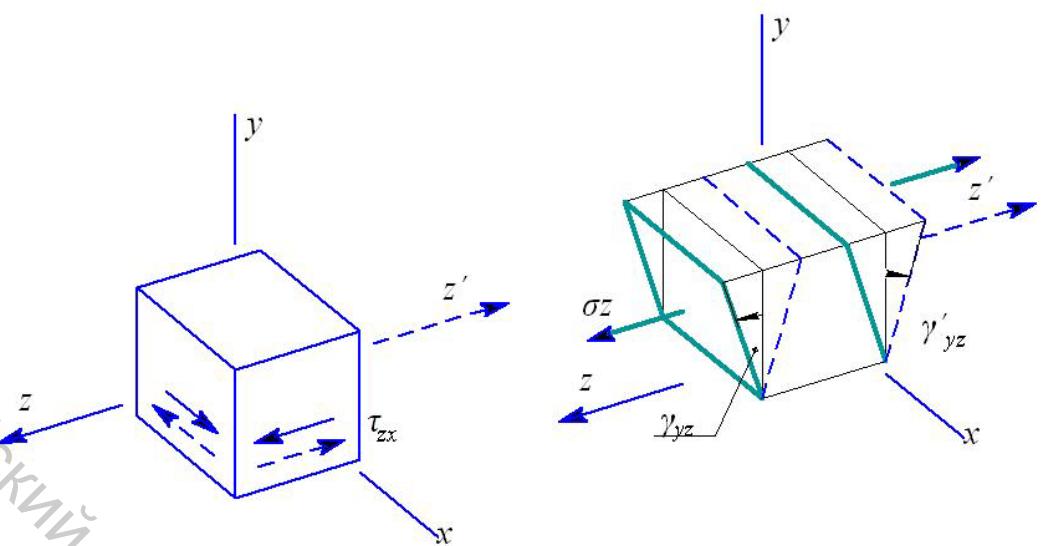


Рисунок 18.1 – Направление  $z$  – главное направление упругости, плоскость  $xy$  – плоскость упругой симметрии

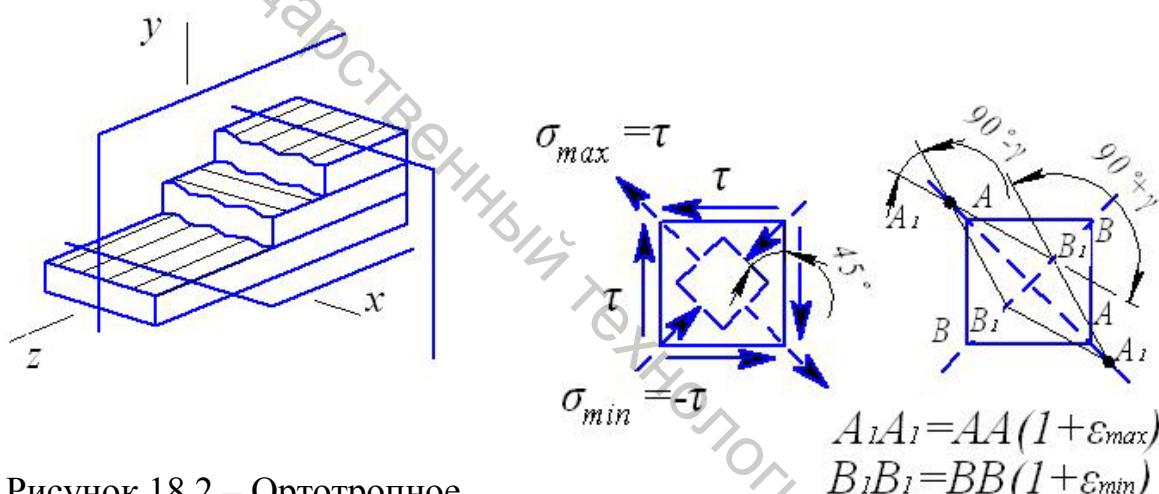


Рисунок 18.2 – Ортотропное тело

Рисунок 18.4 – Чистый сдвиг в плоскости изотропии

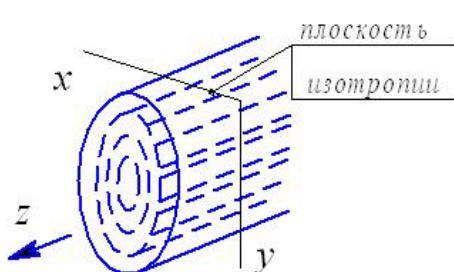


Рисунок 18.3 – Транстропное тело

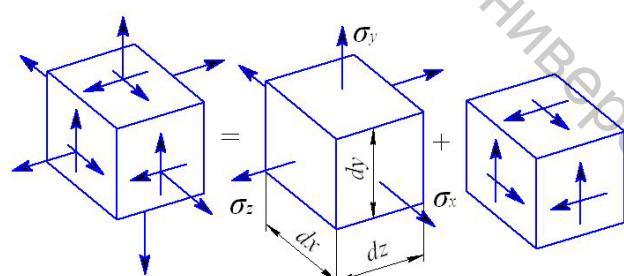


Рисунок 18.5 – К вычислению объемной деформации изотропного тела

На рисунке 18.1 показан элемент, на гранях которого действуют касательные напряжения  $\tau_{zx}$ , параллельные главному направлению  $z$ . Относительное удлинение элемента (18.2) в направлении оси  $z$

$$\varepsilon_z = a_{36} \cdot \tau_{zx},$$

если изменить направление напряжений (направить их вдоль оси  $z'$ ) –

$$\varepsilon_z = -a_{36} \cdot \tau_{zx},$$

но свойства среды в направлениях  $z$  и  $z'$  одинаковы – если первые напряжения (показаны «сплошными» стрелками) вызвали удлинение, то и вторые (показаны «штриховыми» стрелками) вызовут удлинение  $\varepsilon_{z'} = a_{36} \cdot \tau_{zx}$ , не укорочение. Выход из противоречия – положить упругую постоянную  $a_{36}$  равной нулю – показанные на рисунке 18.1 касательные напряжения  $\tau_{zx}$  (и не показаны на рисунке напряжения  $\tau_{zy}$ ) не вызовут удлинения – укорочения  $\varepsilon_z$ . Аналогично этому, угол сдвига (18.2) элемента, растянутого напряжениями  $\sigma_z$ ,

$$\gamma_{yz} = a_{51} \sigma_z,$$

но с таким же правом можно написать

$$-\gamma_{yz} = \gamma_{yz'} = a_{51} \sigma_z$$

– и здесь следует положить  $a_{51}=0$ .

Пусть плоскость упругой симметрии  $xy$  заменена зеркалом: нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (не показаны на рисунке 18.1),  $\sigma_z$ ; касательные напряжения  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (не показаны на рисунке), действующие в плоскости упругой симметрии; удлинения,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , угол сдвига  $\gamma_{xy}$  (не показан на рисунке) в плоскости симметрии, будучи отраженными в зеркале, не изменяют своих направлений – знаков. Назовем их «симметричными» напряжениями и деформациями: они связаны друг с другом соотношениями (18.2), где постоянные  $a_{i5}, a_{i6}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) равны нулю. Напряжения  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  и углы сдвига  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  в плоскостях, перпендикулярных к плоскости упругой симметрии, будучи отражены в зеркале, изменяют направления – знаки. Назовем их «антисимметричными». Они связаны соотношениями закона (18.2), где постоянные  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) равны нулю.

Матрица (18.3) приобретает вид

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & \backslash & \cdot & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & \cdot & \backslash & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & \cdot & \cdot & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \begin{bmatrix} a_{55} & \backslash & a_{56} \\ a_{65} & \backslash & a_{66} \end{bmatrix} & \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{65} & \backslash a_{66} \end{pmatrix}, \quad (18.4)$$

она состоит из двух –  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$  – симметричных субматриц (штрихами отмечены главные диагонали субматриц). Учтем симметрию матрицы

(18.4) и найдем число упругих постоянных, отличающихся друг от друга:

$$\left( \frac{4 \times 4 - 4}{2} + 4 \right) + \left( \frac{2 \times 2 - 2}{2} + 2 \right) = 13, \quad (18.5)$$

из них независимы 12 [1].

В общем случае анизотропии (18.3) констант, отличающихся друг от друга:

$$\frac{6 \times 6 - 6}{2} + 6 = 21,$$

из них независимы 18 [1].

Примеры анизотропных материалов с упругой симметрией: слоистые и волокнистые стеклопластики, состоящие из пластмассы, армированной стеклянными волокнами.

В основе слоистого стеклопластика ортогонального армирования несколько чередующихся слоев параллельных нитей, взаимно перпендикулярных с нитями соседних слоев (рис. 18.2). Плоскости, параллельные слоям, могут быть признаны плоскостями упругой симметрии. Понятно, что и плоскости, перпендикулярные нитям 1-го и 2-го рода, – тоже плоскости упругой симметрии. Такой материал (с тремя главными направлениями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) называется ортотропным. Все нормальные напряжения и удлинения в главных направлениях – симметричные фактыры, все касательные напряжения и углы сдвига – симметричные фактыры по отношению к плоскости симметрии, параллельной им, и антисимметричные по отношению к двум другим плоскостям симметрии.

Матрица упругих постоянных

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{13} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{23} \\ a_{31} & \dots & \dots & a_{33} \\ 0 & & & \begin{bmatrix} a_{44} \\ a_{55} \\ a_{66} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (18.6)$$

Число упругих постоянных в матрице (18.6) снижается против числа (18.5):

$$\left( \frac{3 \times 3 - 3}{2} + 3 \right) + \left( \frac{1 \times 1 - 1}{2} + 1 \right) 3 = 9$$

– все они независимы.

Однонаправленный (в направлении оси  $z$ ) намоточный стеклопластик (рис. 18.3) состоит из связующего, армированного параллельными стеклянными волокнами. Плоскость, перпендикулярная волокнам, – плоскость упругой симметрии; она же – плоскость изотропии, ибо во всех направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $x'$ ,  $y'$  и т. п. в этой плоскости упругие свойства

стеклопластика одинаковы. Структура матрицы (18.6) не изменится, но число независимых констант уменьшается до 5, хотя в соотношениях (18.2)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) - \frac{\mu'}{E'}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\mu'}{E'}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{zy}}{G'}, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu'}{E'}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'}\sigma_z, & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G'}\end{aligned}\quad (18.7)$$

( $E$  и  $E'$  – модули Юнга,  $\mu$  и  $\mu'$  – коэффициенты Пуассона,  $G$  и  $G'$  – модули сдвига) 6 констант. Тело, подчиняющееся закону Гука (18.7), называется транстропным.

Рассмотрим (рис. 18.4) чистый сдвиг ( $\sigma_z = 0$ ) в плоскости изотропии: на исходных площадках равного размера действуют только касательные напряжения, на главных площадках, наклоненных к исходным под углами (13.8, 13.9), равными  $45^\circ$ , действуют главные напряжения

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \tau. \quad (18.8)$$

Относительные удлинения ребер элемента с гранями – главными площадками найдем по закону (18.7):

$$\varepsilon_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{\substack{\max \\ \min}} - \mu \sigma_{\substack{\min \\ \max}} \right) = \pm \frac{1+\mu}{E} \tau, \quad (18.9)$$

угол сдвига элемента с гранями – исходными площадками (по закону (18.7))

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (18.10)$$

Деформированное состояние в плоскости изотропии описывается формулами, аналогичными формулам плоского напряженного состояния, рассмотренного в лекции 13. Последние переписываются с заменой нормальных напряжений на относительные удлинения и касательных напряжений на половины углов сдвига. Напишем по аналогии с равенством (18.8):

$$\varepsilon_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{\gamma}{2},$$

или (см. формулы (18.9, 18.10))

$$\frac{1+\mu}{E} \tau = \frac{\tau}{2G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (18.11)$$

Из связи (18.11) следует, что независимых констант в законе (18.7) не 6, а 5.

Закон Гука для изотропного тела получается из закона (18.7), если положить в последнем  $E' = E$ ,  $\mu' = \mu$ ,  $G' = G$ . Напряженное состояние на рисунке 1.4 представляется (рис. 18.5) наложением двух напряженных состояний. При втором из них объем элемента изотропной среды не изменится. Изменение объема элемента  $V = dx dy dz$

$$\Delta V = V_1 - V = \left[ (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz \right] - dx dy dz,$$

где  $(1 + \varepsilon_x) dx, (1 + \varepsilon_y) dy, (1 + \varepsilon_z) dz$  – длины ребер элемента, получивших удлинения  $\varepsilon_x dx, \varepsilon_y dy, \varepsilon_z dz$  при растяжении напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Рассматривая упругие деформации (порядка 0,001 первоначальных размеров), получим

$$\Delta V = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \dots) dx dy dz - dx dy dz$$

(многоточием обозначены произведения малых относительных удлинений, ими пренебрегаем). Относительная объемная деформация

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Записывая закон (18.7) для изотропного тела, получим:

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma}{K}, \quad (18.12)$$

где среднее нормальное напряжение и объемный модуль упругости

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

При положительных (растягивающих) напряжениях ( $\sigma > 0$ ) объем элемента увеличивается (в крайнем случае, остается неизменным), т. е. объемный модуль упругости

$$0 < K \leq \infty,$$

коэффициент Пуассона изотропного тела  $\mu \leq 0,5$ . При  $\mu = 0,5$  деформация (18.12) равна нулю.

## Тестирование

18.1 Какую структуру приобретает матрица коэффициентов деформации ортотропного тела (18.6), если оси координат, совпадающие с главными направлениями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 18.2), повернуть вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha \neq 90^\circ$ ?

Варианты ответа

1. Структура матрицы (18.6) не изменится.
2. Структуру матрицы (18.4).
3. Структуру матрицы (18.3), не содержащей нулей.

18.2 Какие из матриц вида (18.3) наиболее полно описывают упругие деформации в упрощенном плоском напряженном состоянии изотропного тела, представленном на рисунке 18.6?

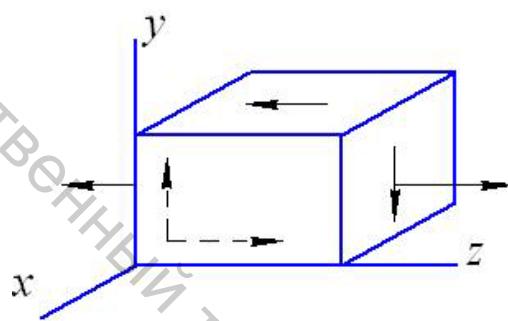


Рисунок 18.6 – Упрощенное плоское напряженное состояние изотропного тела

Варианты ответа

$$1. \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & -\frac{\mu}{E} \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{pmatrix}.$$

### Комментарии

18.1 Если систему координат на рисунке (18.2) повернуть вокруг главного направления  $z$  (на угол  $\alpha \neq 90^\circ$ ), направления  $x$  и  $y$  перестанут быть главными направлениями в упругом теле. Сохранится одно главное направление (ось  $z$ ) и, соответственно, одна плоскость упругой симметрии (плоскость  $xy$ ). Матрица коэффициентов деформации примет вид матрицы (18.4)

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & \dots & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & \dots & 0 & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Верен ответ 2.

18.2 Элемент тела на рисунке 18.6, находясь в УПНС, удлиняется в направлении оси  $z$  (получая удлинение  $\varepsilon_z$ ), сужается в направлениях осей  $x$  и  $y$  (получая равные укорочения  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ ) и становится косоугольным (получая угол сдвига  $\gamma_{yz}$ ).

Закон Гука (18.7), написанный для изотропного тела, дает

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau}{G}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma}{E}.$$

Верен ответ 3.

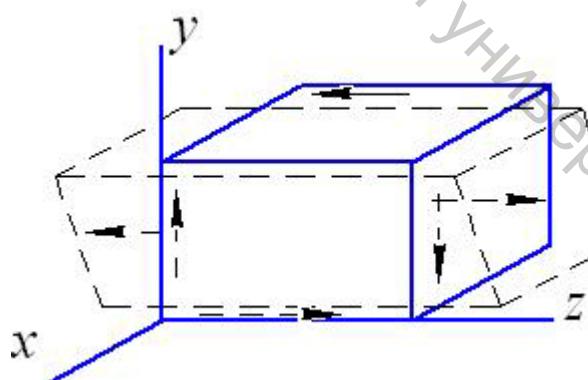
Действительно,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z + 0 \cdot \tau - \frac{\mu}{E} \cdot 0 - \frac{\mu}{E} \cdot 0,$$

$$\gamma_{yz} = 0 \cdot \sigma + \frac{1}{G} \tau + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E} \sigma + 0 \cdot \tau + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E} \sigma + 0 \cdot \tau + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.$$



## 19 Кручение круглого бруса

Нанесем (рис. 19.1) на поверхность бруса поперечные окружности и продольные прямые. Закрутим брус. Поперечные окружности не изменяются, продольные прямые превратятся в винтовые линии, образуя в пересечении с поперечными окружностями одинаковые углы, отличающиеся от первоначальных прямых углов на угол сдвига  $\gamma$ . Расстояния между поперечными окружностями не изменяются. Можно допустить, что поперечные сечения бруса, плоские и перпендикулярные к продольной оси бруса  $z$ , остаются плоскими, поворачиваясь вокруг продольной оси подобно жестким дискам. Перемещения дисков вдоль оси  $z$  равны нулю ( $w = 0$ ).

Пусть произвольное поперечное сечение на рисунке 19.1 поворачивается на угол  $\varphi(z)$ . Полагая его малым, покажем на рисунке вектор перемещения произвольной точки сечения  $A(x, y)$ , направляя его вдоль перпендикуляра к радиусу – вектору точки  $r(x, y)$ . Величина перемещения

$$\Delta = r\varphi(z) \quad (19.1)$$

и перемещения вдоль осей координат  $x, y$

$$u = \Delta \cos \alpha = (r \cos \alpha) \varphi = y\varphi(z), \quad v = -\Delta \sin \alpha = -x\varphi(z) \quad (19.2)$$

– составляющие перемещения (19.1) пропорциональны расстоянию точки  $A$  от центра тяжести сечения  $C$  – от продольной оси бруса.

Деформации (18.1) находятся дифференцированием перемещений (19.2):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (19.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi(z) - \varphi(z) = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -x\varphi' = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = y\varphi' \quad (19.4)$$

(штрихом помечается дифференцирование по координате  $z$ ).

Подставляя относительные удлинения (19.3) в уравнения закона Гука (18.7), найдем, что нормальных напряжений в поперечных и продольных сечениях нет:  $\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y = 0$ . Подставляя в уравнения (18.7) углы сдвига (19.4), получим касательные напряжения (рис. 19.2) в поперечных и продольных сечениях

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -Gx\varphi', \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = Gy\varphi'. \quad (19.5)$$

Перейдем к дифференциальным уравнениям равновесия (12.3, 12.4), используя в них напряжения (19.5):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 + 0 + Gy\varphi'' = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 + 0 - Gx\varphi'' = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0;$$

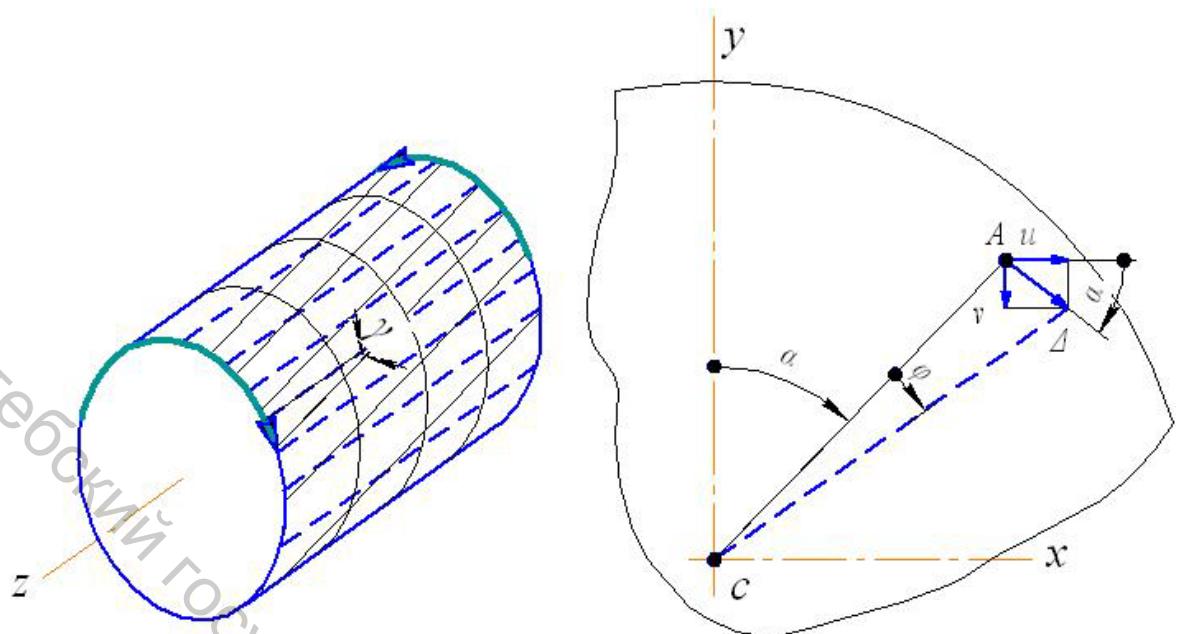


Рисунок 19.1 – Перемещения при повороте сечения

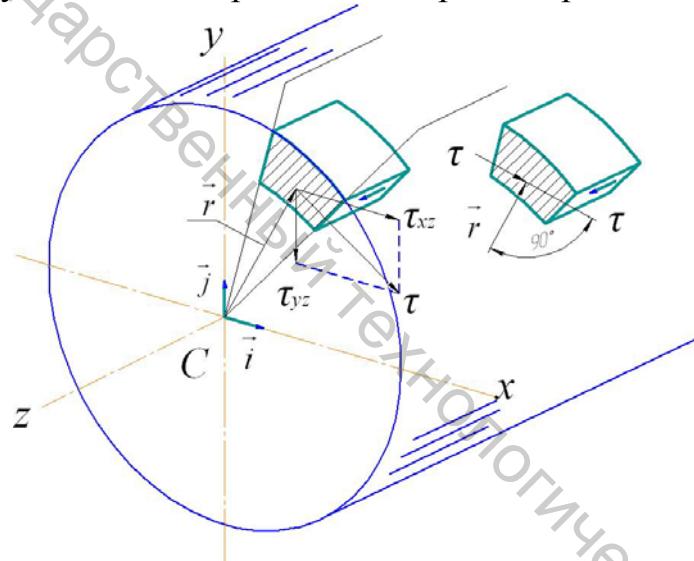


Рисунок 19.2 – Напряженное состояние при кручении – чистый сдвиг

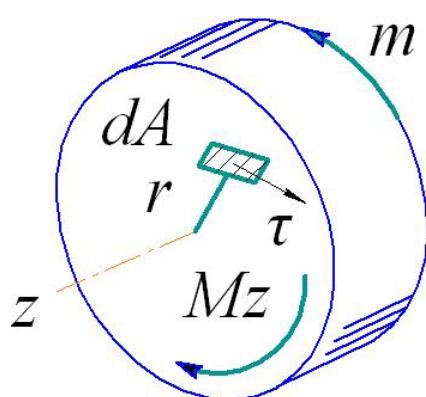


Рисунок 19.3 – Момент  $m$  уравновешивается крутящим моментом  $M_z$

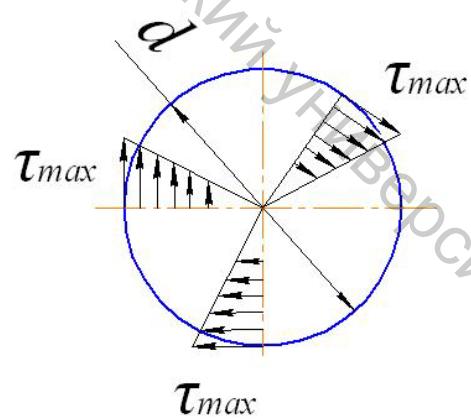


Рисунок 19.4 – Эпюры касательных напряжений

находим

$$\varphi'' = 0, \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dz} = \Theta = \text{const} . \quad (19.6)$$

Величина (19.6) – удельный (погонный) угол закручивания. Касательные напряжения (19.5)

$$\tau_{yz} = -G\Theta x, \tau_{xz} = G\Theta y . \quad (19.7)$$

Найдем угол (рис. 19.2), составляемый суммарным напряжением с составляющими (19.7)

$$\vec{\tau} = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} \quad (19.8)$$

с радиусом – вектором

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} : \quad (19.9)$$

скалярное произведение векторов (19.8, 19.9)

$$\vec{\tau} \cdot \vec{r} = \tau_{xz} x + \tau_{yz} y = G\Theta y x - G\Theta x y = 0 .$$

Следовательно, вектор касательного напряжения (19.8) перпендикулярен радиусу – вектору (19.9). Его величина

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\Theta \sqrt{y^2 + x^2} = G\Theta r \quad (19.10)$$

пропорциональна расстоянию точки, где оно действует, от продольной оси  $z$ . Ему отвечает парное напряжение в продольном аксиальном (проходящем через продольную ось  $z$ ) сечении. Напряженное состояние при кручении – чистый сдвиг (рис. 19.2).

Удельный угол закручивания найдем из краевых условий на торцах бруса (рис. 19.3): закручивающий момент  $m$  уравновешивается крутящим моментом, к которому приводятся касательные силы  $\tau dA$ , действующие в поперечном сечении, близком к торцу:

$$M_z = \int_A (\tau dA) r = m ,$$

или (см. величину (19.10))

$$G\Theta \int_A r^2 dA = m . \quad (19.11)$$

Интеграл в формуле (19.11) – полярный момент инерции круга

$$I_p = \pi d^4 / 32 ; \quad (19.12)$$

искомый удельный угол закручивания (19.6)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \Theta = \frac{m}{GI_p} = \frac{M_z}{GI_p} , \quad (19.13)$$

абсолютный угол закручивания

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GI_p} = \frac{M_z l}{GI_p} = \frac{ml}{GI_p} = \Theta l . \quad (19.14)$$

Касательные напряжения (19.10) (см. формулу (19.13))

$$\tau = G \frac{M_z}{GI_p} r = \frac{M_z}{I_p} r \quad (19.15)$$

распределяются вдоль радиуса сечения по линейному закону (рис. 19.4).

Наибольшие касательные напряжения (19.15)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} r_{\max},$$

полярный момент сопротивления (см. формулу (19.12))

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{\pi d^4 / 32}{d / 2} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (19.16)$$

т. е. наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}. \quad (19.17)$$

Напряжения (19.17) и угол закручивания (19.13) подставляются в условия прочности и жесткости

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \Theta \leq [\Theta] \quad (19.18)$$

( $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение,  $[\Theta]$  – допускаемый удельный угол закручивания). Прочность и жесткость бруса тем выше, чем больше геометрические характеристики прочности и жесткости сечения (19.16) и (19.12).

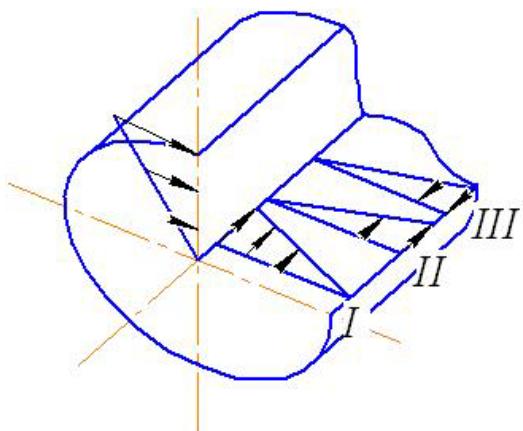
Допускаемые касательные напряжения в условии прочности (19.18) (см. пределы текучести (16.1) и прочности (16.13) при чистом сдвиге)

$$[\tau] = \frac{1}{2} [\sigma], [\tau] = \frac{1}{1+m} [\sigma]_p,$$

где  $[\sigma]$  и  $[\sigma]_p$  – допускаемые напряжения при растяжении – сжатии и при растяжении.

### Тестирование

19.1 Какая из эпюр касательных напряжений, действующих в продольном аксиальном сечении, правильная?



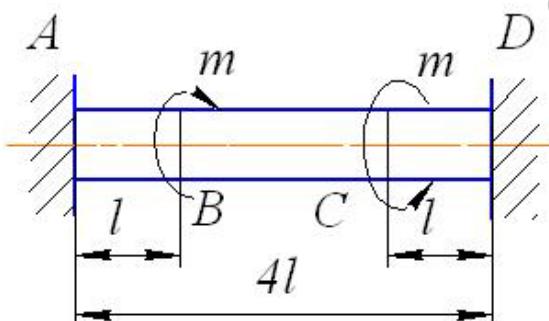
1. Участок  $CD$ .
2. Участок  $BC$ .
3. Величины удельных углов закручивания одинаковы на всех участках.

Варианты ответа

1. Эпюра II.
2. Эпюра I.
3. Эпюра III.

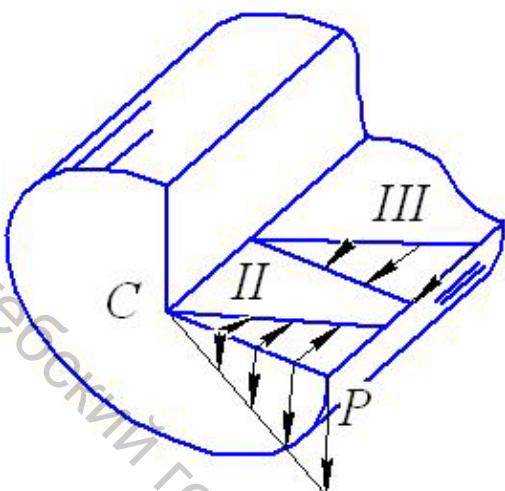
19.2 Какой из участков закрученного статически неопределенного бруса закручен интенсивнее других?

Варианты ответа



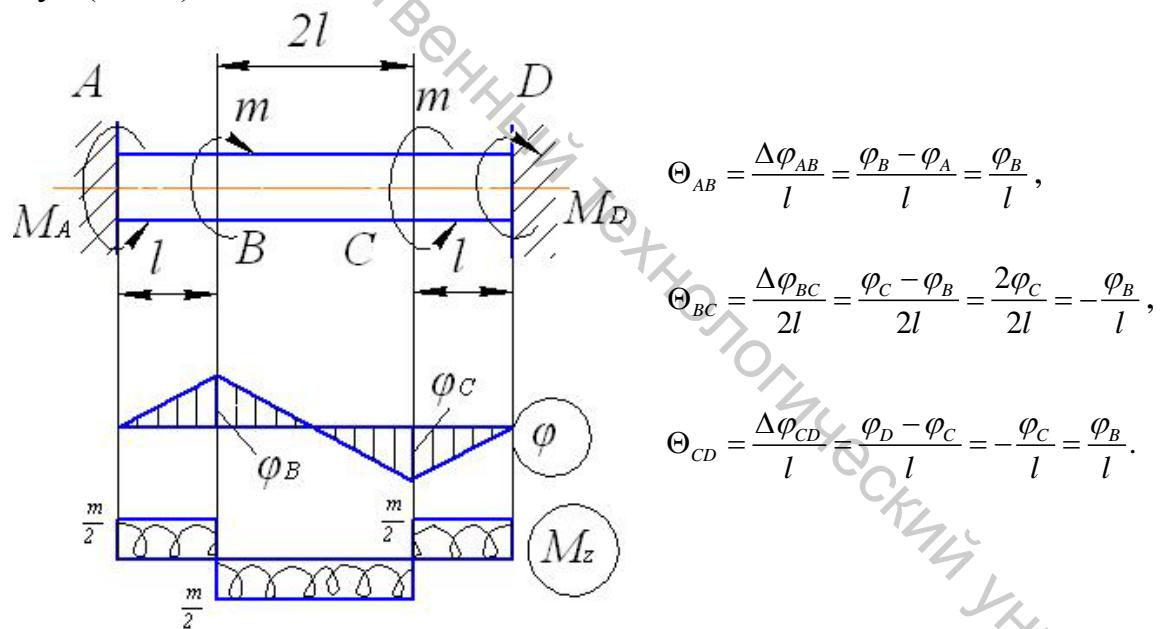
## Комментарии

19.1 Парные касательные напряжения (19.15) в аксиальных се-



чениях должны распределяться вдоль радиусов по линейному закону, нарастая от центра к образующей круглого бруса. Этому требованию удовлетворяют эпюры *II* и *III*, но касательные напряжения *III* не являются парными к тем, которые действуют в поперечном сечении в точках радиуса *CP* (см. рисунок). Верен ответ 1.

19.2 Сечения  $B$  и  $C$  поворачиваются (ввиду симметрии нагружения) на равные углы, но в противоположных направлениях ( $\varphi_c = -\varphi_B$ ) — см. эпюру углов поворота. Углы закручивания (19.6) находятся из формул (19.14):



### Верен ответ 3.

Из формулы (19.13) следует равенство модулей крутящих моментов – см. эпюру  $M_z$ . Реактивные моменты  $M_A$  и  $M_D$  в заделках равны  $m / 2$ .

## 20 Гидродинамическая аналогия в теории кручения

Формула (19.15) для касательных напряжений в круглом поперечном сечении дает в приложении к прямоугольному сечению наибольшее касательное напряжение в точке  $D$ , наиболее удаленной от центра тяжести сечения  $C$ . Но точка  $D$  – вершина выходящего угла, где (рис. 12.2)  $\tau = 0$ . Очевидно, формула (19.15) приложима только к круглому сечению и не пригодна в случае, изображенном на рисунке 20.1. Действительно, формула (19.15) выведена на основе гипотезы плоских сечений, тогда как прямоугольные сечения на рисунке 20.1 искривляются (депланируют), что можно вывести из искривления поперечных рисок, нанесенных на поверхность бруса.

Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении можно представить, используя задачу о стационарном течении потока идеальной невязкой жидкости в границах поперечного сечения бруса в задаче о его свободном кручении. Дифференциальные уравнения обеих задач одинаковы – переменные обеих связаны одинаковыми зависимостями. Говорят, что между переменными обеих задач установлена аналогия. Именно таковы задачи о кручении и течении: аналогичны в них касательные напряжения и скорости потока.

Ясно, в частности, что в границах прямоугольника (рис. 20.1) скорости потока в сечении  $CA$  больше скоростей в большем сечении  $CB$ , – заключаем по аналогии (рис. 20.1): наибольшие касательные напряжения действуют в серединах больших сторон прямоугольника, вторые максимумы действуют в серединах меньших сторон. Формулы для них [2]:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}, \quad \tau' = \gamma \tau_{\max}, \quad (20.1)$$

где момент сопротивления при кручении

$$W_k = \alpha h \hat{a}^2; \quad (20.2)$$

относительный угол закручивания бруса на рисунке 20.1

$$\Theta = \frac{M_z}{GI_k}, \quad (20.3)$$

где крутильная характеристика сечения

$$I_k = \beta h \hat{a}^3, \quad (20.4)$$

$G$  – модуль сдвига, коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  в формулах (20.1, 20.2, 20.4) – функции отношения длин сторон прямоугольника  $h / w$ .

Распределение скоростей по ширине потока в границах тонкой стенки и аналогичное ему распределение касательных напряжений при свободном кручении тонкой стенки показано на рисунке 20.2. Ввиду малости размера  $\delta$  ( $\zeta / \delta \ll 1$ ) распределение напряжений по ширине стенки может считаться линейным, формулы для наибольших касательных напряжений, действующих в точках дуг, ограничивающих стенку, и относительного угла закручивания записываются в виде (20.1, 20.3),

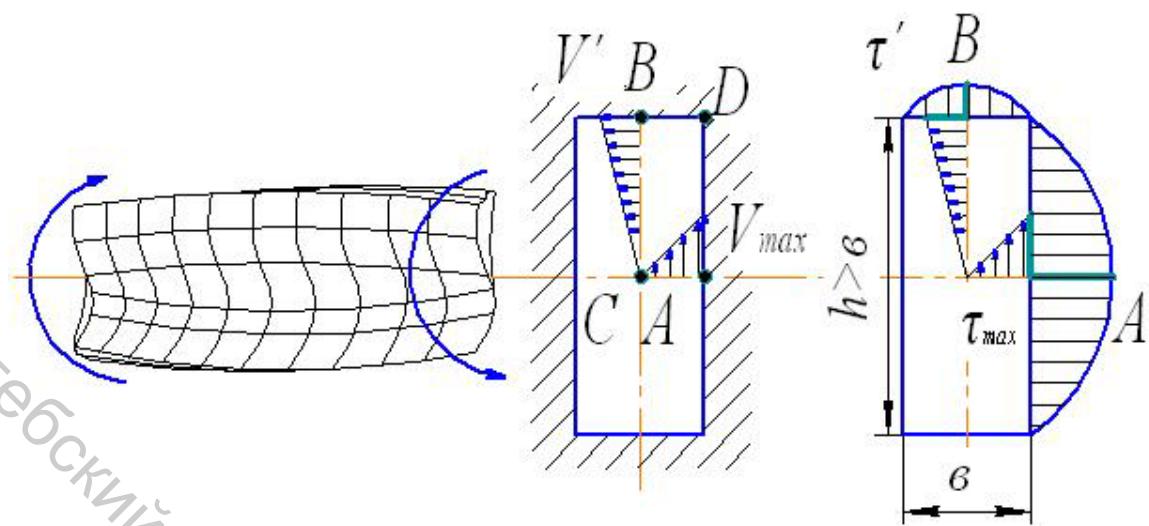


Рисунок 20.1 – Гидродинамическая аналогия в приложении к прямоугольному сечению

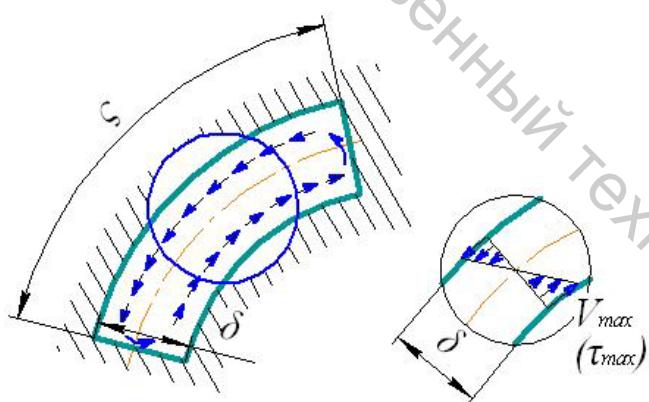


Рисунок 20.2 – Поток в границах тонкой стенки

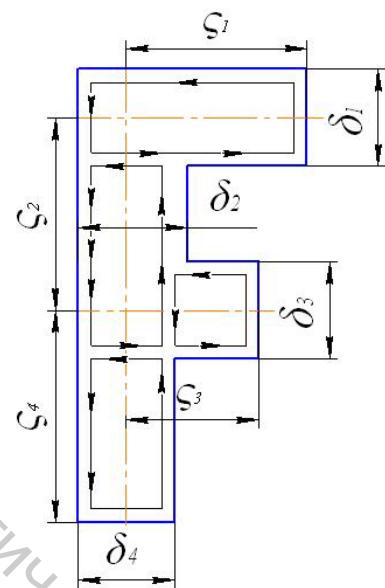


Рисунок 20.3 – Незамкнутое тонкостенное сечение

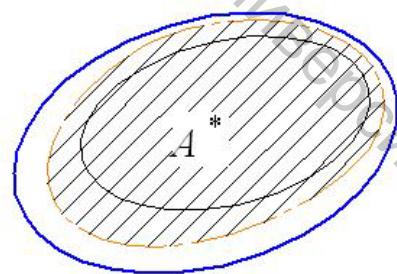
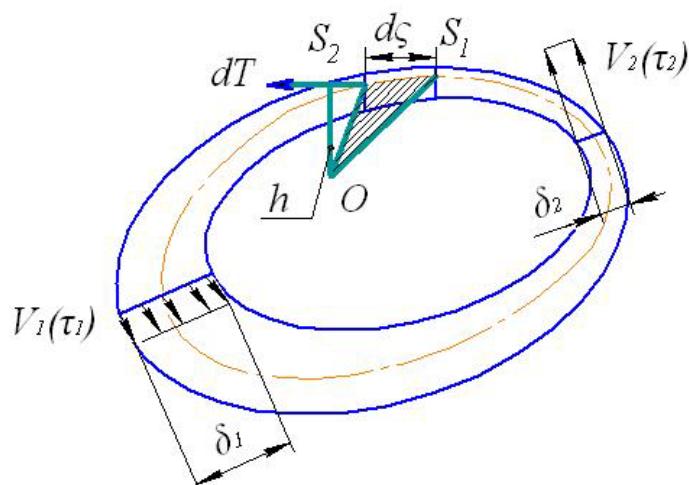


Рисунок 20.4 – Замкнутое тонкостенное сечение

момент сопротивления при кручении и крутильная характеристика – в виде (20.2, 20.4), – с заменой размеров  $h$  и  $b$  на размеры  $\varsigma$  и  $\delta$ , коэффициенты в этих формулах

$$\alpha = \beta \approx 1/3. \quad (20.5)$$

Рассмотрим составное незамкнутое тонкостенное сечение, представленное на рисунке 20.3. Поток в границах сечения может быть разложен на отдельные замкнутые потоки в границах прямоугольных частей сечения: наибольшие касательные напряжения (20.1) в каждой из них и угол закручивания каждой из них (20.3)

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{zi}}{W_{ki}}, \quad \Theta_i = \frac{M_{zi}}{GI_{ki}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20.6)$$

где  $M_{zi}$  – доля крутящего момента  $M_z$ , приходящаяся на  $i$ -ую часть. Все части составного сечения закручиваются совместно:

$$\Theta = \Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \Theta_n,$$

или (см. вторую из формул (20.6))

$$\Theta = \frac{M_{z1}}{GI_{k1}} = \frac{M_{z2}}{GI_{k2}} = \dots = \frac{M_{zi}}{GI_{ki}} = \dots = \frac{M_{zn}}{GI_{kn}}, \quad (20.7)$$

$$\Theta = \frac{M_{z1} + M_{z2} + \dots + M_{zn}}{GI_{k1} + GI_{k2} + \dots + GI_{kn}} = \frac{M_z}{G \sum I_{ki}} \quad (20.8)$$

– крутильная характеристика сечения в целом

$$I_k = \sum I_{ki}. \quad (20.9)$$

Используя угол закручивания (20.8) в ряде отношений (20.7), найдем  $i$ -ую долю крутящего момента

$$M_{zi} = \Theta GI_{ki} = \frac{M_z}{I_k} I_{ki}$$

и наибольшие касательные напряжения (20.6)

$$\tau_{\max i} = \frac{M_z}{I_k} \frac{I_{ki}}{W_{ki}},$$

или (см. формулы (20.2, 20.4) с заменой размеров  $h$ ,  $b$  на размеры  $\varsigma_i$ ,  $\delta_i$  и коэффициенты (20.5))

$$\tau_{\max i} = \frac{M_z}{I_k} \cdot \frac{\frac{1}{3} \varsigma_i \delta_i^3}{\frac{1}{3} \varsigma_i \delta_i^2} = \frac{M_z}{I_k} \delta_i, \quad (20.10)$$

где крутильная характеристика (20.9)

$$I_k = \sum \frac{1}{3} \varsigma_i \delta_i^3. \quad (20.11)$$

Наибольшие касательные напряжения (20.10) в сечении в целом

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_k} \delta_{\max} \quad (20.12)$$

действуют (рис. 20.3) в наиболее широкой части сечения.

В случае замкнутого сечения (рис. 20.4) расходы жидкости через сечения ширинами  $\delta_1$  и  $\delta_2$  одинаковы – в силу непрерывности потока:

$$V_1 \delta_1 = V_2 \delta_2 = \text{const.}$$

Аналогичное соотношение –

$$\tau \delta = \text{const.} \quad (20.13)$$

Касательная сила, действующая на элемент площадью  $\delta ds$ ,

$$dT = \tau(\delta ds),$$

ее момент

$$dM_z = (dT)h = \tau \delta (hds), \quad (20.14)$$

где произведение  $hds$  равно удвоенной площади заштрихованного на рисунке 20.4 бесконечно узкого треугольника. Крутящий момент равен сумме моментов (20.14) – интегралу по площади сечения  $A$ . Вынося за знак интеграла постоянную величину (20.13), получим крутящий момент

$$M_z = \int_A \tau \delta (2i \hat{e} \hat{i} \hat{u} \hat{a} \hat{a} \hat{e} \Delta OS_1 S_2) = 2\tau \delta \int_A i \hat{e} \hat{i} \hat{u} \hat{a} \hat{a} \hat{e} \Delta OS_1 S_2 = 2\tau \delta A^*,$$

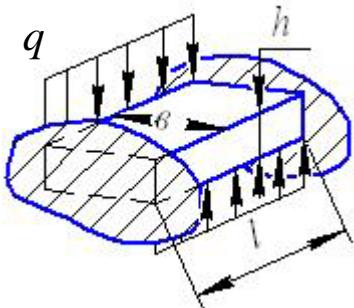
где  $A^*$  – площадь (рис. 20.4), ограниченная средней линией замкнутого профиля. Наибольшее касательное напряжение в замкнутом профиле

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2A^* \delta_{\min}} \quad (20.15)$$

действует в наиболее узком месте профиля.

#### Тестирование

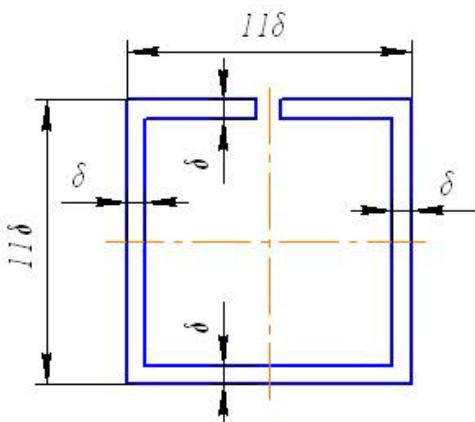
20.1 Как изменятся касательные напряжения в поперечных сечениях и относительный угол закручивания бруса на рисунке, если нагрузка на брус и все его размеры увеличатся вдвое?



Варианты ответа

- Напряжения (20.1) и угол закручивания (20.3) не изменяются.
- Напряжения (20.1) и угол закручивания (20.3) уменьшаются.
- Напряжения (20.1) не изменяются, а угол закручивания уменьшится.

20.2 Как изменятся касательные напряжения (20.12), действующие в незамкнутом сечении, показанном на рисунке, если края разреза соединить, делая профиль замкнутым?

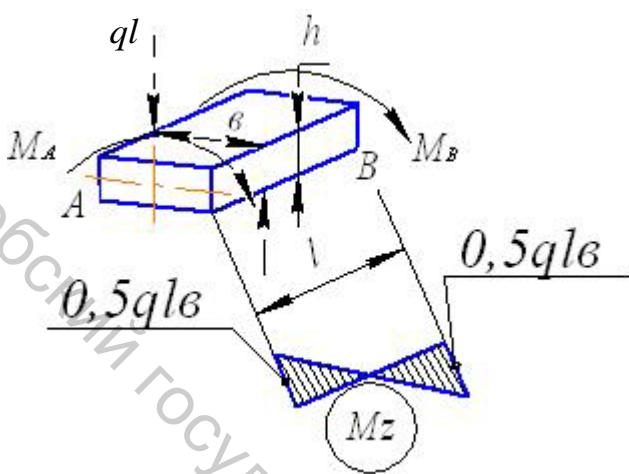


Варианты ответа

- Касательные напряжения (20.15) равны напряжениям (20.12).
- Касательные напряжения (20.15) меньше напряжений (20.12).
- Касательные напряжения (20.15) больше напряжений (20.12).

### Комментарии

20.1 Равномерно распределенные нагрузки на краях бруса приводятся к равнодействующим  $ql$ , составляющим пару с моментом  $ql\delta$ . Реактивные моменты в заделках  $A$  и  $B$



$$M_A = M_B = \frac{1}{2}ql\hat{a}.$$

Наибольшие касательные напряжения (20.1) в заделках бруса с моментом сопротивления (20.2)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \frac{ql\hat{a}}{\alpha\hat{a}h^2} = \frac{1}{2} \frac{ql}{\alpha h^2} \quad (20.16)$$

(здесь большая из сторон прямоугольника сторона  $\hat{a}$ ). Крутильная характеристика бруса (20.4)

$$I_k = \beta\hat{a}h^3,$$

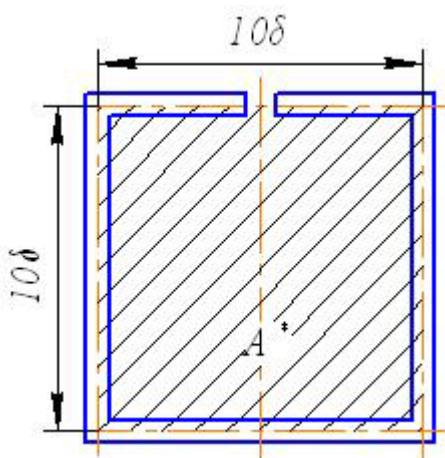
наибольший угол закручивания (20.3)

$$\Theta = \frac{1}{2} \frac{ql\hat{a}}{\beta\hat{a}h^3} = \frac{1}{2} \frac{ql}{\beta h^3}. \quad (20.17)$$

При удвоении размеров  $\hat{a}$  и  $h$  и интенсивности нагрузки  $q$  напряжения  $\tau_{\max}$  (20.16) не изменяются, а угол закручивания  $\Theta$  (20.17) уменьшится вдвое. Верен ответ 3.

В формулах (20.16, 20.17) размера  $h$  нет. Можно подумать, что этот размер произволен. Это не так. Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от отношения размеров  $\hat{a}$  и  $h$ , и только при их совместном удвоении это отношение не изменится.

20.2 В заданном варианте сечение не замкнуто, его крутильная характеристика (20.11)



$$I_k = \frac{1}{3} (2 \cdot 10\delta + 2 \cdot 10\delta) \delta^3 = \frac{40}{3} \delta^4,$$

наибольшие касательные напряжения (20.12)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\frac{40}{3} \delta^4} \delta = \frac{3}{40} \frac{M_z}{\delta^3}. \quad (20.18)$$

В варианте замкнутого сечения площадь, ограниченная средней линией профиля:

$$A^* = 10\delta \cdot 10\delta = 100\delta^2,$$

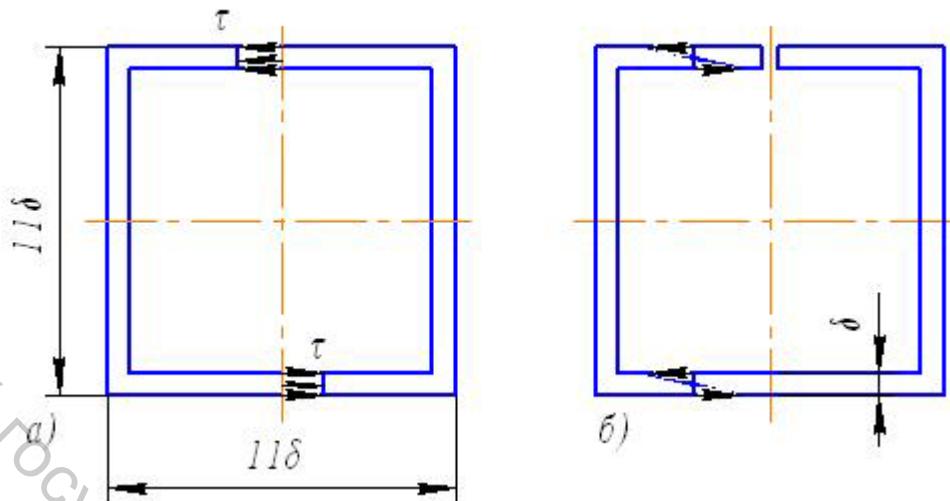
Наибольшие касательные напряжения (20.15)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2 \cdot 100\delta^2 \delta} = \frac{1}{200} \frac{M_z}{\delta^3} \quad (20.19)$$

уменьшаются по сравнению с напряжениями (20.18) в

$$\frac{3}{40} : \frac{1}{200} = 15 \text{ раз.} \quad (20.20)$$

Верен ответ 2.



Этот результат становится вполне очевидным, если увидеть, что скручивающие моменты на рисунке 20.5 уравновешиваются в случае *a*) парами с плечами порядка размера сечения в целом, а в случае *b*) – парами с плечами порядка ширины профиля  $\delta$ . Соответственно, силы пар в случае *a*) меньше сил пар в случае *b*) примерно в 11 раз. Число это тоже порядка, что результат (20.20).

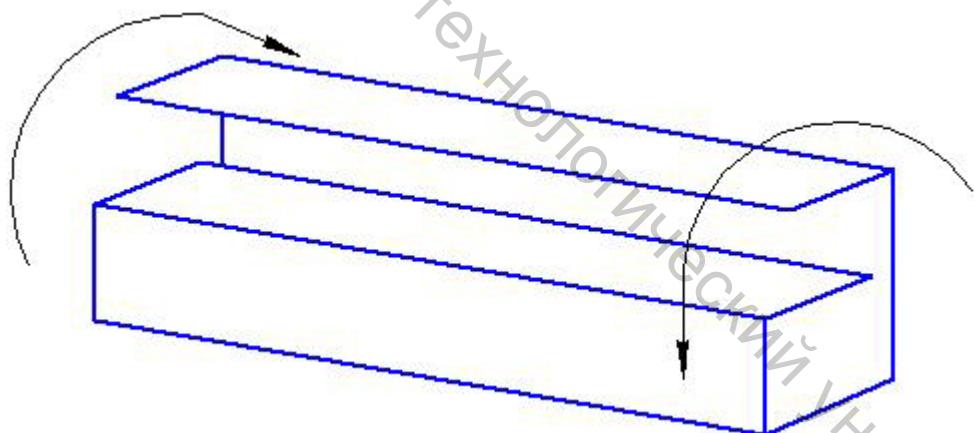


Рисунок 20.5 – Депланация сечений при свободном кручении

В случае *b*) поперечные сечения, смещаясь относительно друг друга, «выходят» из своих плоскостей – депланируют. Переход к замкнутому профилю ограничивает депланацию, что сопровождается снижением напряжений.

## 21 Теорема о взаимности работ

Положим, что перемещения точек тела (рис. 21.1) под нагрузкой намного меньше первоначальных размеров тела. В этом случае изменениями первоначальных размеров тела и его формы можно пренебречь и считать, что взаимное расположение точек  $A$  и  $B$  остается неизменным. Если в дополнение к этому принципу первоначальных размеров положить, что материал тела подчиняется закону Гука, найдем, что величина проекции перемещения  $\vec{\lambda}_{A1}$  произвольной точки  $B$  на ось  $x$  под действием силы  $\vec{F}_1$  пропорциональна величине силы:

$$\Delta_{B1} = \delta_{B1} F_1. \quad (21.1)$$

При разгрузке до нуля перемещение (21.1) исчезает.

Поскольку взаимное расположение точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  считается неизменяющимся, перемещение точки  $B$  от силы  $\vec{F}_2$  (рис. 21.1) определяется формулой

$$\Delta_{B2} = \delta_{B2} F_2, \quad (21.2)$$

т. е. перемещение (21.2) не зависит от того, приложена сила  $\vec{F}_1$  к телу или нет. Следовательно, перемещения при наличии обеих сил (рис. 21.1)

$$\vec{\lambda}_B = \vec{\lambda}_{B1} + \vec{\lambda}_{B2},$$

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} = \delta_{B1} F_1 + \delta_{B2} F_2 \quad (21.3)$$

равны суммам перемещений (21.1) и (21.2), что легко обобщается на случай произвольного числа сил: перемещение от группы сил равно сумме перемещений от каждой из сил в отдельности (принцип независимости действия сил).

Работа сил, действующих на тело, на перемещениях их точек приложения «расходуется» на создание запаса потенциальной энергии упругих деформаций и на кинетическую энергию частиц тела, приходящих в движение. Если, однако, нагружение тела производится достаточно медленно (статически), второй энергией можно пренебречь по сравнению с первой и считать, что работа сил, приложенных к телу, равна потенциальной энергии упругих деформаций.

Нагрузим статически балку (рис. 21.2), подчиняющуюся закону (21.3), – линейно, упругую балку – силами  $F_1$  и  $F_2$ . Перемещения их точек приложения в направлениях сил

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}, \quad (21.4)$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22};$$

$$\Delta_{11} = \delta_{11} F_1, \quad \Delta_{22} = \delta_{22} F_2, \quad (21.5)$$

$$\Delta_{12} = \delta_{12} F_2, \quad \Delta_{21} = \delta_{21} F_1.$$

Перемещение  $\Delta_{ik}$  в формулах (21.4) – перемещение точки приложения силы  $F_i$  от силы  $F_k$ ,  $\delta_{ik}$  в формулах (21.5) – единичные (от единичных сил) перемещения.

Произведем нагружение балки на рисунке 21.2 в два этапа. На первом этапе балка нагружается силой  $F_1$ . График первой из линейных

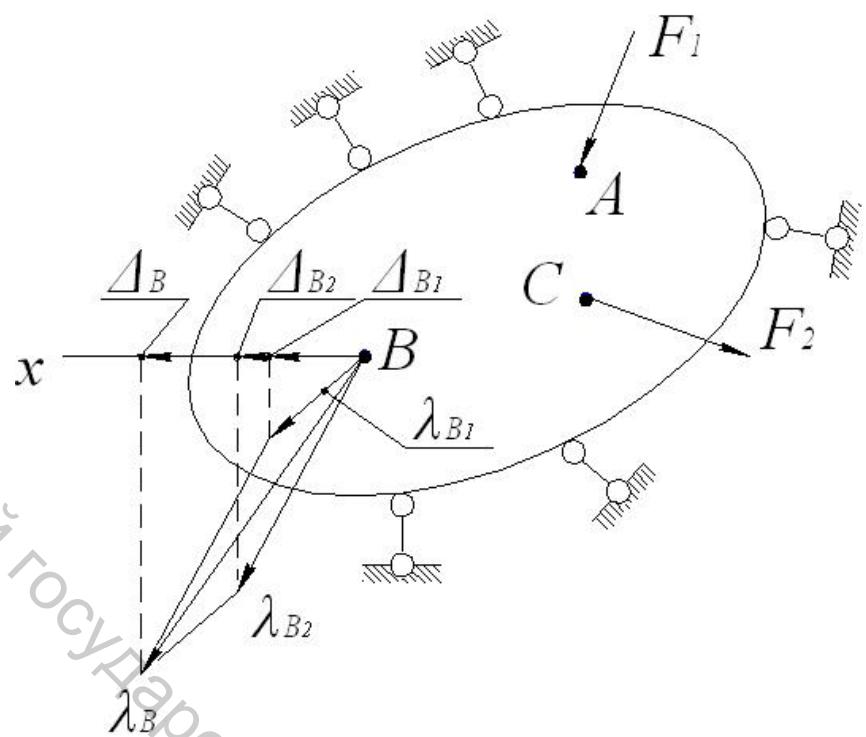


Рисунок 21.1 – Принцип независимости действия сил

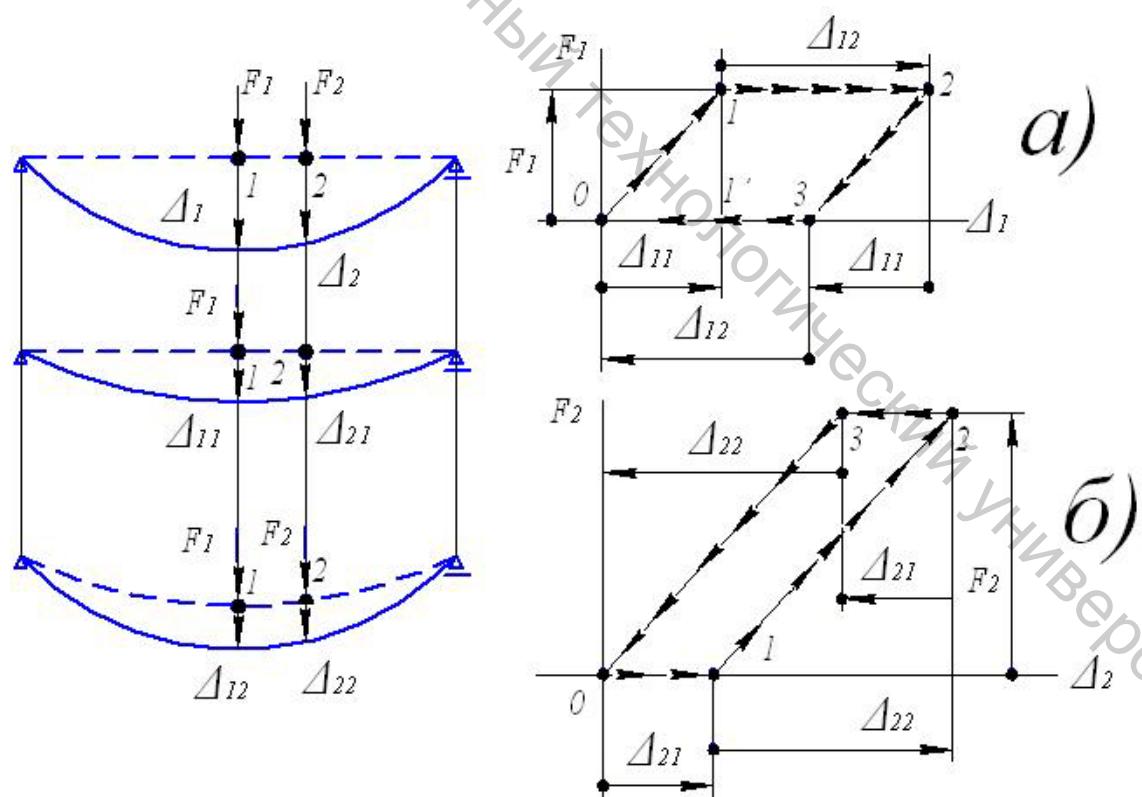


Рисунок 21.2 – Теорема о взаимности работ

зависимостей (21.5) показан на рисунке 21.2 *а*) прямой 0 – 1; сила  $F_2 = 0$  – соответствующий график на рисунке 21.2 *б*) – прямая 0 – 1. Работа силы  $F_1$

$$A_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} \quad (21.6)$$

равна площади  $\Delta 011'$ . На втором этапе к силе  $F_1$  добавляется сила  $F_2$ . Соответствующие графики на рисунках 21.2 *а*) и 21.2 *б*) – прямые 1 – 2. Работа на втором этапе

$$A_2 = F_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}. \quad (21.7)$$

Произведем разгрузку балки в том же порядке: соответствующие графики на рисунках 21.2 *а*) и 21.2 *б*) – прямые 2 – 3 и 3 – 0.

Работы сил  $F_1$  и  $F_2$  за два этапа нагружения и за два этапа разгрузки равны площадям параллелограммов на рисунках 21.2 *а*) и 21.2 *б*). Их сумма равна потенциальной энергии упругих деформаций в результате нагружения – разгрузки равна нулю:  $F_1 \cdot \Delta_{12} - F_2 \cdot \Delta_{21} = 0$ , откуда следует теорема о взаимности работ

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}, \quad (21.8)$$

при  $F_1 = F_2$  – принцип взаимности перемещений: перемещение точки приложения силы  $F_1$  (в направлении силы  $F_1$ ) от силы  $F_2$ , равной силе  $F_1$ , равно перемещению точки приложения силы  $F_2$  (в направлении силы  $F_2$ ) от силы  $F_1$ .

Работа за два этапа нагружения равна сумме работ (21.6) и (21.7)

$$A = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + F_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}. \quad (21.9)$$

Используем в сумме (21.9) теорему (21.8):

$$A = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{21} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} F_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22}),$$

или (см. формулы (21.4))

$$A = \frac{1}{2} F_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \Delta_2. \quad (21.10)$$

Обобщим формулу (21.10) на случай произвольного числа сил:

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i \Delta_i. \quad (21.11)$$

Заметим, что работы в сумме (21.11) следует рассматривать как работы обобщенных сил на соответствующих обобщенных перемещениях: работа пары сил, например, равна произведению ее момента на соответствующий угол поворота.

Глядя на формулу (21.11), можно счесть, что работа группы сил равна сумме работ от каждой из сил в отдельности. Подставим, например, в сумму (21.10) перемещения (21.4, 21.5): работа

$$A = \frac{1}{2} F_1 (\delta_{11} F_1 + \delta_{12} F_2) + \frac{1}{2} F_2 (\delta_{21} F_1 + \delta_{22} F_2) = \frac{1}{2} \delta_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} (\delta_{12} + \delta_{21}) F_1 F_2 + \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2$$

Работа же, найденная как сумма работ от каждой из сил в отдельности

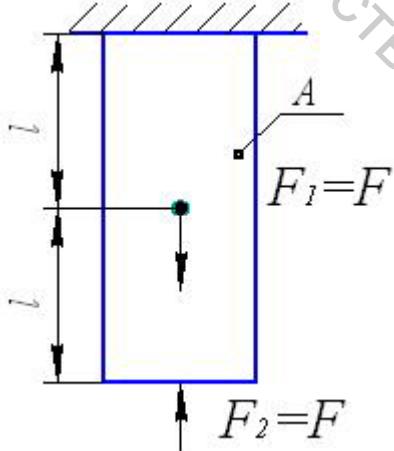
$$A = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} \delta_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2.$$

Как видим, принцип независимости действия не распространяется на работу (и на равную работе потенциальную энергию упругих деформаций). Перемещения  $\Delta_i$  в сумме (21.11) находятся не только от сил  $F_i$ , а от всех сил  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Умев теперь вычислять работу сил, действующих на линейно-упругое тело, сформулируем обобщенную теорему о взаимности работ: работа одной из двух групп сил, на перемещениях, вызванных силами другой группы, равна работе другой группы сил на перемещениях, вызванных силами первой группы.

### Тестирование

21.1 Какое из выражений работы двух сил, растягивающих – сжимающих стержень, верное?



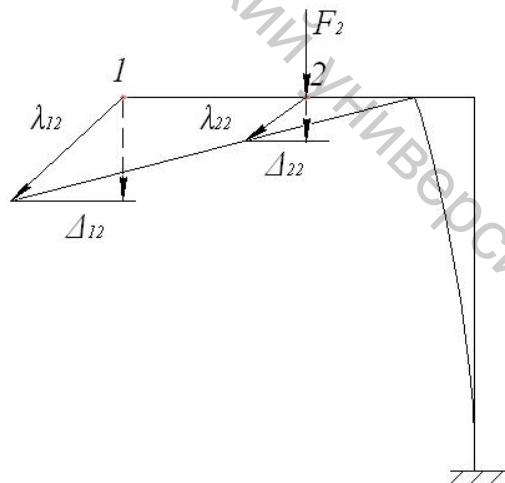
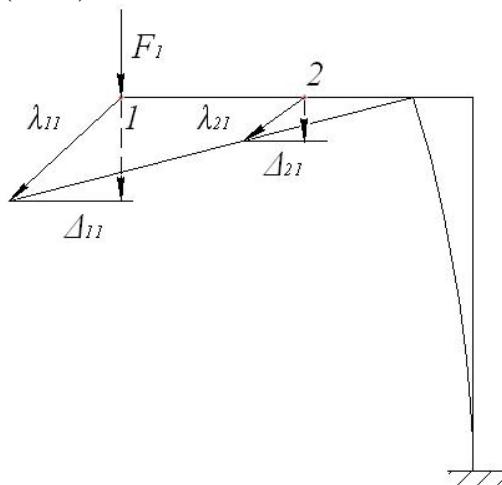
Варианты ответа

$$1. A = \frac{1}{2} F_1 \frac{F_1 l}{EA} - F_1 \frac{F_2 l}{EA} + \frac{1}{2} F_2 \frac{F_2 \cdot 2l}{EA}.$$

$$2. A = \frac{1}{2} F_1 \frac{F_1 l}{EA} + \frac{1}{2} F_2 \frac{F_2 \cdot 2l}{EA}.$$

$$3. A = \frac{1}{2} F_1 \left( \frac{F_1 l}{EA} - \frac{F_2 l}{EA} \right) + \frac{1}{2} F_2 \left( \frac{F_2 \cdot 2l}{EA} - \frac{F_1 l}{EA} \right).$$

21.2 Какое из равенств представляет теорему о взаимности работ (21.8)?

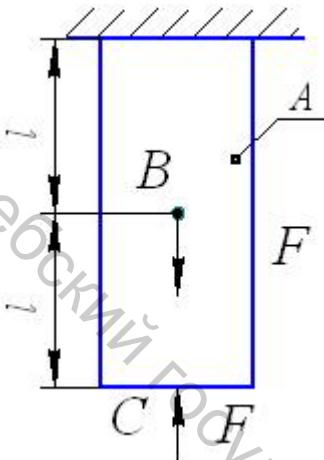


Варианты ответа

$$1. F_1 \lambda_{12} = F_2 \lambda_{21}. \quad 2. F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}. \quad 3. F_1 \Delta_{21} = F_2 \Delta_{12}.$$

### Комментарии

21.1 Искомую работу можно найти, замечая, что силы  $F_1$  и  $F_2$ , равные по величине, противоположные по направлению, образуют обобщенную силу, совершающую работу на укорочении участка  $BC$ :



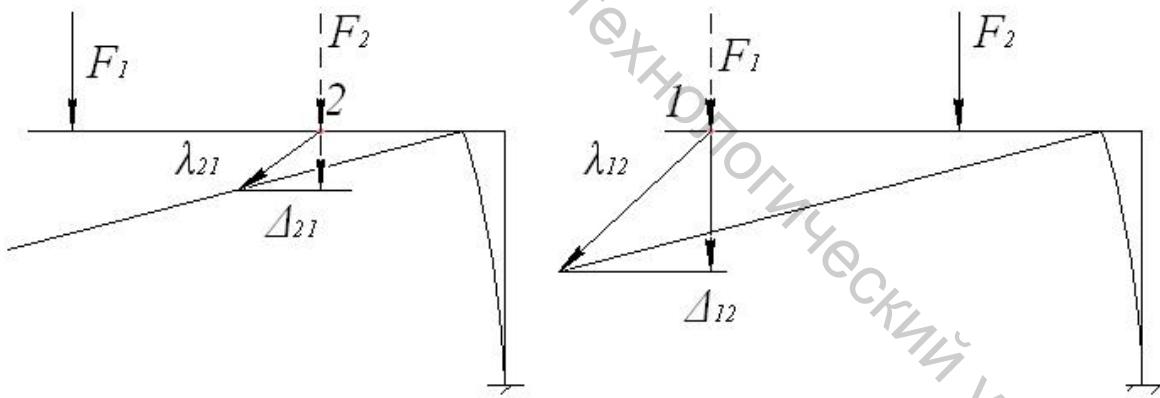
$$A = \frac{1}{2} F \Delta l_{BC} = \frac{1}{2} F \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} F^2 \frac{l}{EA}.$$

Подставляя значения  $F_1 = F$ ,  $F_2 = F$  в выражения 1, 2 и 3, получим:

$$1. A = \frac{1}{2} F^2 \frac{l}{EA}. \quad 2. A = \frac{3}{2} F^2 \frac{l}{EA}. \quad 3. \frac{1}{2} F^2 \frac{l}{EA}.$$

Верны выражения 1 и 3. Первое составлено на основе выражения (21.9) для работы двух сил на двух этапах нагружения, первый из которых – нагружение силой  $F_1$ . Третье составлено на основе теоремы (21.11).

21.2 В первом из равенств используются величины перемещений точек



1 и 2, направления которых не совпадают с направлениями сил, – работы в равенстве 1 вычислены неправильно. Перемещение  $\Delta_{21}$  в равенстве 3 – перемещение точки 2, а используется в формуле для работы силы  $F_1$ , приложенной в точке 1; перемещение  $\Delta_{12}$  – перемещение точки 1, а используется в формуле для работы силы  $F_2$ . Верно только равенство 2.

## 22 Удельная потенциальная энергия упругих деформаций

Упругие деформации изотропного тела определяются обобщенным законом Гука (18.7), согласно которому удлинения ребер элемента на рисунке 22.1 определяются только нормальными напряжениями, а углы сдвига в координатных плоскостях – только касательными напряжениями, действующими в тех же плоскостях. Работа, например, нормальной силы  $\sigma_x dy dz$  равна половине ее произведения на удлинение элемента  $\varepsilon_x dx$ ; работа касательной силы  $\tau_{zx} dy dz$  – половине ее произведения на перемещение  $\gamma_{zx} dx$ . Действительно, интересуясь деформациями элемента, мы рассматриваем перемещения одних его граней относительно других, параллельных первым, принимаемых за неподвижные. На рисунке 22.1 показаны напряжения на гранях элемента и его деформации. В случае сдвига одна из граней (правая) принимается за неподвижную. Перемещение левой грани –  $\gamma_{zx} dx$ . Касательные силы на горизонтальных площадках перпендикулярны перемещениям их точек. Их вклад в работу касательных сил равен нулю.

Работа (21.11) всех нормальных и касательных сил, деформирующих элемент:

$$dA = \frac{1}{2}(\sigma_x dy dz) \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}(\sigma_y dx dz) \varepsilon_y dy + \frac{1}{2}(\sigma_z dx dy) \varepsilon_z dz + \\ + \frac{1}{2}(\tau_{xy} dx dz) \gamma_{xy} dy + \frac{1}{2}(\tau_{yz} dx dy) \gamma_{yz} dz + \frac{1}{2}(\tau_{zx} dy dz) \gamma_{zx} dx + \\ + \left( \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dx dy dz. \quad (22.1)$$

Работа (22.1) равна потенциальной энергии упругих деформаций  $dU$ . Энергия, отнесенная к единице объема  $dV = dx dy dz$ , – удельная энергия

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (22.2)$$

Используя в формуле (22.2) обобщенный закон Гука (18.7), выразим энергию (22.2) через напряжения:

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} + \frac{\tau_{yz}^2}{2G} + \frac{\tau_{zx}^2}{2G}, \quad (22.3)$$

где  $E$  и  $\mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $G$  – модуль сдвига изотропного материала.

Энергия (22.3) – инвариант напряженного состояния (не зависит от способа его задания). В случае задания напряженного состояния главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  энергия (22.3)

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \quad (22.4)$$

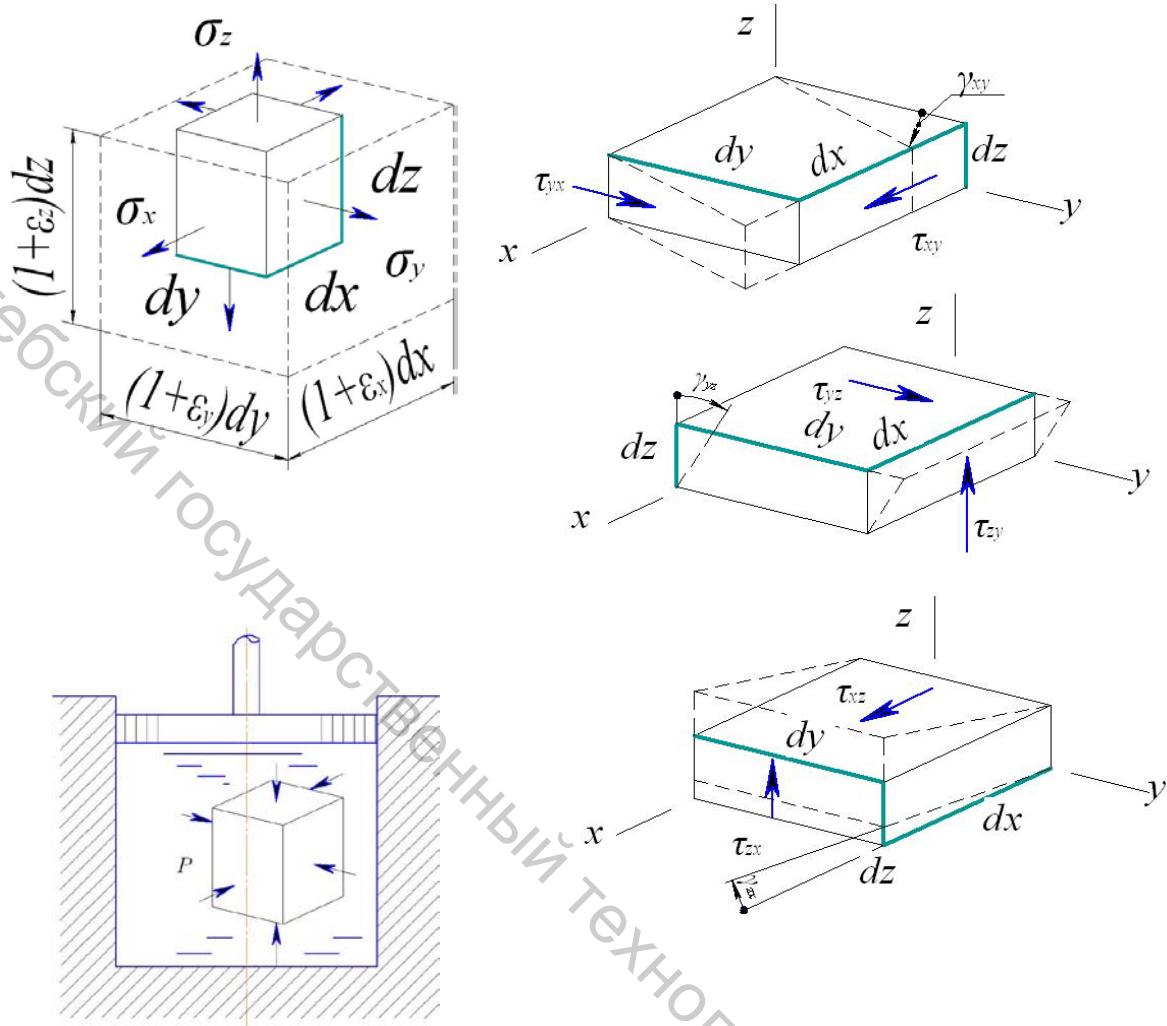


Рисунок 22.2 – Опыт Бриджмена

Рисунок 22.1 – Деформации изотропного тела

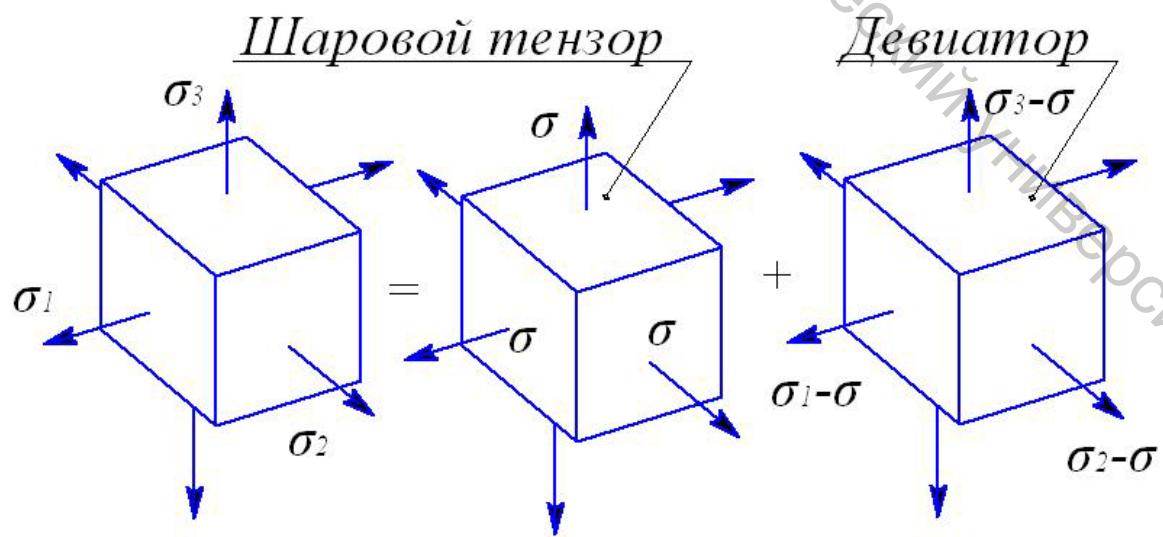


Рисунок 22.3 – Разложение напряженного состояния

По одной из энергетических гипотез прочности текучесть изотропного материала наступает тогда, когда энергия (22.4) достигает предельного значения, не зависящего от вида напряженного состояния, зависящего только от свойств материала. Условие наступления текучести

$$u = u_T. \quad (22.5)$$

Предельное значение в условии (22.5) можно найти в предельном линейном напряженном состоянии ( $\sigma_1 = \sigma_T$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ):

$$u_T = \frac{1}{2E} \sigma_T^2. \quad (22.6)$$

Подставляя предельное значение (22.6) энергии (22.4) в условие (22.5), найдем эквивалентное нормальное напряжение в сформулированной гипотезе:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T. \quad (22.7)$$

Эквивалентное напряжение в условии (22.7) определяется всеми тремя главными напряжениями, тем самым недостаток гипотез Сен – Венана и Мора (16.4), (16.12), состоявший в неучете минимакса  $\sigma_2$ , устраняется.

В опыте Бриджмена (рис. 22.2) образец – кубик материала помещался под поршень гидравлического цилиндра. Напряженное состояние кубика ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ) – шаровой тензор. Эквивалентное напряжение в условии (22.7)

$$\sigma_{\text{экв}} = p\sqrt{3(1-2\mu)}$$

намного превысило в опыте предел текучести, следы текучести при этом не наблюдались. Энергетическая гипотеза, использующая энергию (22.4), оказалась несостоятельной.

Объяснение: в опыте Бриджмена изменялся только объем образца, форма его не изменялась. Энергетическая гипотеза Губера – Мизеса – Генки связала наступление текучести именно с этим, учитя в гипотезе только ту часть энергии (22.4), которая запасается в единице объема материала при изменении ее формы (и только формы!).

Разложим напряженное состояние на рисунке 22.3 на шаровой тензор и девиатор. В первом случае форма элемента на рисунке не изменяется – изменяется (как и в опыте (рис. 22.2) Бриджмена) только его объем. Объемная деформация (18.12) во втором случае

$$\Theta_a = \frac{(\sigma_1 - \sigma) + (\sigma_2 - \sigma) + (\sigma_3 - \sigma)}{3K} = 0 \quad (22.8)$$

( $K$  – объемный модуль упругости), откуда напряжение шарового тензора

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (22.9)$$

Удельная работа нормальных сил шарового тензора 1 (первая группа сил) на удлинениях девиатора 2 (перемещения от второй группы сил)

$$a = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_{1\hat{a}} + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_{2\hat{a}} + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_{3\hat{a}} = \frac{1}{2} \sigma \Theta_{\hat{a}} = 0,$$

ибо относительная объемная деформация (22.8) в девиаторе равна нулю. Используя обобщенную теорему о взаимности работ, заключаем, что и вторая работа сил девиатора 2 на перемещениях шарового тензора 1 равна нулю. Следовательно, удельная потенциальная энергия деформаций (22.4) в заданном напряженном состоянии, равная удельной работе заданных нормальных сил, представляется суммой энергий: энергии изменения объема в шаровом тензоре

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 - 2\mu(\sigma\sigma + \sigma\sigma + \sigma\sigma)] = \frac{3\sigma^2}{2E}(1-2\mu), \quad (22.10)$$

где напряжение шарового тензора  $\sigma$  дается выражением (22.9), и энергии изменения формы:

$$u = u_0 + u_{\hat{a}},$$

откуда энергия изменения формы

$$u_{\hat{a}} = u - u_0.$$

Вычитая из энергии (22.4) энергию (22.10), найдем:

$$u_{\hat{a}} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (22.11)$$

Предельное значение энергии (22.11)

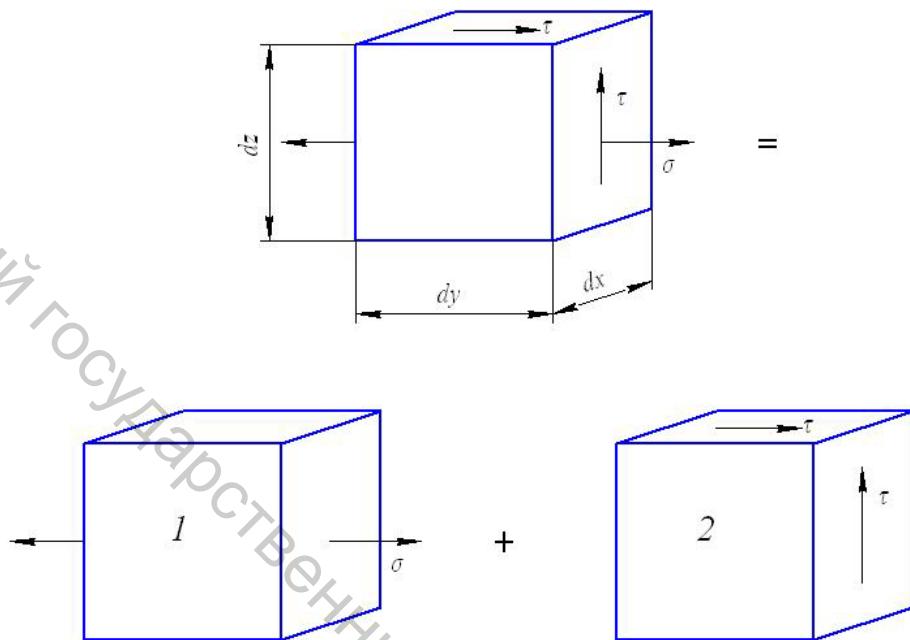
$$u_{\hat{a}\hat{a}} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2. \quad (22.12)$$

Подстановка предельного значения (22.12) в условие наступления текучести  $u_{\hat{a}} = u_{\hat{a}\hat{a}}$  дает выражение эквивалентного напряжения в гипотезе Губера – Мизеса – Генки:

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{E}\hat{C}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T. \quad (22.13)$$

### Тестирование

22.1 На рисунке показано разложение упрощенного плоского напряженного состояния (УПНС) на линейное 1 и чистый сдвиг 2. Каковы изменения объема и формы в напряженном состоянии 1?



Варианты ответа

1. Объем изменяется, форма не изменяется.
2. Объем не изменяется, форма изменяется.
3. Объем изменяется, форма изменяется.

22.2 Пределы текучести при растяжении и сдвиге хромоникель-вольфрамовой стали 25ХНВА [3]  $\sigma_T = 95 \text{ кН/см}^2$ ,  $\tau_T = 60 \text{ кН/см}^2$ . Какая из гипотез прочности – гипотеза Треска – Сен – Венана или гипотеза Губера – Мизеса – Генки – дает лучшую оценку предела текучести при сдвиге?

Варианты ответа

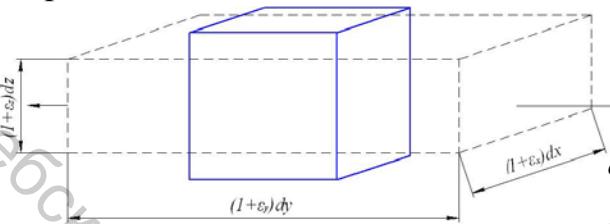
1. Гипотеза Треска – Сен – Венана.
2. Гипотеза Губера – Мизеса – Генки.
3. Обе оценки удовлетворительны.

## Комментарии

22.1 Объемная деформация элемента в линейном напряженном состоянии 1 (18.12)

$$\Theta_1 = \frac{\sigma + 0 + 0}{3K} = \frac{\sigma}{3K} \neq 0.$$

Форма элемента не изменяется, если все его ребра удлиняются (укорачиваются) в одно и то же число раз. Длины ребер элемента после деформации



$$\begin{aligned} dx + \Delta(dx) &= (1 + \varepsilon_x)dx, \\ dy + \Delta(dy) &= (1 + \varepsilon_y)dy, \\ dz + \Delta(dz) &= (1 + \varepsilon_z)dz. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Относительные удлинения в формулах (22.14) находятся из обобщенного закона Гука (18.7):

$$\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma}{E}.$$

Нетрудно видеть, что отношения длин (22.14) к первоначальным длинам различны. Верен ответ 3. Ответ 1 будет верным, если заданное УПНС разложить на шаровой тензор и девиатор (рис. 22.3, 22.4):

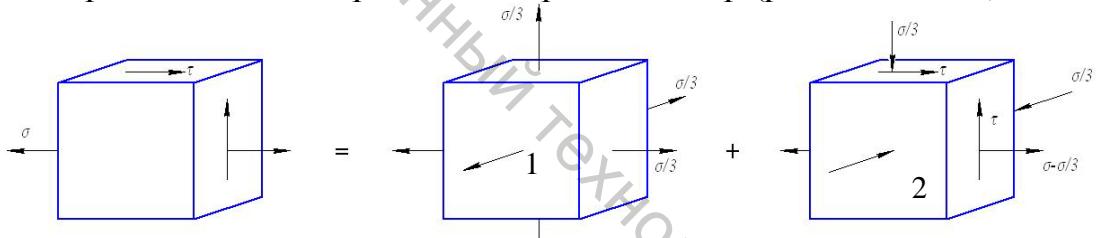


Рисунок 22.4 – Разложение УПНС на шаровой тензор и девиатор

22.2 Эквивалентное напряжение по Треска – Сен – Венану (16.4) при чистом сдвиге ( $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ )

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{C-B} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau,$$

эквивалентное напряжение по Губеру – Мизесу – Генки (22.13)

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}^{\hat{E}\hat{C}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 - \tau(-\tau)} = \sqrt{3}\tau.$$

Подставляя найденные эквивалентные напряжения в условие наступления текучести

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}} = \sigma_T,$$

найдем пределы текучести при сдвиге

$$\tau_T^{C-B} = \frac{1}{2} \sigma_T = 0,5 \cdot 95 = 42,5 \text{ кН/см}^2,$$

$$\tau_T^{\hat{E}\hat{C}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T = 0,58 \cdot 95 = 55 \text{ кН/см}^2.$$

Верен ответ 2.

### 23 Потенциальная энергия упругих деформаций бруса

В общем случае сложного сопротивления бруса в его поперечных сечениях действуют (рис. 23.1) все шесть внутренних силовых факторов. Пренебрегая [3] работами касательных и поперечных сил при сдвигах, возникающих (см. лекцию 12) при изгибе, рассмотрим упрощенное плоское напряженное состояние, показанное на рисунке 23.2. Нормальные напряжения на поперечных площадках элемента (рис. 23.2), совпадающих с плоскостями поперечных сечений, находятся по формуле (5.4)

$$\sigma = \frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x; \quad (23.1)$$

касательные напряжения (19.15) при кручении, например, круглого бруса

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho, \quad (23.2)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  $I_x, I_y$  – главные центральные моменты инерции площади сечения;  $I_p$  – полярный момент инерции;  $x, y, \rho$  – координаты и радиус – вектор точки с окрестностью – элементом на рисунке 23.2;  $N_z, M_x, M_y, M_z$  – продольная сила, изгибающие и крутящий момент в поперечном сечении бруса.

Удельная потенциальная энергия упругих деформаций (22.2) в случае УПНС (рис. 23.2) примет вид

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \quad (23.3)$$

( $E$  и  $G$  – модуль Юнга и модуль сдвига материала бруса). Потенциальная энергия упругих деформаций бесконечно короткого фрагмента бруса объемом  $dAdz$

$$dU = \int_A u (dAdz) = \left[ \int_A u dA \right] dz, \quad (23.4)$$

где  $dAdz$  – объем элемента на рисунке 23.2. Подставляя в удельную энергию (23.3) напряжения (23.1, 23.2) и используя ее в формуле (23.4), найдем

$$dU = \frac{N_z^2 dz}{2EA} + \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \frac{M_z^2 dz}{2GI_p} \quad (23.5)$$

(статические моменты  $S_x = \int_A y dA$ ,  $S_y = \int_A x dA$  и центробежный момент инерции  $I_{xy} = \int_A xy dA$  относительно главных центральных осей  $x$  и  $y$  равны нулю).

Потенциальная энергия упругих деформаций бруса произвольного сечения получается интегрированием выражения (23.5) по его длине  $L$  (с заменой полярного момента инерции  $I_p$  на крутильную характеристику  $I_k$ ):

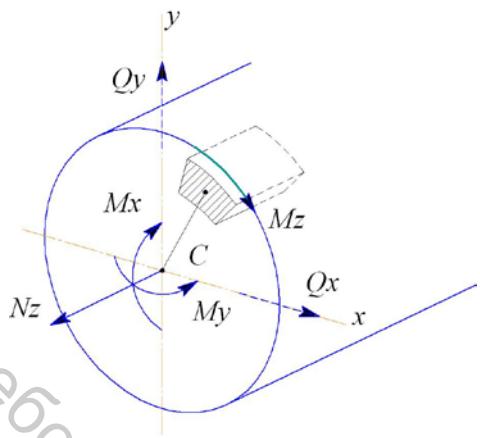


Рисунок 23.1 – ВСФ в поперечном сечении бруса

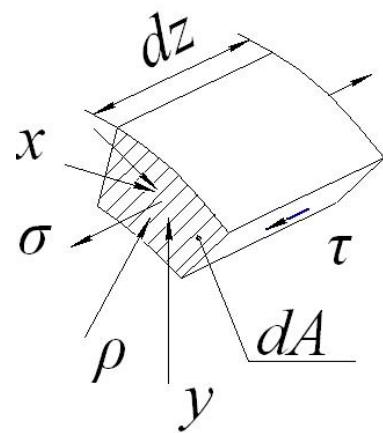


Рисунок 23.2 – УПНС

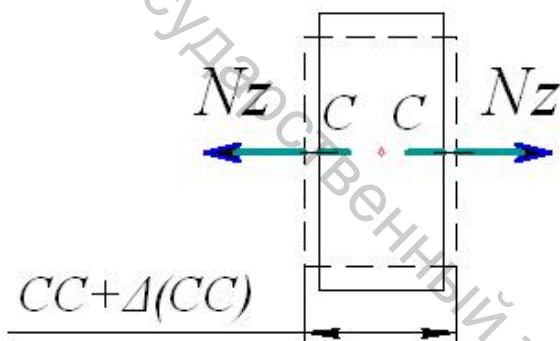


Рисунок 23.3 – Теорема о взаимности работ в приложении к растяжению

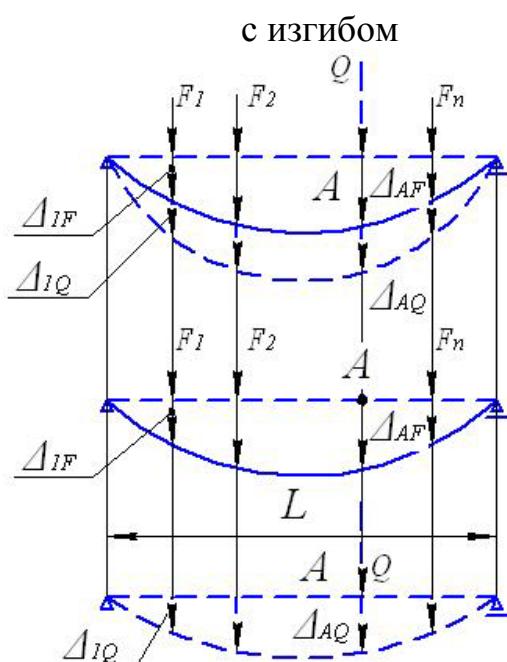
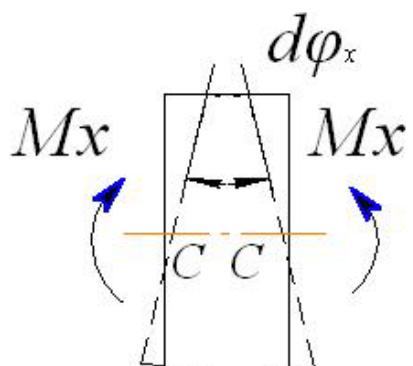


Рисунок 23.4 – Прогибы от сил  $F_1, F_2, \dots, F_n, Q$  и групп сил  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  и  $\{Q\}$

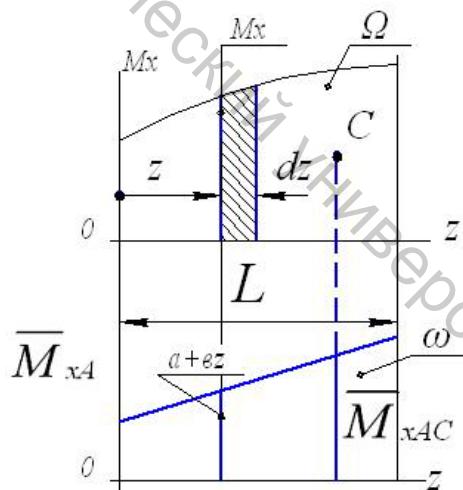


Рисунок 23.5 – К выводу правила Верещагина

$$U = \int_L \frac{N_z^2 dz}{2EA} + \int_L \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_L \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_L \frac{M_z^2 dz}{2GI_{\hat{e}}}. \quad (23.6)$$

Энергия (23.6) представляется суммой энергий при растяжении – сжатии бруса, прямых изгибах, кручении, взятых в отдельности. Но, как известно, принцип независимости действия сил не приложим к работе и потенциальной энергии упругих деформаций. Кажущееся противоречие объясняется теоремой о взаимности работ. Работа сил  $N_z$ , например, на удлинении отрезка  $CC$  (рис. 23.3) при изгибе равна нулю, ибо продольная ось стержня, искривляясь при изгибе, не удлиняется и не укорачивается. Соответственно, работа моментов  $M_x$  на взаимном угловом перемещении поперечных сечений  $d\varphi_x$  при растяжении равна нулю (ибо при растяжении поперечные сечения не поворачиваются). Работа сил  $N_z$  и моментов  $M_x$  представляется суммой работ этих факторов на «своих» перемещениях, что находит отражение в формуле (23.6) – см. первое и второе слагаемые суммы (23.6). Таким же образом рассматриваются и все другие пары ВСФ.

Добавим (рис. 23.4) к силам, действующим на линейно-упругую балку, произвольную силу  $Q$ , направив ее в направлении искомого перемещения  $\Delta_{AF}$ . По теореме о взаимности работ сумма работ сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  на перемещениях  $\Delta_{1Q}, \Delta_{2Q}, \dots, \Delta_{nQ}$  от силы  $Q$  равна работе силы  $Q$  на искомом перемещении  $\Delta_{AF}$  (от заданных сил):

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_{iQ} = Q \Delta_{AF}. \quad (23.7)$$

Работу в левой части равенства (23.7) можно найти, вычитая из работы всех сил  $F_1, F_2, \dots, F_n, Q$ , равной потенциальной энергии упругих деформаций (23.6) при прямом изгибе балки

$$\int_L \frac{(M_{xF} + M_{xQ})^2 dz}{2EI}, \quad (23.8)$$

работы сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  и силы  $Q$  на «своих» перемещениях (рис. 23.4)  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$  и  $\Delta_{AQ}$ , равные потенциальным энергиям

$$\int_L \frac{M_{xF}^2 dz}{2EI_x}, \quad \int_L \frac{M_{xQ}^2 dz}{2EI_x} \quad (23.9)$$

– см. аналогичное выражение (21.7). Используем в равенстве (23.7) энергии (23.8, 23.9) работу силы  $Q$  на перемещении от заданных сил

$$Q \Delta_{AF} = \int_L \frac{M_{xF} M_{xQ} dz}{EI_x},$$

искомое перемещение

$$\Delta_{AF} = \int_L \frac{M_{xF} (M_{xQ} / Q) dz}{EI_x} = \int_L \frac{M_{xF} \bar{M}_{xA} dz}{EI_x}. \quad (23.10)$$

В интеграле Мора (23.10)  $\bar{M}_{xA} = M_{xQ} / Q$  – единичный изгибающий момент – от единичной силы, приложенной в направлении искомого пере-

мешения. Разумеется, под единичной силой понимается обобщенная единичная сила: как на примеры укажем на единичный момент в случае определения угла поворота  $\varphi_A$  поперечного сечения  $A$ , на две равные единице противоположно направленные силы при определении приращения  $\Delta_{AB}$  расстояния между точками  $A$  и  $B$ .

На рисунке 23.5 показана эпюра изгибающих моментов  $M_x \equiv M_{xF}$  от заданных сил и прямолинейная (не кусочно-линейная) эпюра единичных моментов  $\bar{M}_{xA}$ . Жесткость сечения балки на участке интегрирования считаем постоянной. Интеграл Мора в формуле (23.10)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{EI_x} \int_L M_x \bar{M}_{xA} dz = \frac{1}{EI_x} \int_L M_x (a + \hat{a}z) dz = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ a \int_L M_x dz + \hat{a} \int_L (M_x dz) z \right] = \frac{1}{EI_x} \left[ a \int_L d\Omega + \hat{a} \int_L (d\Omega) z \right]. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Первый из интегралов в последней сумме (23.11) – площадь  $\Omega$  эпюры изгибающих моментов  $M_x$ , второй – статический момент площади  $\Omega$  относительно начала  $O$  участка интегрирования:

$$\Omega = \int_L d\Omega, \quad S_o = \int_L (d\Omega) z = \Omega \cdot z_c,$$

где  $z_c$  – координата центра тяжести  $C$  площади  $\Omega$ . Интеграл (23.11) приобретает вид (рис. 23.5)

$$I = \frac{1}{EI_x} \Omega \cdot (a + \hat{a}z_c) = \frac{1}{EI_x} \Omega \cdot \bar{M}_{xAC}, \quad (23.12)$$

где  $\bar{M}_{xAC} = (a + \hat{a}z_c)$  – ордината эпюры единичных изгибающих моментов под центром тяжести  $C$  эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки. «Произведение» эпюр  $M_x$  и  $\bar{M}_{xA}$  положительно, если обе эпюры располагаются по одну сторону от своих базисов.

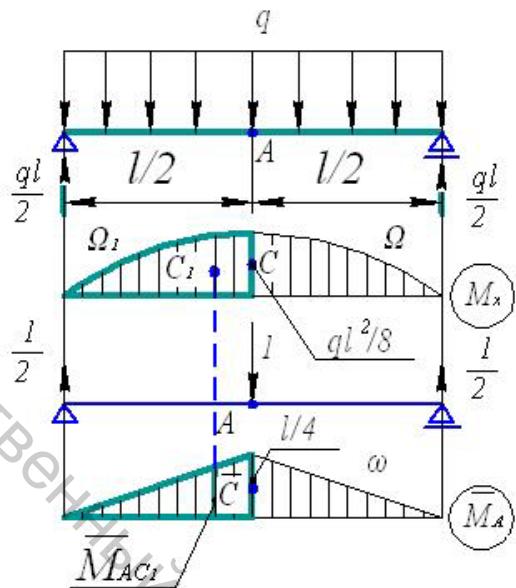
В общем случае потенциальной энергии упругих деформаций (23.6) формула (23.10) приобретает вид

$$\Delta_{AF} = \int_L \frac{N_{zF} \bar{N}_{zA} dz}{EA} + \int_L \frac{M_{xF} \bar{M}_{xA} dz}{EI_x} + \int_L \frac{M_{yF} \bar{M}_{yA} dz}{EI_y} + \int_L \frac{M_{zF} \bar{M}_{zA} dz}{GI_{\hat{e}}},$$

где  $N_{zF}, M_{xF}, M_{yF}, M_{zF}$  – внутренние силовые факторы в поперечных сечениях бруса от заданной нагрузки,  $\bar{N}_{zA}, \bar{M}_{xA}, \bar{M}_{yA}, \bar{M}_{zA}$  – внутренние силовые факторы от единичной нагрузки, приложенной к брусу (в точке  $A$ ) в направлении искомого перемещения.

### Тестирование

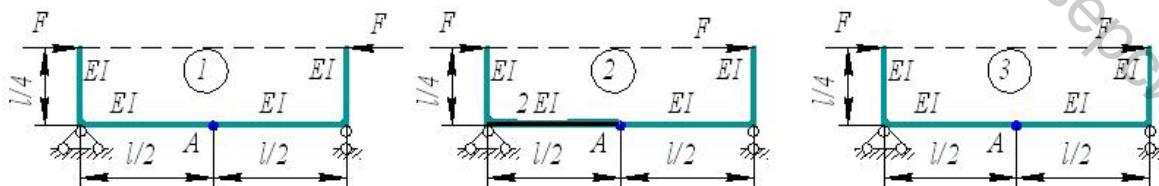
23.1 Двухпорная балка с жесткостью сечения  $EI_x$  на рисунке нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Площадь эпюры изгибающих моментов  $M_x$  – параболического сегмента –  $\Omega$ , площадь параболического треугольника  $\Omega_1 = 0,5\Omega$ , площадь единичной эпюры –  $\omega$ .  $C$ ,  $C_1$  и  $\bar{C}$  – центры тяжести этих площадей. Какой из вариантов определения прогиба сечения  $A$  правильный?



Варианты ответа

$$1. \Delta_A = \frac{1}{EI_x} \Omega \frac{l}{4}. \quad 2. \Delta_A = \frac{1}{EI_x} 2\Omega_1 \cdot \bar{M}_{AC_1}. \quad 3. \Delta_A = \frac{1}{EI_x} \omega \cdot \frac{ql^2}{8}.$$

23.2 На рисунке показаны три рамы. В какой из рам перемещение  $\Delta_A$  равно нулю?



Варианты ответа

1. В раме 1.
2. В раме 2.
3. В раме 3.

## Комментарии

23.1 Правило Верещагина (23.12) выведено в предположении (рис. 23.5), что единичная эпюра (эпюра изгибающих моментов  $\bar{M}_{x_A}$  от единичной обобщенной силы, приложенной в сечении  $A$  в направлении искомого перемещения) изображается на участке интегрирования одной прямой. Кусочно-линейная эпюра, включая в себя скачки и изломы, изображается несколькими прямыми.

Первый вариант ответа предлагает «перемножить» криволинейную эпюру  $M_x$  площадью  $\Omega$  на кусочно-линейную единичную эпюру  $\bar{M}_{x_A}$  (взяв под центром тяжести  $C$  площади  $\Omega$  единичную ординату  $l/4$ ) – ответ неверный.

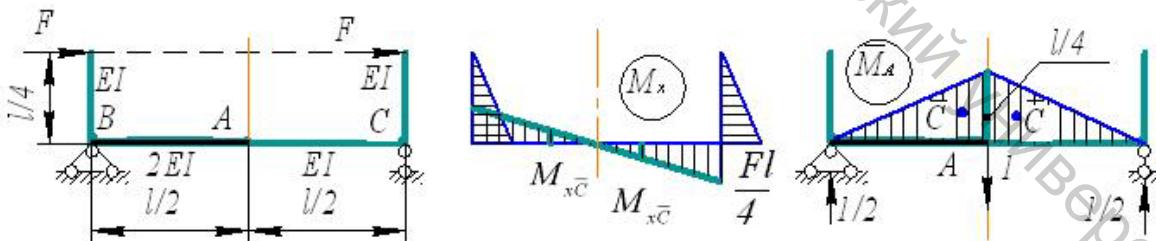
Третий вариант предлагает взять площадь  $\omega$  единичной эпюры и умножить ее на ординату  $ql^2/8$  криволинейной эпюры  $M_x$ , взятую над центром тяжести  $\bar{N}$  площади  $\omega$ , – ответ неверный.

Правильный ответ – второй. Этот ответ использует площадь параболического треугольника  $\Omega_1$  и единичную ординату  $\bar{M}_{AC_1}$ , взятую на участке, где единичная эпюра изображается одной прямой.

23.2 Сечение  $A$  располагается в рамках 1 и 3 в плоскости их материальной симметрии. Эпюра единичных изгибающих моментов  $\bar{M}_A$  необходимо симметрична. Нагружение рамы 1 симметрично – соответствующая эпюра моментов  $M_x$  тоже симметрична. Результат перемножения (23.12) симметричных эпюр отличен от нуля.

Нагружение рамы 3 антисимметричное – эпюра  $M_x$ , соответственно, – антисимметрична. Результат перемножения симметричной и антисимметричной эпюр равен нулю. Ответ 3 – правильный.

Рама 2 не симметрична (жесткости сечений элементов рамы, кающихся симметричными, различны). На рисунке показаны антисимметричная эпюра  $M_x$  и симметричная эпюра  $\bar{M}_A$ . Искомое перемещение



$$\Delta_A = \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{1}{3} \frac{Fl}{4} - \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{1}{3} \frac{Fl}{4} = -\frac{1}{384} \frac{Fl^3}{EI}$$

направлено вверх – вопреки единичной силе, направленной вниз.

Если жесткости сечений участков  $BA$  и  $AC$  равны, перемещение  $\Delta_A = 0$ .

## 24 Метод сил

Стержневая система статически определима, если реакции ее опор и внутренние силовые факторы в ее поперечных сечениях в полном объеме находятся из уравнений равновесия. Если уравнений равновесия не достает, стержневая система статически неопределенна. Число недостающих уравнений (или число избыточных («лишних») связей, наложенных на систему) определяет степень статической неопределенности. Отбрасывая «лишние» связи, придем к основной системе метода сил.

На рисунке 24.1 изображена дважды статически неопределенная система – трех уравнений статики (например, двух уравнений проекций и одного уравнения момента) не достает для определения пяти реактивных силовых факторов – четырех сил  $X_A, Y_A, X_C, Y_C$  и одного момента  $M_A$ . Если одну из связей, образующих неподвижный шарнир  $C$ , отбросить и в жесткий узел  $B$  врезать шарнир (отбросив тем самым еще одну связь), получим основную систему ( $OC$ ) 1. Система 1 составлена защемленной балкой  $AB$  и шарнирно опертой  $BC$ . Обе они линейно-упругие – к системе 1 приложим принцип независимости действия сил.

Однако, отбрасывая «лишние» связи, можно получить не только линейно-упругие системы, аналогичные системе 1, – возможны конечные механизмы (см. систему 2) и мгновенные механизмы (см. систему 3). В первом случае система, не сопротивляясь вертикальным силам, приходит в движение; во втором случае возможны бесконечно малые перемещения опоры на катках  $C$ . Такие мгновенные механизмы нелинейно-упругие. Их перемещения от группы сил не равны суммам перемещений от каждой из сил в отдельности.

Приложим к основной системе  $OC1$  заданные силы  $F_1$  и  $F_2$  и реакции отброшенных («лишних») связей: силу  $X_2$ , призванную вернуть к нулю возникший «откат» опоры  $C$ , и пару моментов  $X_1$ , призванных вернуть к нулю возникшие повороты сечений, примыкающих к шарниру  $B$ . Получается эквивалентная система, ее перемещения равны перемещениям заданной статически неопределенной системы. В частности, перемещения эквивалентной системы в направлениях отброшенных связей (в направлениях «лишней» неизвестных  $X_1$  и  $X_2$ ) равны нулю. Прибегая к принципу независимости действия сил (21.3), напишем канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases} \quad (24.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – единичное перемещение в направлении  $i$ -ой отброшенной связи ( $i$ -ой «лишней» неизвестной  $X_i$ ) от  $k$ -ой единичной силы, приложенной к основной системе вместо «лишней» неизвестной  $X_k$ ,  $\Delta_{iF}$  – грузовое перемещение от заданных сил  $F_1$  и  $F_2$ . Канонические уравнения (24.1) – частный случай системы уравнений с  $n$  «лишними» неизвестными

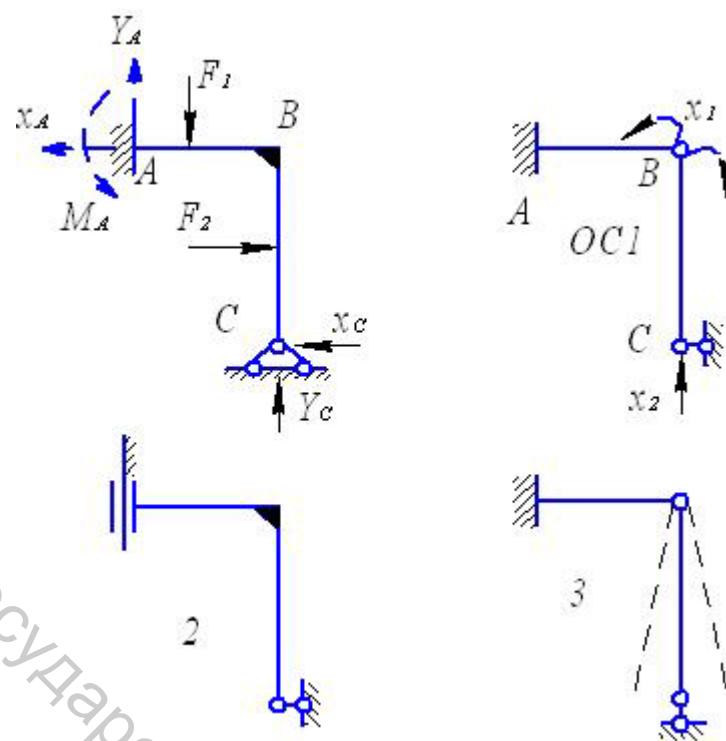


Рисунок 24.1 – Основная система метода сил 1, конечный 2 и мгновенный 3 механизмы

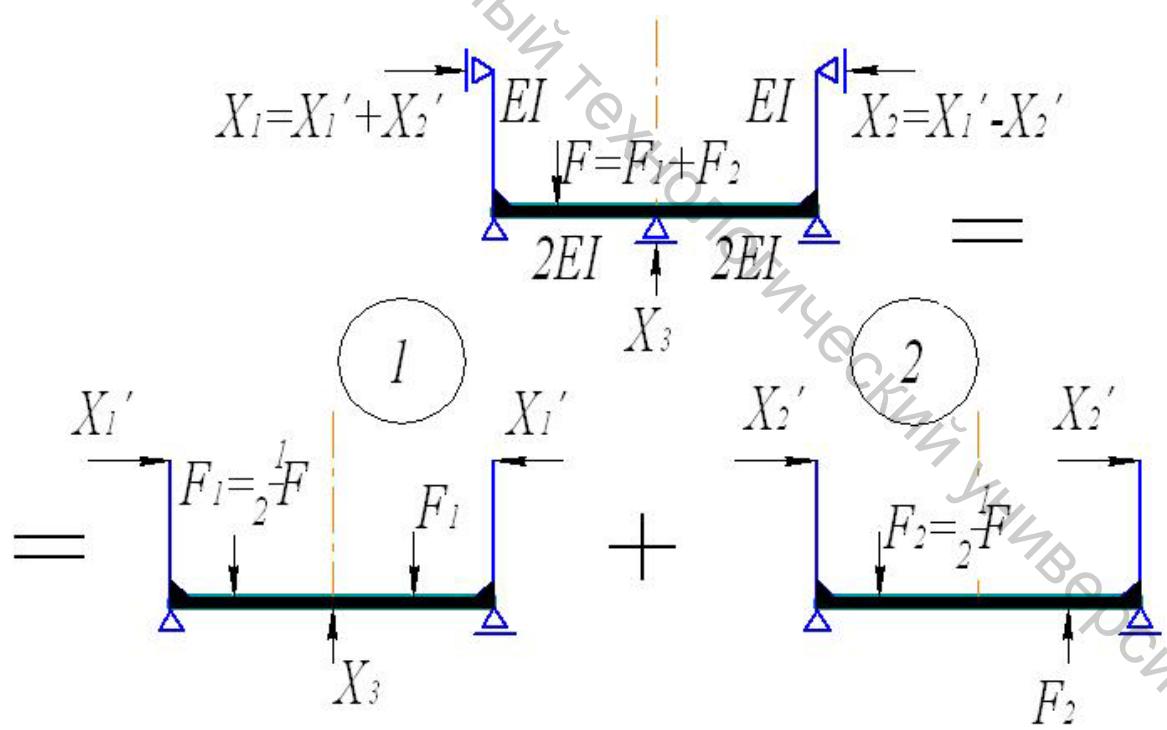


Рисунок 24.2 – Разложение нагрузки и лишних неизвестных на симметричные и антисимметричные

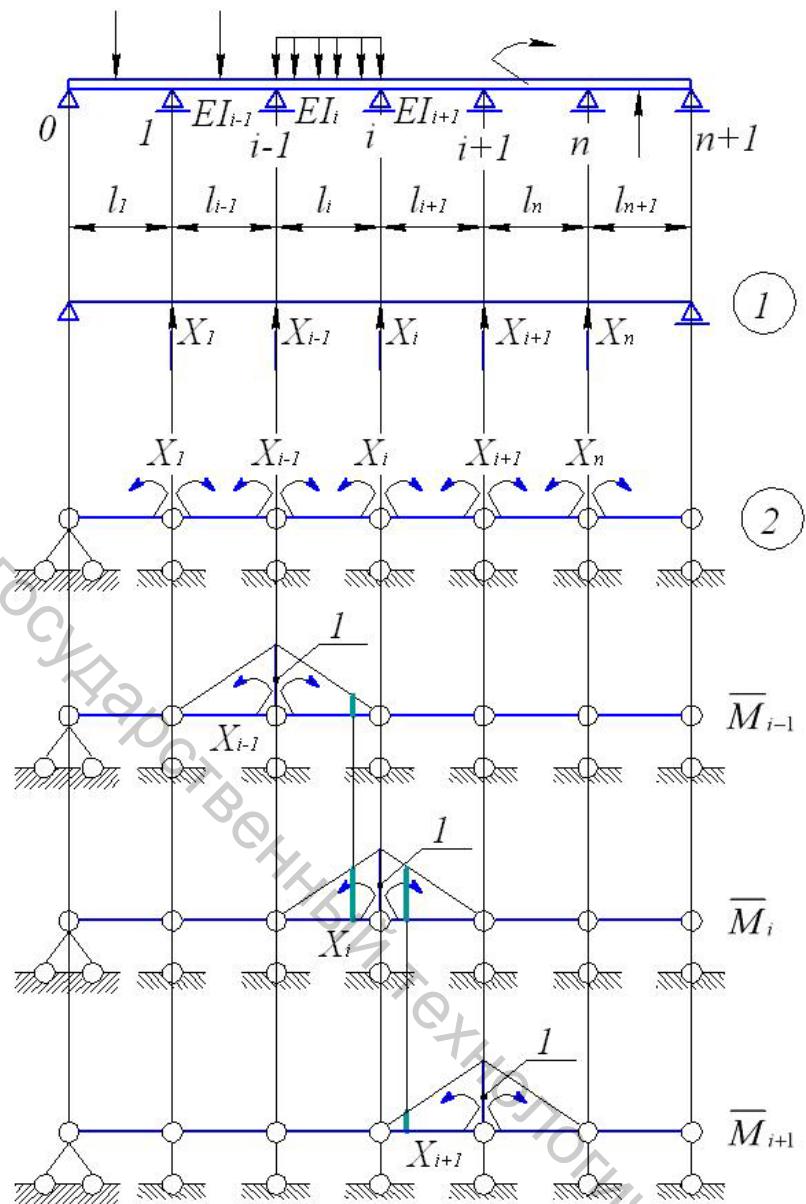


Рисунок 24.3 – Многопролетная неразрезная балка

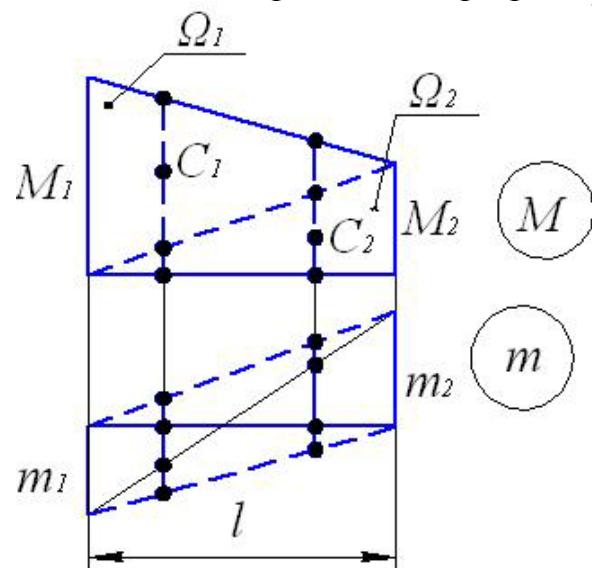


Рисунок 24.4 – Перемножение трапеций по Верещагину

Матрица коэффициентов системы уравнений (24.2) образована единичными перемещениями – от единичных (равных!) сил. Заключаем на основе теоремы о взаимности работ (21.8): перемещения  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{ki}$  равны, матрица коэффициентов системы уравнений (24.2) симметрична. Кстати, та же теорема – в основе симметрии матрицы (18.3).

Единичные и грузовые перемещения в уравнениях (24.2) получаются на основе теоремы о перемещении линейно-упругой системы (23.10). Найдем, что элементы статически неопределенной стержневой системы работают, в основном, на изгиб перемещения в уравнениях (24.2)

$$\delta_{ik} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dz}{EI}, \quad \Delta_{iF} = \int_L \frac{\bar{M}_i M_F dz}{EI}, \quad (24.3)$$

где  $\bar{M}_i$  – единичный изгибающий момент от  $i$ -ой единичной силы,  $M_F$  – грузовой изгибающий момент (от заданных сил).

На рисунке 24.2 показана трижды статически неопределенная система, обладающая материальной симметрией. Выбрав симметричную основную систему, разложим заданную нагрузку (силу  $F$ ) на симметричную (силы  $F_1 = F / 2$ ) и антисимметричную (силы  $F_2 = F / 2$ ) составляющие. Аналогичным образом разлагаем реакции отброшенных связей:  $X_1 = X_1^+ + X_2^-$ ,  $X_2 = X_1^+ - X_2^-$ . В нагружении симметричной нагрузкой 1 эпюры грузовых изгибающих моментов и единичных моментов (от симметричных единичных сил, приложенных к основной системе вместо симметричных «лишних» неизвестных  $X_1^+$ ,  $X_3$ ) симметричны; единичная эпюра моментов от антисимметричных единичных сил, приложенных вместо антисимметричных «лишних» неизвестных  $X_2^-$ , антисимметрична. Результаты перемножения по Верещагину (23.12) симметричных эпюр на антисимметричные равны нулю, т. е. перемещения (24.3)  $\delta_{12} = 0$ ,  $\delta_{32} = 0$ ,  $\Delta_{2F_1} = 0$ . Система канонических уравнений (24.2) приобретает вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = -\Delta_{1F_1}, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = -\Delta_{3F_1}; \\ \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \quad (24.4)$$

Решая ее, найдем, что антисимметрическая составляющая «лишних» неизвестных (силы  $X_2'$ ) в нагружении симметричной нагрузкой 1 равна нулю.

Аналогично, равна нулю симметрическая составляющая «лишних» неизвестных (силы  $X_1'$  и  $X_3'$ ) в нагружении антисимметричной нагрузкой 2.

Система уравнений (24.2) распадается на две системы с меньшими числами неизвестных: в случае рисунка 24.2 – на систему двух уравнений (24.4) и одно уравнение

$$\delta_{22} X_2' = -\Delta_{2F_2}.$$

Следует выбирать, по возможности, основную систему, среди перемещений (24.3) которой есть (и возможно большем числе) нулевые.

На рисунке 24.3 представлена многопролетная неразрезная балка. Если, выбирая основную систему, отбросить  $n$  опор, делящих балку на  $n + 1$  пролетов, все единичные перемещения (24.3) системы 1 окажутся не равными нулю. «Врежем» надопорные шарниры в балку. Основная система 2 – совокупность двухопорных балок, изгибающихся независимо друг от друга. Единичная эпюра  $\bar{M}_i$  «перекрывается» единичными эпюрами  $\bar{M}_{i-1}$  и  $\bar{M}_{i+1}$  и никакими другими: единичные перемещения  $\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}$  не равны нулю, все другие – нулевые;  $i$ -ое уравнение системы (24.2) приобретает вид уравнения трех надопорных моментов

$$\delta_{i(i-1)} X_{i-1} + \delta_{ii} X_i + \delta_{i(i+1)} X_{i+1} = -\Delta_{iF}.$$

Единичные перемещения (24.3), входящие в него, найдем по Верещагину:

$$\begin{aligned} \delta_{i(i-1)} &= \frac{1}{EI_i} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \right) \frac{1}{3} 1 = \frac{l_i}{6EI_i}, \\ \delta_{ii} &= \frac{1}{EI_i} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \right) \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{EI_{i+1}} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \right) \frac{2}{3} 1 = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}}, \\ \delta_{i(i+1)} &= \frac{1}{EI_{i+1}} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \right) \frac{1}{3} 1 = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}. \end{aligned}$$

При их выражении «перемножались» треугольники. При «перемножении» трапеций (рис. 24.4) прибегнем к «расслоению» эпюра на треугольники: интеграл Мора (23.12)

$$\int \frac{Mm}{EI} dz \approx \frac{1}{EI} [\Omega_1 m(C_1) + \Omega_2 m(C_2)] = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} M_1 l \right) \left( \frac{1}{3} m_2 - \frac{2}{3} m_1 \right) + \left( \frac{1}{2} M_2 l \right) \left( \frac{2}{3} m_2 - \frac{1}{3} m_1 \right) \right],$$

при «перемножении» трапеции само на себя

$$\int \frac{M \cdot M}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} M_1 l \right) \left( \frac{2}{3} M_1 + \frac{1}{3} M_2 \right) + \left( \frac{1}{2} M_2 l \right) \left( \frac{1}{3} M_1 + \frac{2}{3} M_2 \right) \right].$$

## Тестирование

24.1 На рисунках представлены три варианта нагружения квадратной рамы с симметричным распределением жесткости поперечных сечений  $EI$ . В каких из вариантов нагружения можно использовать как основную систему шарнирный четырехзвенник (конечный механизм!), представленный на рисунке 24.5?

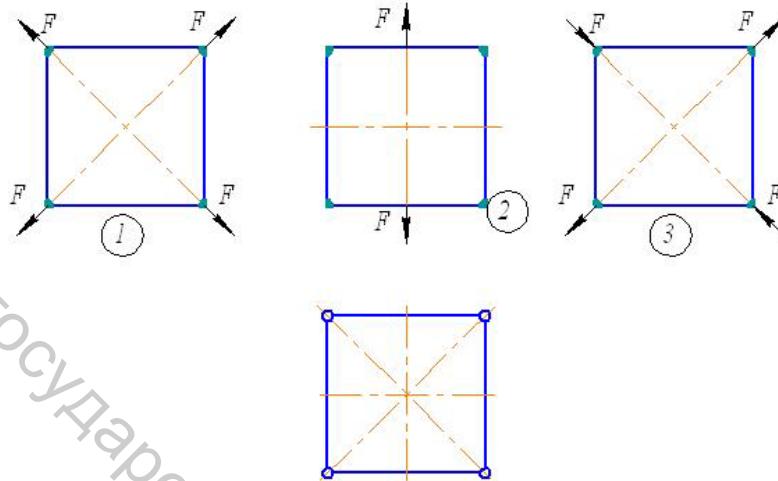


Рисунок 24.5 – Шарнирный четырехзвенник

### Варианты ответа

1. В нагрузлениях 1 и 3. 2. В нагрузлениях 2 и 3. 3. В нагрузлениях 1 и 2.

24.2 На рисунке 24.6 представлены статически неопределенная стержневая система и две ее основные системы. Для раскрытия статической неопределенности использована  $OC1$ .

Желая определить перемещение точки  $A$  заданной системы в вертикальном направлении, приложим в точке  $A$  единичную силу. К какой из трех систем она прилагается?

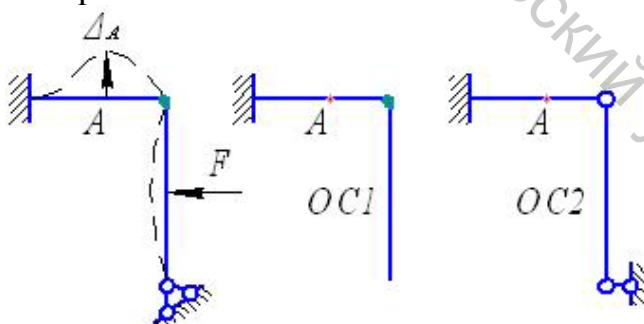


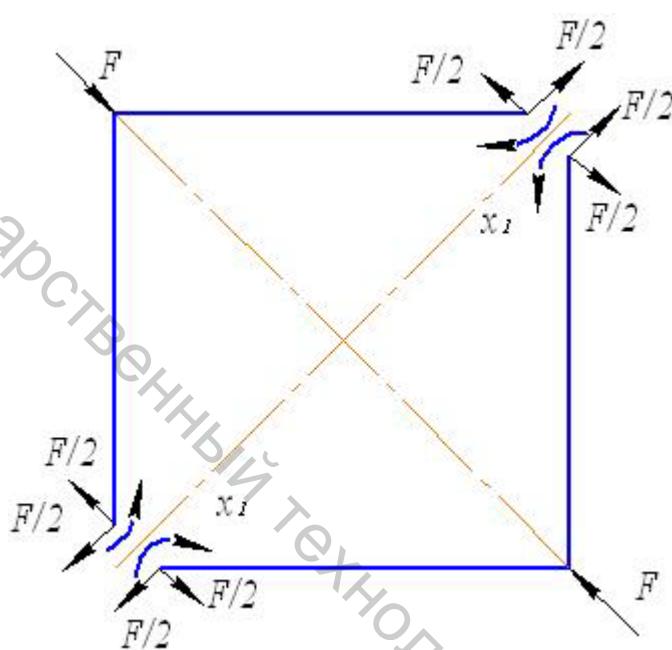
Рисунок 24.6 – Статически неопределенная система и ее основные системы

### Варианты ответа

1. К заданной статически неопределенной системе.  
2. К любой основной системе.  
3. К основной системе  $OC1$ , использованной при раскрытии статической неопределенности.

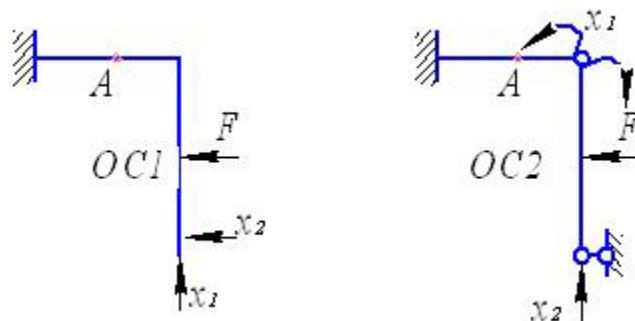
### Комментарии

24.1 Система на рисунке 24.5 – конечный механизм, однако, при симметричной нагрузке в нагружениях 1 и 2 она не приходит в движение, воспринимая нагрузку и сопротивляясь ей. В случаях 1 и 2 шарнирный четырехзвенник (рис. 24.5) может служить основной системой метода сил. В случае 3 шарнирный четырехзвенник придется в движение. Основной системой метода сил он служить не может. Основную систему в нагружении 3 можно получить (сохраняя симметрию!), разрезая раму вдоль плоскости симметрии – на рисунке показана эквивалентная система.



Ответы 1 и 2 не верные.

24.2 Заданная система (рис. 24.6) и эквивалентные системы на рисунке деформируются одинаково – перемещение  $\Delta_A$  во всех трех системах одно и тоже.



Если, однако, приложить единичную силу к заданной статически неопределенной системе, придется снова раскрыть статическую неопределенность. Если же воспользоваться статически определимой основной системой (любой!), это делать не придется. Верен ответ 2.

## 25 Свободные колебания линейно-упругих систем

Положение упругого тела в пространстве определяется положениями всех его частиц – точек. Говорят, что упругое тело – система с бесконечным числом степеней свободы. В практике, однако, нередки случаи, когда относительно массивные жесткие тела связаны между собой легкими упругими связями. Модель таких систем – абсолютно твердые тела, связанные невесомым упругим каркасом – подвеской, т. е. система с конечным числом степеней свободы.

На рисунке 25.1 представлено твердое тело – груз на упругой консоли, способный перемещаться в трех взаимно ортогональных направлениях и вращаться вокруг них, – система с шестью степенями свободы. Если моментами инерции тела возможно пренебречь, получим материальную точку – груз на упругой консоли – систему с тремя степенями свободы. Если точка колеблется в плоскости, учету подлежат две степени свободы. Наконец, колебаниями точки, связанными с удлинениями – укорочениями консоли, во многих задачах можно пренебречь – по сравнению с изгибными колебаниями. Получается система с одной степенью свободы. Число степеней свободы определяется таким образом расчетной схемой колебательной системы, т. е. степенью приближения, с которой рассматривается реальный объект.

Рассмотрим систему с  $n$  степенями свободы (рис. 25.2), представленную совокупностью сосредоточенных масс  $m_i$  на невесомой линейно-упругой балке – подвеске. Всякий момент колебаний можно считать равновесием упругой подвески, находящейся под действием дамберовых сил инерции –  $m_i \ddot{v}_i$  ( $\ddot{v}_i$  – вторая производная упругого перемещения  $v_i$  по времени – ускорение массы  $m_i$ ). Упругое перемещение  $i$ -ой массы (согласно принципу независимости действия сил)

$$v_i = \delta_{i1}(-m_1 \ddot{v}_1) + \delta_{i2}(-m_2 \ddot{v}_2) + \dots + \delta_{ii}(-m_i \ddot{v}_i) + \dots + \delta_{in}(-m_n \ddot{v}_n) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(-m_k \ddot{v}_k), \quad (25.1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$\delta_{ik}$  – единичное перемещение  $i$ -ой массы от единичной силы, приложенной к  $k$ -ой массе.

Перемещения (25.1), взятые в совокупности, образуют однородную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее решение ищем в виде

$$v_i = A_i \sin(\omega t + \varphi), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (25.2)$$

где  $A_i$  – амплитуда колебаний  $i$ -ой массы, происходящих с частотой  $\omega$ ,  $\varphi$  – начальная фаза, общая для всех колеблющихся масс; амплитуды, взятые в совокупности, образуют форму колебаний. Подставим закон

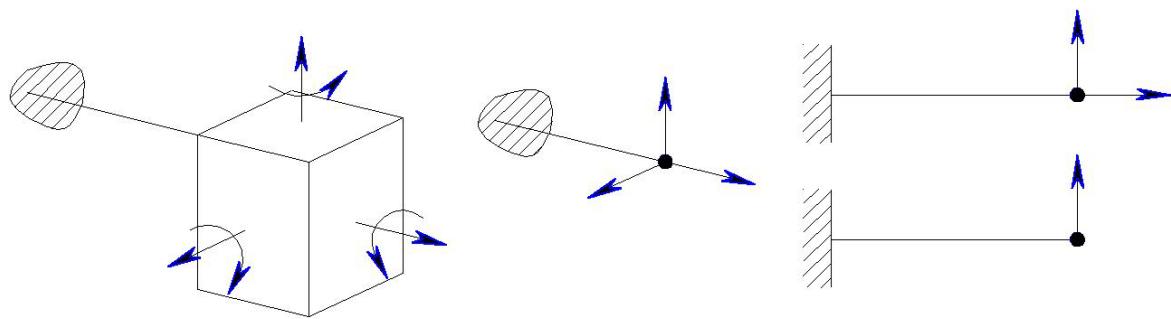


Рисунок 25.1 – Системы с шестью, с тремя, двумя и одной степенями свободы

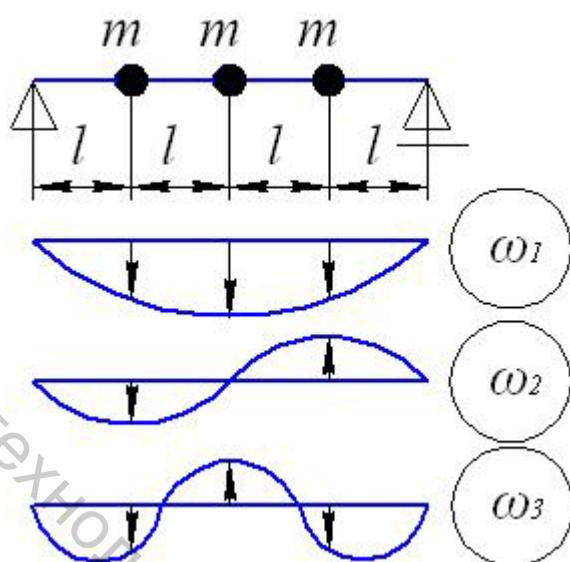
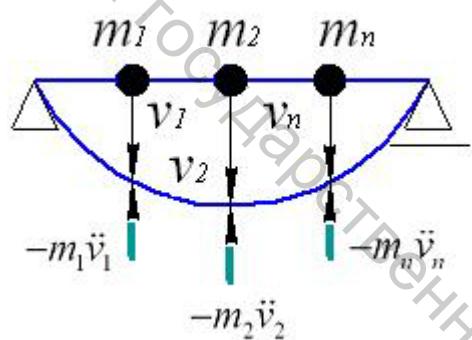


Рисунок 25.2 – Перемещения подвески в колебаниях под действием сил инерции

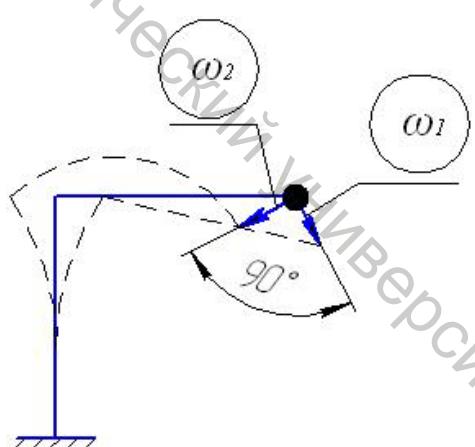
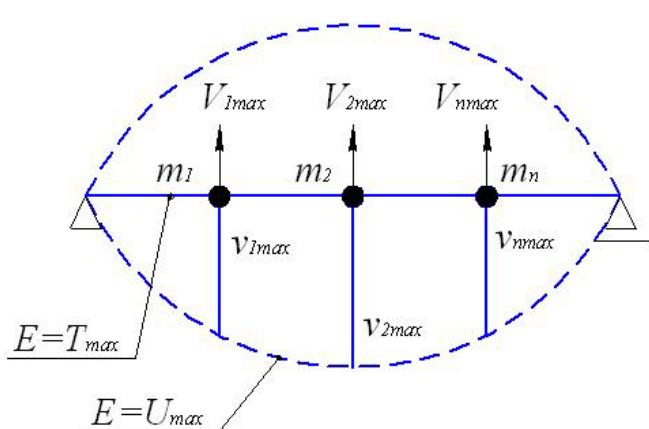


Рисунок 25.4 – К выводу формулы Рэлея (25.10)

Рисунок 25.3 – Ортогональные главные формы колебаний

(25.2) в уравнения (25.1) – получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд:  $\ddot{v}_i = -A_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ ,

$$A_i \sin(\omega t + \varphi) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} [m_k A_k \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)];$$

$$\begin{cases} \left( -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{11} m_1 \right) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 + \dots + \delta_{1n} m_n A_n = 0, \\ \delta_{21} m_1 A_1 + \left( -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{22} m_2 \right) A_2 + \dots + \delta_{2n} m_n A_n = 0, \\ \dots \\ \delta_{n1} m_1 A_1 + \delta_{n2} m_2 A_2 + \dots + \left( -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{nn} m_n \right) A_n = 0. \end{cases} \quad (25.3)$$

Решение однородной системы (25.3) заведомо не нулевое (среди амплитуд  $A_i$  найдутся ненулевые) – следовательно, определитель системы

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{22} m_2 & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \dots & -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{nn} m_n \end{vmatrix} = 0. \quad (25.4)$$

Раскрывая его, получим алгебраическое уравнение  $n$ -го порядка относительно величины  $1 / \omega^2$ . Все его корни действительны и положительны – у системы с  $n$  степенями свободы ровно  $n$  частот свободных (собственных) колебаний (собственных частот).

Убедимся в этом на примере системы с двумя степенями свободы. Раскрывая определитель

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & -\frac{1}{\omega^2} + \delta_{22} m_2 \end{vmatrix}$$

в частотном уравнении (25.4), получим, учитя равенство  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , квадратное уравнение

$$\left( \frac{1}{\omega^2} \right)^2 - (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) \frac{1}{\omega^2} + \delta_{11} \delta_{22} m_1 m_2 - \delta_{12}^2 m_1 m_2 = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{1,2}^2} &= \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2}{2}\right)^2 - \left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)m_1m_2} = \\ &= \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2}{2}\right)^2 + \delta_{12}^2m_1m_2}.\end{aligned}\quad (25.5)$$

Покажем, что определитель

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 > 0. \quad (25.6)$$

Поскольку перемещения масс на рисунке 25.2 могут задаваться произвольно (ибо перемещения системы с  $n$  степенями свободы, задающие ее положение, независимы), положим: перемещение первой из масс  $v_1 = 1$ , второй –  $v_2 = 0$ . Соответствующие силы находятся из уравнений (25.1) – с заменой сил инерции –  $m_k \ddot{v}_k$  на силы  $F_k$ :

$$\begin{cases} 1 = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2, \\ 0 = \delta_{12}F_1 + \delta_{22}F_2. \end{cases}$$

Их решение

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \delta_{12} \\ 0 & \delta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}, \quad F_2 = \frac{-\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}.$$

Потенциальная энергия упругих деформаций, равная сумме работ сил  $F_1$  и  $F_2$ ,

$$U = \frac{1}{2}F_1v_1 + \frac{1}{2}F_2v_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} > 0.$$

Единичное перемещение  $\delta_{22} > 0$  – следовательно, определитель (25.6) положительный.

Второе из подкоренных выражений в формулах (25.5) положительно; первое, равное второму, меньше квадрата  $[(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)/2]^2$ , чем обеспечивается действительность и положительность корней (25.5) и, следовательно, существование двух действительных частот колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Собственные частоты  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$  – корни частотного уравнения (25.4) принято нумеровать в порядке возрастания. Наименьшую частоту  $\omega_1$  называют частотой основного тона.

Подставим частоту  $\omega_i$  в определитель (25.4) алгебраической системы (25.3) – получится система уравнений с определителем, равным нулю, или  $n$  линейно зависимых уравнений. Беря  $n - 1$  из них, выразим

амплитуды  $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_{n-1}^{(i)}$  через амплитуду  $A_n^{(i)}$  – она, оставшаяся произвольной, – произвольная постоянная интегрирования. Совокупность амплитуд  $A_k^{(i)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), пропорциональных одной из них, образует главную форму колебаний, отвечающую собственной частоте  $\omega_i$ .

Любое из колебаний системы на рисунке 25.2 – результат наложения колебаний (25.2), происходящих с частотами  $\omega_i$ :

$$v_k = \sum_{i=1}^n A_k^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (25.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Каждое из колебаний  $A_k^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$  в сумме (25.7) содержит произвольную постоянную (например, амплитуду  $A_n^{(i)}$ ) и еще одну – начальную фазу  $\varphi_i$ , всего в сумме (25.7)  $2n$  произвольных постоянных. Они определяются из начальных условий – в их состав входят  $n$  начальных (в момент  $t = 0$ ) отклонений  $v_{k0}$  масс от положений равновесия и  $n$  начальных скоростей  $\dot{v}_{k0}$  масс.

В момент  $t$  на упругую подвеску действуют силы инерции

$$-m_k \ddot{v}_k^{(i)} = m_k A_k^{(i)} \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (25.8)$$

$$k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n.$$

По теореме о взаимности работ работа сил инерции (25.8), действующих на массы  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) в колебаниях с частотой  $\omega_i$ , на перемещениях (25.2) в колебаниях с частотой  $\omega_j$

$$v_k^{(j)} = A_k^{(j)} \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (25.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

равна работе сил инерции в колебаниях с частотой  $\omega_j$  на перемещениях (25.9) в колебаниях с частотой  $\omega_i$ :

$$\sum_{k=1}^n \left[ m_k A_k^{(i)} \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \varphi_i) A_k^{(j)} \sin(\omega_j t + \varphi_j) \right] = \sum_{k=1}^n \left[ m_k A_k^{(j)} \omega_j^2 \sin(\omega_j t + \varphi_j) A_k^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \right].$$

Равенство это должно выполняться в любой момент времени, получаем поэтому:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \sum m_k A_k^{(i)} A_k^{(j)} = 0,$$

или (при различных собственных частотах!)

$$\sum_{k=1}^n m_k A_k^{(i)} A_k^{(j)} = 0$$

– условие ортогональности главных форм колебаний. На рисунке 25.3 показаны ортогональные формы колебаний – системы с тремя степенями свободы и системы с двумя степенями свободы. Во втором случае масса колеблется в двух перпендикулярных направлениях. Заметим: чем выше номер формы (чем выше частота), тем сложнее она.

Линейно-упругие колеблющиеся системы консервативны – полная механическая энергия, равная сумме потенциальной энергии упругих деформаций их подвесок и кинетической энергии их движущихся масс, сохраняется. Когда колеблющиеся массы системы получают наибольшие отклонения от положений равновесия, деформации упругой подвески наибольшие (рис. 25.4): потенциальная энергия ее деформаций наибольшая, тогда как кинетическая энергия масс равна нулю – полная энергия  $E = U_{max}$ . Когда же массы проходят положения равновесия, подвеска не деформирована – потенциальная энергия ее деформаций равна нулю, тогда как кинетическая энергия масс наибольшая – полная энергия  $E = T_{max}$ . Перемещения масс описываются законом (25.2), скорости масс

$$V_i = \dot{v}_i = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi), \dot{v}_{i\max} = A_i \omega, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Наибольшая кинетическая энергия

$$T_{max} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{v}_{i\max}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2.$$

Из равенства  $U_{max} = T_{max}$  следует формула Рэлея

$$\omega^2 = \frac{2U_{max}}{\sum_{i=1}^n m_i A_i^2}. \quad (25.10)$$

Первую главную форму колебаний угадать и приближенно задать легче, поэтому формулу (25.10) используют для определения частоты основного тона  $\omega_1$ . Частота получается завышенной против истинной: навязывая системе форму колебаний, мы неявно налагаем на нее связи, которых не было, увеличивая тем самым жесткость системы и вместе с ней частоту колебаний.

Например, собственная частота колебаний системы с одной степенью свободы (см. частотное уравнение (25.4))

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (25.11)$$

растет с ростом жесткости  $c = 1 / \delta_{11}$ .

### Тестирование

25.1 Абсолютно твердый брус, поддерживаемый упругими элементами, колеблется в плоскости рисунка 25.5. Возможны ли главные формы колебаний, показанные на нем? Масса бруса  $m$  распределена по его длине  $l$  равномерно, жесткости упругих элементов  $c_1$  и  $c_2$  произвольные.

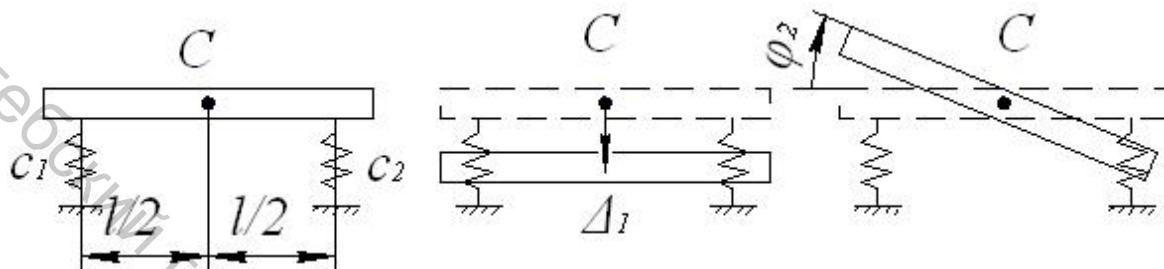
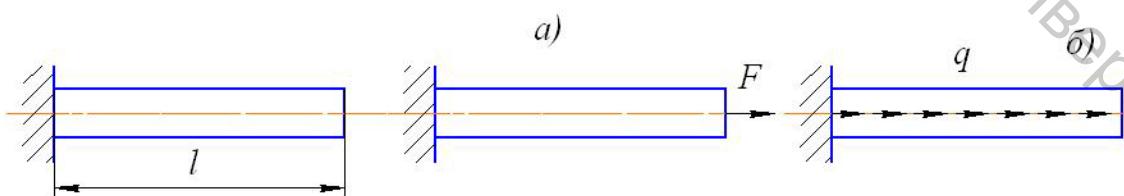


Рисунок 25.5 – Вертикальное перемещение центра масс  $C$  и угол поворота стержня вокруг центральной оси

### Варианты ответа

1. Не возможны.
2. Возможны при любом соотношении жесткостей  $c_1, c_2$ .
3. Возможны только при равенстве  $c_1 = c_2$ .

25.2 Стержень на рисунке с равномерным распределением массы  $m$  по длине  $l$  совершает продольные колебания. Частоту основного тона можно определить по формуле Рэлея (25.10). Амплитуды масс в этой формуле полагаем пропорциональными перемещениям при некотором подходящем нагружении стержня. Рассмотрим два нагружения стержня  $a)$  и  $\bar{b})$ : сосредоточенной силой  $F$  и нагрузкой  $q$ , равномерно распределенной вдоль стержня. Какой из случаев даст лучшее приближение к точному значению частоты  $\omega_1 = (\pi/2)\sqrt{c/m}$ ? Жесткость стержня (6.5)  $c = EA/l$  ( $E$  – модуль Юнга материала стержня,  $A$  – площадь его поперечного сечения).



### Варианты ответа

1. Случай  $a)$ .
2. Случай  $\bar{b})$ .
3. Оба случая дают близкие оценки.

### Комментарии

25.1 Брус (рис. 25.5) – система с двумя степенями свободы. Единичные перемещения в уравнениях (25.3) и частотном уравнении (25.4) показаны на рисунке 25.6.

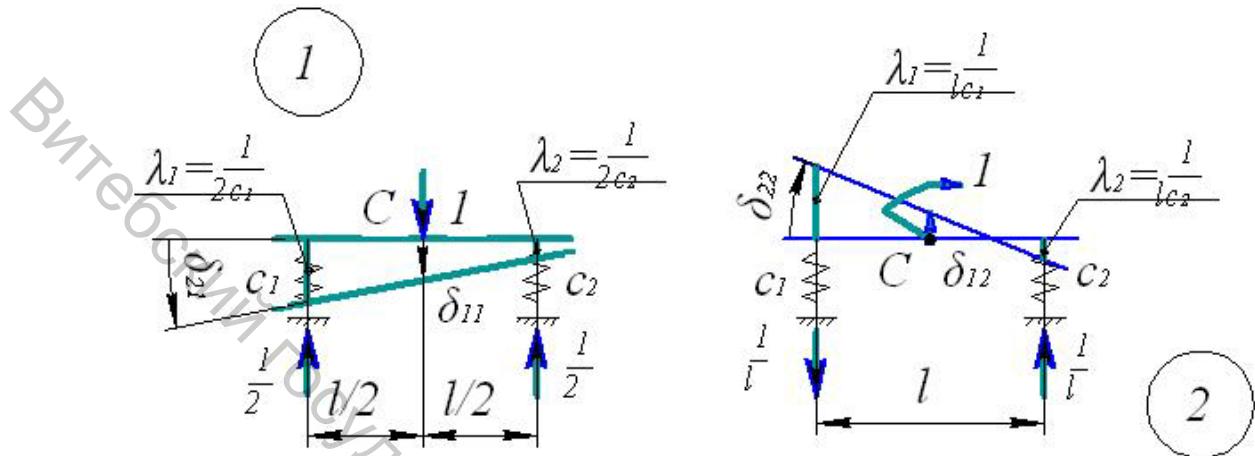


Рисунок 25.6 – Единичные перемещения бруса (рис. 25.5)

Если жесткости  $c_1$  и  $c_2$  различны, различны осадки (6.5)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  упругих элементов: при первом нагружении брус поворачивается, при втором его центр масс смещается – перемещение  $\delta_{21}$  и равное ему перемещение  $\delta_{12}$  не равны нулю:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-\frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_2}}{\frac{l}{l}} = \frac{-\frac{1}{lc_1} + \frac{1}{lc_2}}{2} = -\frac{1}{2l} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right). \quad (25.12)$$

Подстановка значений  $1/\omega^2 = \delta_{11}m$ ,  $1/\omega^2 = \delta_{22}I$  (25.11) ( $m$  – масса бруса,  $I$  – его центральный момент инерции) и значений (25.11) в частотное уравнение (25.4) «не дает» нуля – они не являются корнями уравнения (25.4). Отношение амплитуд главных форм колебаний (рис. 25.5) найдем из уравнений (25.3):

$$\frac{\Delta_1}{\varphi_2} = -\frac{\delta_{12}I}{-\frac{1}{\omega^2} + \delta_{11}m} = -\frac{-\frac{1}{\omega^2} + \delta_{22}I}{\delta_{21}m}.$$

Нетрудно видеть, что при любой из частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  (не равных  $1/\sqrt{\delta_{11}m}$ ,  $1/\sqrt{\delta_{22}I}$ ) отношения  $\Delta_1/\varphi_2$  и  $\varphi_2/\Delta_1$  не равны 0 – при  $\delta_{12} \neq 0$  формы колебаний, показанные на рисунке 25.5, не возможны, но возможны при  $\delta_{12} = 0$  – при равных жесткостях  $c_1$  и  $c_2$  – см. формулы (25.12). При первом нагружении брус (рис. 25.6) в этом случае не поворачивается, при втором нагружении его центр масс  $C$  не смещается. Верен ответ 3.

25.2 Потенциальная энергия (23.5) упругих деформаций при рас-  
тяжении – сжатии в продольных колебаниях стержня

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_z^2}{EA} dz = \frac{1}{2} EA \int_0^l \left( \frac{N_z}{EA} \right)^2 dz = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dz \quad (25.13)$$

– как следует из формулы (6.3) для относительного продольного удли-  
нения  $\varepsilon$ . Соответствующие продольные смещения  $w$  найдутся из урав-  
нения (17.3)

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} \quad (25.14)$$

– именно, они принимаются в формуле Рэлея (25.10) за амплитуды ко-  
лебаний элементов массы стержня  $dm = mdz/l$ .

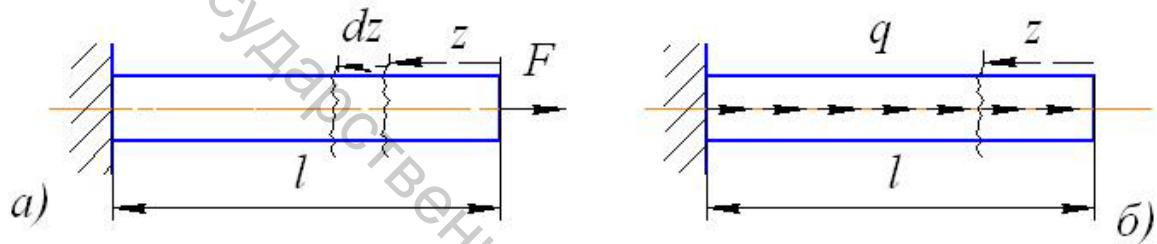


Рисунок 25.7 – Продольная сила в случае  $a)$   $N_z = F$ , в случае  $\delta)$   $N_z = qz$   
В случае  $a)$  (рис. 25.7) удлинение (25.14, 6.3)

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \frac{F}{EA} = \text{const}, \quad (25.15)$$

перемещение после интегрирования

$$w = \frac{F}{EA} z + C,$$

постоянная интегрирования находится из краевого условия  $w(z=l)=0$ :  
 $C = -Fl/(EA)$ , и перемещение

$$w = \frac{F}{EA} (z - l). \quad (25.16)$$

Подставляя в энергию (25.13) удлинение (25.15), после этого энергию  
(25.13) и перемещение (25.16) – в формулу Рэлея (25.10), получим

$$\omega_1^2 = \frac{2U_{\max}}{\int_0^l w^2 dm} = \frac{2 \frac{1}{2} EA \int_0^l \left( \frac{F}{EA} \right)^2 dz}{\int_0^l \left( \frac{F}{EA} \right)^2 (z - l)^2 \frac{m}{l} dz} = 3 \frac{c}{m}, \quad c = \frac{EA}{l}.$$

В случае б) (рис. 25.7) удлинение (6.3)

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \frac{qz}{EA}, \quad (25.17)$$

перемещение после интегрирования

$$w = \frac{1}{2} \frac{q}{EA} z^2 + C,$$

постоянная  $C = -0,5ql^2/(EA)$ , и перемещение

$$w = \frac{1}{2} \frac{q}{EA} (z^2 - l^2). \quad (25.18)$$

Подставляя в энергию (25.13) удлинение (25.17), после этого энергию (25.13) и перемещение (25.18) – в формулу Рэлея, получим

$$\omega_1^2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} EA \int_0^l \left( \frac{qz}{EA} \right)^2 dz}{\int_0^l \left( \frac{1}{2} \frac{q}{EA} \right)^2 (z^2 - l^2)^2 \frac{m}{l} dz} = 2,5 \frac{c}{m}.$$

Частота основного тона

$$\omega_{1a)} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{c}{m}} = 1,74 \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_{1a)} = \sqrt{2,5} \sqrt{\frac{c}{m}} = 1,58 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Точное значение

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} = 1,57 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Верен ответ 2. Краевые условия задачи (рис. 25.8) выполняются в случае б) точно. В нагружении а)  $N_z(z=0) = F \neq 0$  – условие 2 не выполняется.

Отсюда сравнительно низкая точность значения  $\omega_{1a)}$ .

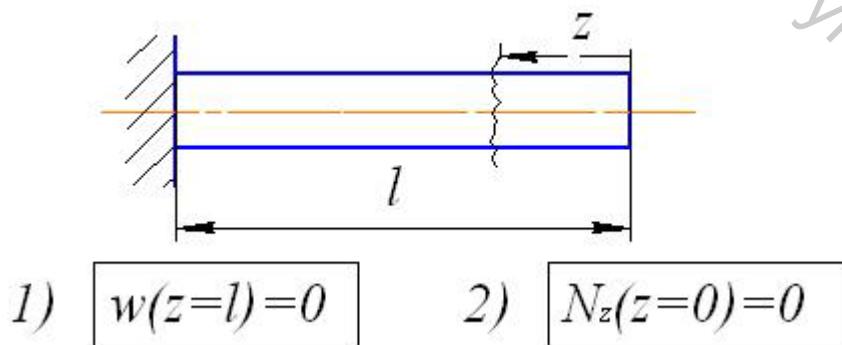


Рисунок 25.8 – Краевые условия в задаче о продольных колебаниях упругого стержня

## 26 Динамические напряжения

На рисунке 26.1 изображен электродвигатель с неуравновешенной массой  $m$  на двух балках. Если пренебречь в первом приближении собственной массой упругих балок, придем к рассмотрению (рис. 25.1) колебательной системы с двумя степенями свободы; наконец, пренебрегая продольными колебаниями двигателя, связанными с удлинениями – укорочениями балок, по сравнению с поперечными изгибами, – к рассмотрению системы с одной степенью свободы.

Приложим (рис. 26.1) к колеблющейся массе даламберовы силы инерции –  $M\ddot{f}$  и  $Q_0$ , противоположную центростремительному ускорению неуравновешенной массы  $m$ . Упругое перемещение массы двигателя  $M$

$$f = \delta_{11} \left( -M\ddot{f} + Q_0 \sin \Omega t \right), \quad (26.1)$$

что можно переписать в виде

$$\ddot{f} + \frac{1}{\delta_{11} M} f = \frac{Q_0}{M} \sin \Omega t. \quad (26.2)$$

В дифференциальном уравнении (26.2)  $\ddot{f}$  – вторая производная перемещения (26.1) по времени (ускорение массы  $M$ ), постоянный коэффициент в левой части – квадрат частоты  $\omega$  (25.11) собственных колебаний двигателя на упругих балках,  $\Omega$  – угловая скорость ротора двигателя с неуравновешенной массой  $m$ . Его решение представляется суммой общего решения однородного уравнения (собственных колебаний, происходящих с частотой  $\omega = 1/\sqrt{\delta_{11} M}$ ) и частного решения неоднородного уравнения (вынужденных колебаний

$$f = A \sin \Omega t, \quad (26.3)$$

происходящих с частотой изменения вынуждающей силы в выражении (26.1)

$$Q = Q_0 \sin \Omega t, \quad (26.4)$$

равной угловой скорости ротора  $\Omega$  двигателя). Ввиду неизбежного (пусть малого) сопротивления внешней среды собственные колебания затухают, колебания массы  $M$  становятся чисто вынужденными (26.3),  $A$  – их амплитуда. Найдем ее, подставляя решение (26.3) в уравнение (26.2):

$$A = \frac{Q_0 / M}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{Q_0 / (\omega^2 M)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \quad (26.5)$$

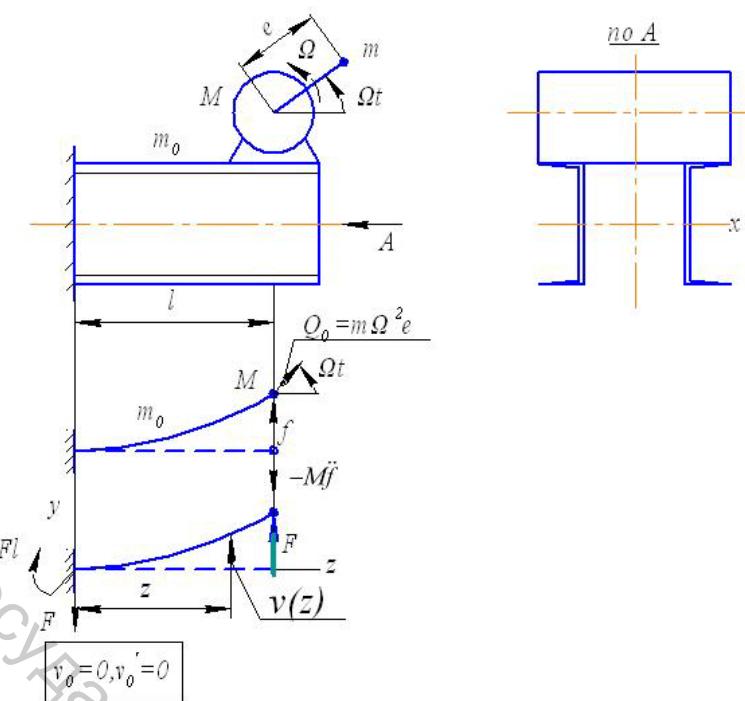


Рисунок 26.1 – Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

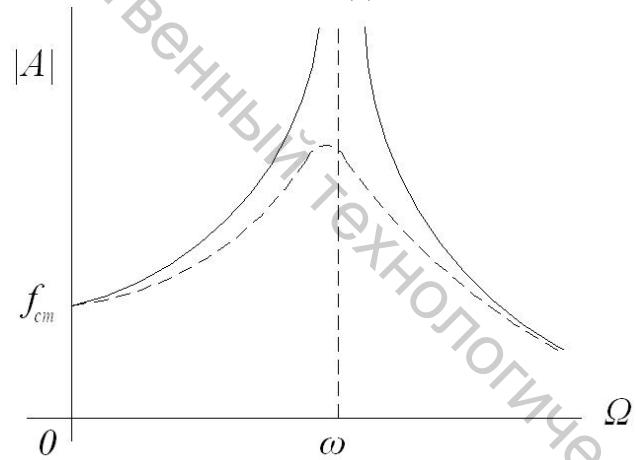


Рисунок 26.2 – Амплитудо-частотная характеристика

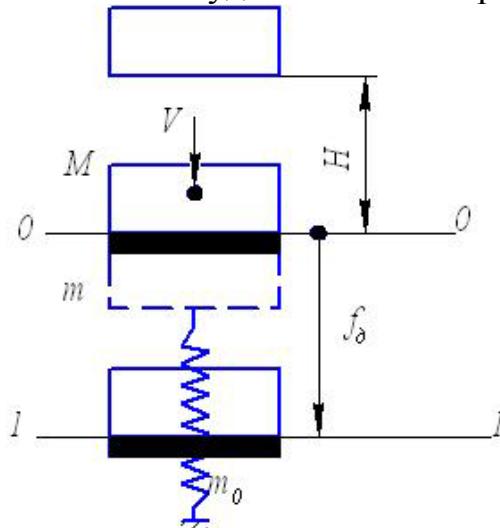


Рисунок 26.3 – Вертикальный удар

где отношение

$$\frac{Q_0}{\omega^2 M} = \frac{Q_0}{\frac{1}{\delta_{11} M} M} = \delta_{11} Q_0 = f_{\tilde{n}\ddot{o}}$$

равно прогибу упругой подвески под действием статически приложенной наибольшей силы (26.4) – статическому прогибу; модуль амплитуды (26.5)

$$|A| = \frac{f_{\tilde{n}\ddot{o}}}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}. \quad (26.6)$$

Ее график – амплитудо-частотная характеристика колебательной системы – представлен на рисунке 26.2. Когда частота винуждающей силы (26.4)  $\Omega$  становится равной собственной частоте  $\omega$ , амплитуда (26.6) становится бесконечно большой. Иными словами, в случае  $\Omega = \omega$  решение (26.3) теряет смысл. Решение в случае равенства частот (резонанса колебаний) – другое: амплитуда вынужденных колебаний растет во времени по линейному закону – происходит «раскачка» колебательной системы. Сопротивление внешней среды ограничит рост амплитуды во времени, максимум кривой  $|A| = f(\Omega)$ , представленной на рисунке 26.2 штрихами, наблюдается вблизи резонансного значения  $\Omega = \omega$ . Вместе с этим, за пределами зоны  $0,75 < \Omega / \omega < 1,25$  действительная амплитуда колебаний мало отличается от амплитуды (26.6).

Заметим, что при относительно низких частотах  $\Omega$  динамический коэффициент

$$k_{\tilde{a}} = \frac{|A|}{f_{\tilde{n}\ddot{o}}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} \quad (26.7)$$

близок к единице, т. е. амплитуда  $|A| \approx f_{\tilde{n}\ddot{o}}$ , соответственно, динамические напряжения в упругой подвеске

$$\sigma_{\tilde{a}} = k_{\tilde{a}} \sigma_{\tilde{n}\ddot{o}} \approx \sigma_{\tilde{n}\ddot{o}} \quad (26.8)$$

находятся в ее статическом нагружении силой  $Q_0$ . Напряжения (26.8) налагаются на постоянно действующие напряжения (на рисунке 26.1 от силы тяжести  $G = Mg$ ), т. е. наибольшие напряжения в подвеске

$$\sigma_{\max} = \sigma(G) + k_{\tilde{a}} \sigma_{\tilde{n}\ddot{o}} (Q_0) \approx \sigma(G) + \sigma_{\tilde{n}\ddot{o}} (Q_0). \quad (26.9)$$

При относительно высоких частотах (по сравнению с собственной частотой) коэффициент (26.7) мал, малы напряжения (26.8) и наибольшие напряжения (26.9)

$$\sigma_{\max} \approx \sigma(G).$$

Поэтому, устанавливая машины всякого рода на упругих основаниях, стремятся снизить собственную частоту  $\omega$ . Правда, при пусках – установках машин на таких основаниях придется столкнуться с резонансом колебаний. Однако, раскачка колебательной системы при резонансе требует времени – если частота  $\Omega$  изменяется достаточно быстро, раскачка далеко не зайдет, ограничившись несколькими сотрясениями.

Учтем массу  $m_0$  (рис. 26.1) упругой подвески. Воспользуемся формулой Рэлея (25.10), задавшись в ней амплитудами колебаний элементов массы  $dm = m_0 dz / l$  – используя их пропорциональными прогибам упругой подвески  $v(z)$  (рис. 26.1) под действием сосредоточенной силы  $F$ , имитирующей силу инерции двигателя согласно универсальному уравнению (17.15)

$$EI_x v(z) = \frac{1}{2} Flz^2 - \frac{1}{6} Fz^3, \quad (26.10)$$

знаменатель формулы Рэлея (25.10)

$$\sum m_i A_i^2 = \int_0^l \left( \frac{m_0}{l} d \right) v^2(z) + Mv^2(z=l). \quad (26.11)$$

Подстановка прогибов (26.10) в сумму (26.11) дает:

$$\sum m_i A_i^2 = \left( M + \frac{33}{140} m_0 \right) v^2(z=l),$$

коэффициент  $K_n = 33/140$  здесь – коэффициент приведения массы подвески к ее свободному концу – месту установки двигателя. Учитывая собственную массу подвески, добавляем к массе двигателя  $M$  приведенную массу  $K_n m_0$ .

Попутно получается (при  $M = 0$ ) основная (наименшая) частота свободных колебаний консольной балки на рисунке 26.1  $\omega_1 = 1 / \sqrt{\delta_{11} K_n m_0}$ , где единичное перемещение (26.10)

$$\delta_{11} = v(l) \Big|_{F=1} = \frac{l^3}{3EI_x};$$

основная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI_x}{l^3 \frac{33}{140} m_0}} = 3,58 \sqrt{\frac{EI_x}{m_0 l^3}}$$

отличается от точного значения

$$\omega = 3,52 \sqrt{\frac{EI_x}{m_0 l^3}}$$

на 1,7 %.

Формула Рэлея использует закон сохранения полной механической энергии. Используем его при определении динамических напряжений при вертикальном ударе (рис. 26.3). Полная энергия слагается из потенциальной энергии и кинетической энергии системы груз – упругий элемент. Потенциальная энергия системы равна сумме энергии положения груза и энергии деформаций упругого элемента, равной работе упругой силы, деформирующей элемент, на перемещении точки ее приложения. Энергия положения в момент 0 принимается равной нулю, в положении 1 она равна  $-Mgf_{\ddot{a}}$ ; энергия деформаций недеформированного элемента в момент 0 равна нулю, в положении 1 она равна

$$\frac{1}{2} F_{\ddot{a}} f_{\ddot{a}} = \frac{1}{2} \delta_{11} F_{\ddot{a}}^2 = \frac{1}{2} \frac{f_{\ddot{a}}^2}{\delta_{11}},$$

где  $F_{\ddot{a}}$  – наибольшее значение упругой силы, развивающейся при ударе,  $f_{\ddot{a}}$  – соответствующая осадка упругого элемента – динамическое перемещение.

Кинетическая энергия в момент 0

$$T = \frac{1}{2} MV^2, \quad (26.12)$$

в момент 1 –  $T = 0$ .

Энергетический баланс

$$O + O + T = -Mgf_{\ddot{a}} + \frac{f_{\ddot{a}}^2}{2\delta_{11}} + O$$

дает уравнение

$$f_{\ddot{a}}^2 - 2f_{\ddot{a}} f_{\ddot{a}} - 2\delta_{11}T = 0, \quad (26.13)$$

где статическое перемещение

$$f_{\ddot{a}} = \delta_{11}Mg.$$

Решение уравнения (26.13)

$$f_{\ddot{a}} = f_{\ddot{a}} + \sqrt{f_{\ddot{a}}^2 + 2\delta_{11}T} = f_{\ddot{a}} \left[ 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\delta_{11}T}{f_{\ddot{a}}^2}} \right], \quad (26.14)$$

в скобках формулы (26.14) – выражение динамического коэффициента  $k_{\ddot{a}}$ . Соответственно, динамические напряжения в упругом элементе

$$\sigma_{\ddot{a}} = \sigma_{\ddot{n}\ddot{o}} k_{\ddot{a}}; \quad (26.15)$$

статические напряжения определяются здесь при статическом нагружении упругого элемента силой  $Mg$ .

Пусть удар приходится не в упругий элемент, а в демпфер массой  $m$  (рис. 26.3). Удар положим неупругим – обе массы ( $M$  и  $m$ ) приобретают после удара одинаковые скорости (движутся, образовав одно тело). Количество движения системы груз – демпфер сохраняется:

$$MV = (M+m)V_1,$$

откуда скорость совместного движения груза с демпфером

$$V_1 = \frac{MV}{M+m} = \frac{V}{1+\frac{m}{M}}.$$

Кинетическая энергия совместного движения груза с демпфером

$$T_1 = \frac{(M+m)V_1^2}{2} = \frac{M\left(1+\frac{m}{M}\right)V^2}{2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} = \frac{MV^2}{2\left(1+\frac{m}{M}\right)},$$

или, учитя кинетическую энергию груза (26.12),

$$T_1 = \frac{T}{1+\frac{m}{M}}. \quad (26.16)$$

Заметим, что в массу демпфера  $m$  можно включить массу упругого элемента  $m_0$ , приведенную к точке удара. Тогда кинетическая энергия (26.16) приобретает вид

$$T_1 = \frac{T}{1+\frac{m+K_i m_0}{M}}. \quad (26.17)$$

Именно, ее следует использовать в выражении динамического коэффициента:

$$k_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\delta_{11} T_1}{f_{\ddot{n}\ddot{o}}^2}}. \quad (26.18)$$

Поскольку энергия (26.17) меньше энергии (26.12), использование демпфера снижает коэффициент  $k_{\ddot{a}}$ , соответственно, снижаются динамические напряжения (26.15).

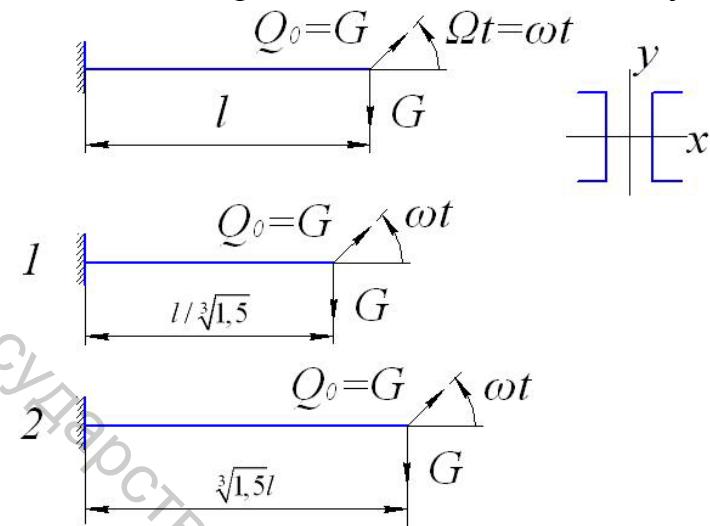
Если груз (не имея начальной скорости) падает с высоты  $H$  (рис. 26.3), кинетическая энергия груза в формуле (26.17)

$$T = MgH.$$

При  $H = 0$  (при нагружении элемента всей величиной груза) энергия  $T = 0$ ,  $T_1 = 0$ , и динамический коэффициент (26.18) равен 2 – динамические напряжения (26.15) вдвое больше статических (при медленно возрастающей нагрузке).

## Тестирование

26.1 Колебательная система на рисунке ( $Q_0 = G$ ) находится в резонансном режиме. Выводя систему из резонанса, уменьшают (режим 1) – увеличивают (режим 2) в  $\sqrt[3]{1,5}$  раз длину балок, поддерживающих двигатель. Как соотносятся напряжения в балках в этих двух режимах?



Варианты ответа

1.  $\sigma_1 < \sigma_2$ .
2.  $\sigma_1 > \sigma_2$ .
3.  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

26.2 Рассматривая горизонтальный удар (рис. 26.4) как частный случай вертикального, получите выражение для динамического коэффициента. Какое из выражений, следующих ниже, правильное?

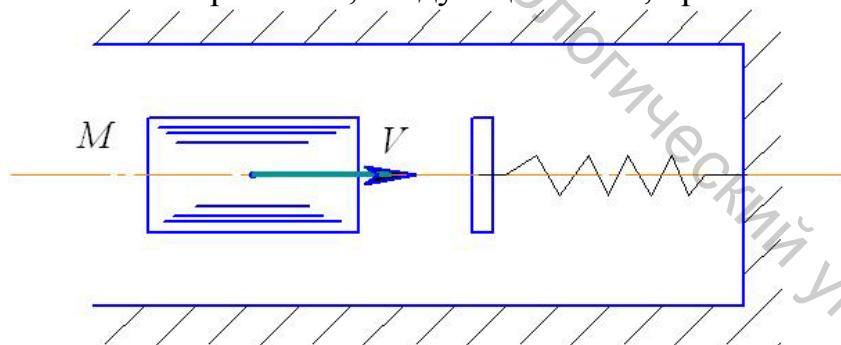


Рисунок 26.4 – Горизонтальный удар

Варианты ответа

1.  $k_a = 1 + \sqrt{2 \frac{\delta_{11}T}{f_{\text{нр}}^2}}$ .
2.  $k_a = \sqrt{1 + 2 \frac{\delta_{11}T}{f_{\text{нр}}^2}}$ .
3.  $k_a = \sqrt{2 \frac{\delta_{11}T}{f_{\text{нр}}^2}}$ .

## Комментарии

### 26.1 Наибольшие напряжения (26.9) в балках

$$\sigma_{\max} = \sigma(G) + k_{\ddot{a}} \sigma_{\ddot{n}\ddot{o}} (Q_0) = \sigma(G) + k_{\ddot{a}} \sigma_{\ddot{n}\ddot{o}} (G),$$

где напряжения

$$\sigma(G) = \frac{Gl}{W_x}, \quad \sigma_{\ddot{n}\ddot{o}}(G) = \frac{Gl}{W_x}$$

( $W_x$  – момент сопротивления поперечных сечений балок), динамический коэффициент (26.7)  $k_{\ddot{a}} = 1/\left|1 - \Omega^2/\omega^2\right|$ ,  $\omega^2 = 1/(\delta_{11}M)$ , единичное перемещение (26.10)  $\delta_{11} = v_0(l)|_{F=1} = l^3/(3EI_x)$ ,  $I_x$  – момент инерции поперечных сечений балок.

В первом режиме длина балок уменьшается в  $\sqrt[3]{1,5}$  раз, единичное перемещение уменьшается в 1,5 раза, квадрат собственной частоты увеличивается в 1,5 раза, динамический коэффициент

$$k_{\ddot{a}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{1,5\omega^2}\right|} = 3;$$

напряжения  $\sigma(G)$  и  $\sigma_{\ddot{n}\ddot{o}}(G)$  уменьшаются в  $\sqrt[3]{1,5} = 1,14$  раз, наибольшие напряжения

$$\sigma_1 = 0,88 \left( \frac{Gl}{W_x} \right) + 3 \cdot 0,88 \left( \frac{Gl}{W_x} \right) = 3,5 \frac{Gl}{W_x}.$$

Во втором режиме длина балок увеличивается в  $\sqrt[3]{1,5}$  раза, квадрат собственной частоты уменьшается в 1,5 раза, динамический коэффициент

$$k_{\ddot{a}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega^2/1,5}\right|} = 2;$$

напряжения  $\sigma(G)$  и  $\sigma_{\ddot{n}\ddot{o}}(G)$  увеличиваются в  $\sqrt[3]{1,5} = 1,14$  раз, наибольшие напряжения

$$\sigma_2 = 1,14 \left( \frac{Gl}{W_x} \right) + 2 \cdot 1,14 \left( \frac{Gl}{W_x} \right) = 3,4 \frac{Gl}{W_x}.$$

Соотношение 2 верное.

26.2 Энергия положения тела – ударника на рисунке 26.4 не изменяется – можно положить ее равной нулю. В уравнении (26.13) второе слагаемое исчезает. Динамическое перемещение  $f_{\ddot{a}} = \sqrt{2\delta_{11}T}$ , или

$$f_{\ddot{a}} = f_{\ddot{n}\ddot{o}} \sqrt{\frac{2\delta_{11}T}{f_{\ddot{n}\ddot{o}}^2}}.$$

Выражение 3 верное.

## 27 Устойчивость равновесия упругих сжатых стержней

На рисунке 27.1 показан абсолютно твердый стержень, опирающийся на упругий шарнир и находящийся под действием силы  $F$ , направленной вдоль стержня. Если сила достаточно мала, стержень, так или иначе отклоненный от вертикали, вернется (может быть после нескольких колебаний) в исходное положение. Если сила достаточно велика, стержень не вернется в исходное положение, далеко уйдя от него.

Назовем силу  $F$  критической ( $F_{kp}$ ), если стержень, отклонившись от вертикали на малый угол, не возвращается в исходное положение, пребывая в новом равновесии, иными словами, при силе, равной критической, стержень получает набор наклонных форм равновесия, существующих с вертикальной формой. Рассматривая (рис. 27.1) одну из них, напишем уравнение моментов относительно оси шарнира  $A$ :

$$\sum m_A = 0, \quad c\varphi - F_{e\delta}l \sin \varphi = 0. \quad (27.1)$$

При малых углах  $\sin \varphi \approx \varphi$  уравнение (27.1) приобретает вид

$$\varphi(c - F_{e\delta}l) = 0, \quad \varphi \neq 0,$$

откуда критическая сила

$$F_{e\delta} = \frac{\tilde{n}}{l}. \quad (27.2)$$

Если не прибегать к приближенному равенству  $\sin \varphi \approx \varphi$ , можно построить в закритической области  $F > F_{kp}$  график (рис. 27.1) зависимости  $F = f(\varphi)$ : уравнение (27.1) переписывается при учете значения (27.2) в виде

$$\frac{F}{F_{e\delta}} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (27.3)$$

При  $\varphi = \pi/6$ , например, имеем  $F = 1,04 F_{e\delta}$  – как видим, сравнительно, незначительное (на 4 %) превышение критической силы приводит к заметному (на 30 %) отклонению стержня от вертикали.

При  $F < F_{kp}$  вертикальная форма равновесия стержня устойчива, при  $F > F_{kp}$  неустойчива.

Аналогичным образом рассматривается (рис. 27.2) упругий (прямолинейный) сжатый стержень. При силе, равной критической, с прямолинейной формой равновесия, показанной штрихами, существуют (при наличии малых отклонений – прогибов) искривленные формы. Дифференциальное уравнение одной из них (17.6)

$$v''(z) = \frac{M_x}{EI_x} = -\frac{F_{e\delta}v(z)}{EI_x} \quad (27.4)$$

(ибо при положительных изгибающих моментах  $M_x$  прогибы  $v(z)$  отрицательны). Введем обозначение

$$k^2 = \frac{F_{e\delta}}{EI_x} \quad (27.5)$$

и перепишем уравнение (27.4):

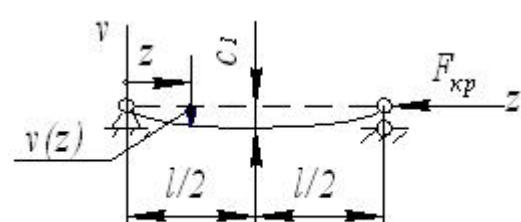
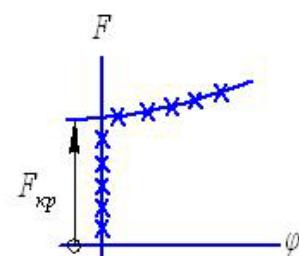
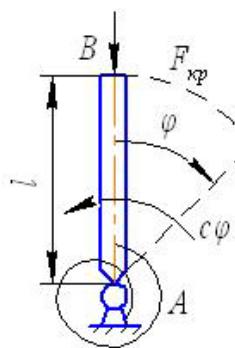


Рисунок 27.1 – Твердый стержень, опирающийся на упругий шарнир

Рисунок 27.2 – К выводу формулы Эйлера

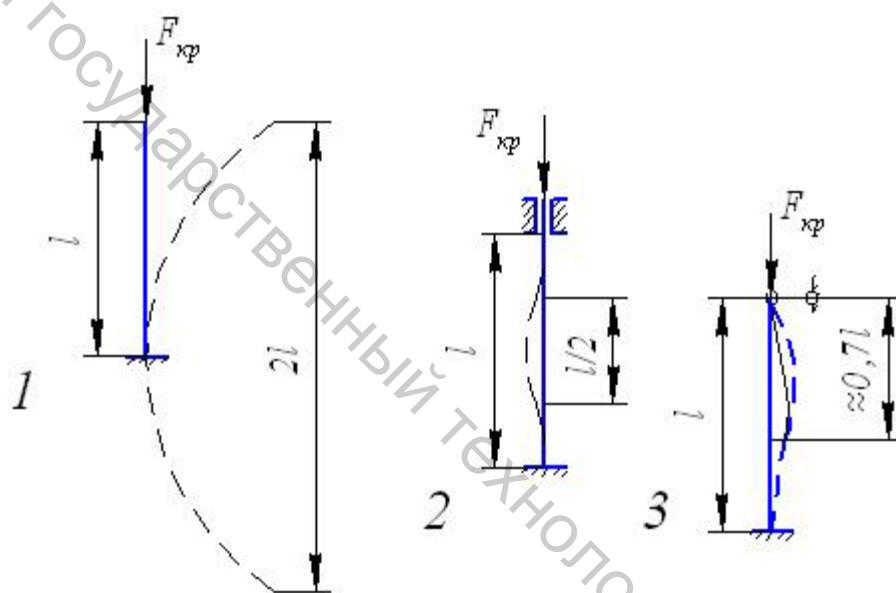


Рисунок 27.3 – Приведенная длина стойки

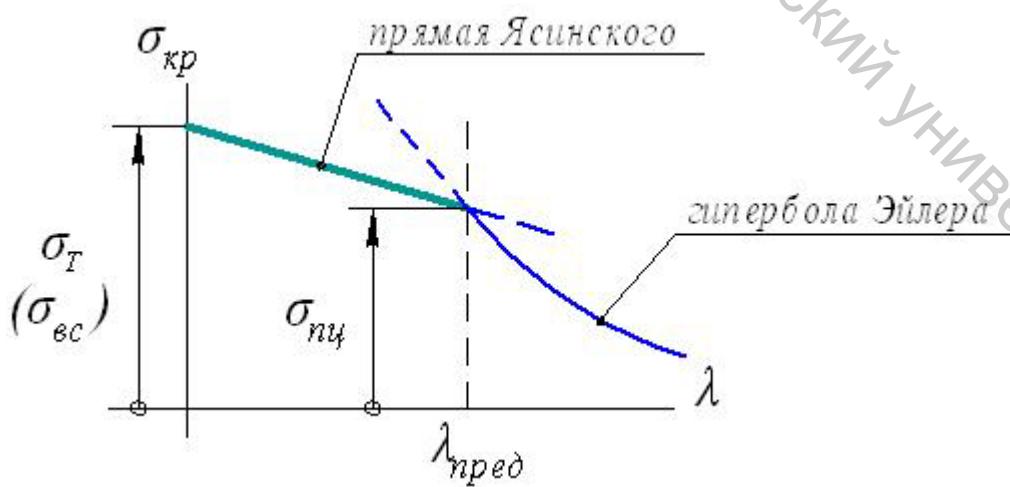


Рисунок 27.4 – Диаграмма критических напряжений

$$v'' + k^2 v = 0.$$

Его решение

$$v(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz, \quad (27.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные интегрирования. Подстановка решения (27.6) в краевые условия на рисунке 27.2 дает

$$v(0) = C_2 = 0, \quad v(l) = C_1 \sin kl = 0,$$

откуда

$$\sin kl = 0, \quad kl = n\pi, \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

форма равновесия – синусоида ( $n$  полуволн)

$$v(z) = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (27.7)$$

Возвращаясь к обозначению (27.5), найдем критические силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (27.8)$$

наименьшая из них (эйлерова сила) получается при  $n = 1$ :

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad (27.9)$$

соответствующая форма равновесия (27.7) – полуволна (рис. 27.2)

$$v(z) = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (27.10)$$

Постоянная  $C_1$  остается неопределенной, давая набор искривленных форм равновесия.

Если вместо приближенного (27.4) использовать точное нелинейное уравнение упругой кривой

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = -\frac{Fv}{EI_x},$$

получим в закритической области  $F > F_{\text{кр}}$  (27.9) решение, аналогичное решению уравнения (27.3) с графиком, представленным на рисунке 27.1. Относительно небольшое (на 4 %) превышение эйлеровой критической силы (27.9) сообщает большой ( $0,16 l$ ) прогиб  $C_1$  (рис. 27.2). Прямолинейная форма равновесия устойчива при  $F < F_{\text{кр}}$ , неустойчива при  $F > F_{\text{кр}}$ .

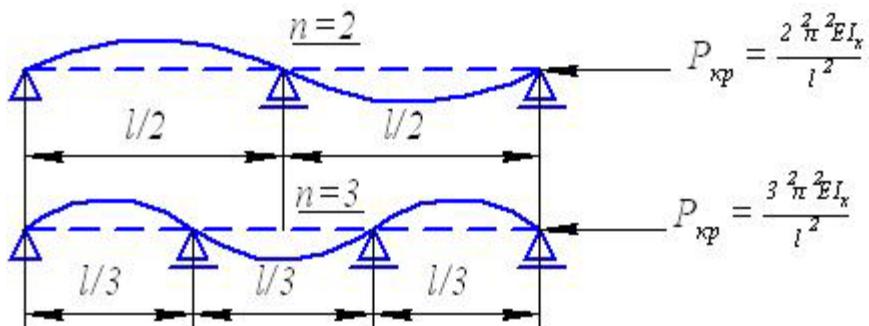


Рисунок 27.5 – Критические силы многопролетных стержней

Что же касается критических сил (27.8) и соответствующих искривленных форм равновесия (27.7), они реализуются при сжатии многопролетных стержней (рис. 27.5).

Рассмотрим опорные закрепления (рис. 27.3), отличные от шарнирных (рис. 27.2). В последнем (основном) случае стержень искривляется по полуволне синусоиды (27.10). В случаях защемленных стержней (рис. 27.3.1, 27.3.2) стержни искривляются по синусоиде и нетрудно привести эти случаи к основному (рис. 27.2), выделяя полуволны синусоиды. Соответственно, выделяются длины (приведенные) эквивалентного шарнирно опертого (рис. 27.2) стержня – в случае на рисунке 27.3.1 длина  $l_{i\delta} = 2l$ , в случае на рисунке 27.3.2  $l_{i\delta} = 0,5l$ .

В случае на рисунке 27.3.3 искривленная форма равновесия стержня – не синусоида, но в рамках приближенного подхода можно и здесь выделить «полуволну», соответствующая приведенная длина  $l_{i\delta} \approx 0,7l$ . Вводя коэффициент приведенной длины  $\mu$  ( $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 0,5$ ,  $\mu_3 = 0,7$ ), перепишем формулу Эйлера (27.9):

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}. \quad (27.11)$$

Формулы (27.9, 27.11) – результат решения краевой задачи для дифференциального уравнения упругой кривой (27.4): эйлерово напряжение

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_x}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{i\delta}, \quad (27.12)$$

где  $\sigma_{i\delta}$  – предел пропорциональности материала стержня, радиус инерции поперечного сечения стержня

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad (27.13)$$

гибкость, определяемая опорными закреплениями (см. коэффициент  $\mu$ ), длиной  $l$ , формой и размерами поперечного сечения стержня (см. радиус инерции (27.13)),

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x}. \quad (27.14)$$

Условие (27.12) дает ограничение

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{i\delta}}},$$

при гибкостях (27.14), меньших предельной

$$\lambda_{\text{дл}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{i\delta}}}, \quad (27.15)$$

определенной материалом стержня, формула Эйлера (27.11) не применима. При гибкостях, меньших предельной (27.15), следует пользоваться

ся результатами экспериментов, оформляемыми в первом приближении линейной зависимостью – прямой Ясинского (рис. 27.4):

$$\sigma_{\dot{\varepsilon}\delta} \approx a - \hat{a}\lambda,$$

где постоянные, определяемые материалом стержня,

$$a \approx \sigma_{i\delta\ddot{a}\dot{a}}, \quad \hat{a} = \frac{\sigma_{i\delta\ddot{a}\dot{a}} - \sigma_{i\delta}}{\lambda_{i\delta\ddot{a}\dot{a}}};$$

за предельное напряжение при сжатии принимают либо предел текучести  $\sigma_T$ , либо предел прочности при сжатии  $\sigma_{sc}$  материала стержня.

Условие устойчивости стержня

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}}. \quad (27.16)$$

Допускаемое напряжение на устойчивость в условии (27.16)

$$[\sigma]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}} = \frac{\sigma_{\dot{\varepsilon}\delta}}{[s]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}}} \quad (27.17)$$

( $\sigma_{kp}$  – критическое напряжение, представленное диаграммой на рисунке 27.4,  $[s]_{yctm}$  – коэффициент запаса устойчивости). Допускаемое напряжение (27.17) представляется в виде

$$[\sigma]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}} = \left( \frac{\sigma_{\dot{\varepsilon}\delta}}{\sigma_T} \cdot \frac{[s]}{[s]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}}} \right) \frac{\sigma_T}{[s]} = \varphi[\sigma],$$

где  $\sigma_{kp} \leq \sigma_T$  (рис. 27.4),  $[s]_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}} > [s]$  (ибо потеря устойчивости, при которой перемещения (и напряжения) нарастают неудержимо, намного опаснее временной текучести материала), как следствие, коэффициент продольного изгиба

$$\varphi < 1;$$

отношение  $\sigma_T / [s]$  – основное допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Условие устойчивости (27.16) переписывается:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]. \quad (27.18)$$

Понятно, что коэффициент  $\varphi$ , определяемый, в основном, отношением  $\sigma_{kp} / \sigma_T$ , – функция (рис. 27.4) гибкости стержня (27.14) (если нет оснований считать его стержнем с переменным по длине поперечным сечением). Допускаемая нагрузка – меньшая из двух

$$[P] = \varphi[\sigma] A_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}}, \quad [P] = [\sigma] A_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}}$$

( $A_{\text{нетто}}$  в отличие от площади  $A_{\text{брутто}}$  – площадь сечения ослабленного участка стержня).

В проектном расчете условие (27.18) содержит два неизвестных – площадь сечения  $A$  и коэффициент продольного изгиба  $\varphi$ . Требуемую площадь сечения  $A$  ищем, ведя расчет последовательными приближениями: задаемся каким-либо средним значением  $\varphi$ , например,  $\varphi = 0,5$ , после этого следуем схеме

$$\varphi \rightarrow A = \frac{F}{\varphi[\sigma]} \rightarrow \text{для } \varphi \rightarrow i_x \rightarrow \lambda = \frac{\mu l}{i_x} \rightarrow \varphi_1.$$

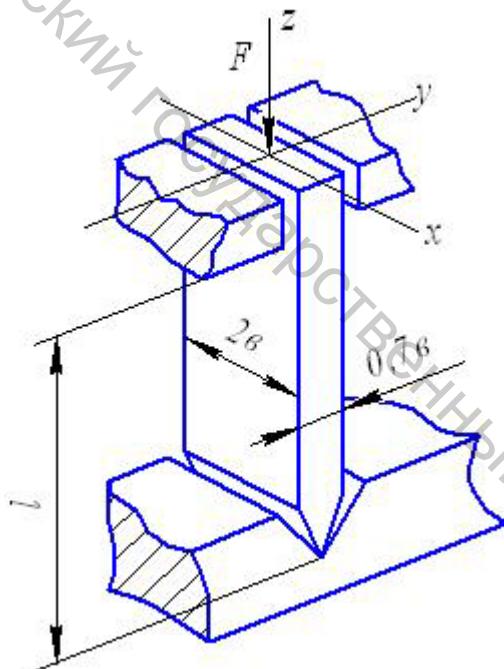
Сравнивая коэффициенты  $\varphi_1 = f(\lambda)$  и взятый вначале  $\varphi$ , либо удовлетворяется площадью  $A$  (при

$$\frac{|\varphi - \varphi_1|}{\varphi} 100\% \leq 3\%),$$

либо продолжаем, используя другое начальное значение  $\varphi$ .

### Тестирование

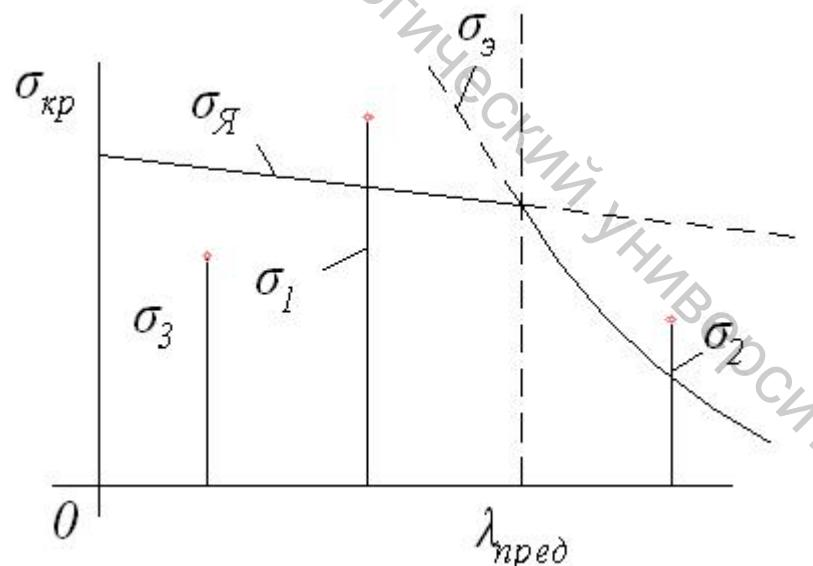
27.1 На рисунке показан сжатый стержень с опорными закреплениями, по-разному проявляющими себя в главных плоскостях инерции стержня  $xz$  и  $yz$ . В какой из этих плоскостей произойдет потеря устойчивости вертикальной формы равновесия?



Варианты ответа

1. В плоскости  $xz$ .
2. В плоскости  $yz$ .
3. В обеих плоскостях.

27.2 На рисунке представлена диаграмма критических напряжений. При каком из трех напряжений устойчивость стойки гарантирована?



Варианты ответа

1. При напряжении  $\sigma_1$ . 2. При напряжении  $\sigma_2$ . 3. При напряжении  $\sigma_3$ .

### Комментарии

27.1 Диаграмма на рисунке 27.4 – график монотонно убывающей величины  $\sigma_{kp}$ . Критическая нагрузка на стержень

$$F_{\dot{e}\delta} = \sigma_{\dot{e}\delta} A$$

тем меньше, чем больше гибкость  $\lambda$  (27.14).

Гибкость стержня в плоскости  $xz$

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} l}{i_y}, \quad (27.19)$$

где коэффициент приведенной длины при опорных закреплениях, проявляющих себя в плоскости  $xz$  как на рисунке 27.3.1,  $\mu_{xz} = 2$ ; радиус инерции (27.13) прямоугольного сечения

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{0,7\hat{a} \cdot (2\hat{a})^3}{12 \cdot 0,7\hat{a} \cdot 2\hat{a}}} = \frac{2\hat{a}}{\sqrt{12}};$$

гибкость (27.19)

$$\lambda_{xz} = \frac{2l}{2\hat{a}} \sqrt{12} = \sqrt{12} \frac{l}{\hat{a}}. \quad (27.20)$$

Гибкость стержня в плоскости  $yz$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} l}{i_x}, \quad (27.21)$$

где коэффициент приведенной длины при опорных закреплениях, проявляющих себя в плоскости  $yz$  как на рисунке 27.3.3,  $\mu_{yz} = 0,7$ ; радиус инерции

$$i_x = \frac{0,7\hat{a}}{\sqrt{12}};$$

гибкость (27.21)

$$\lambda_{yz} = \frac{0,7l}{0,7\hat{a}} = \sqrt{12} \frac{l}{\hat{a}}$$

равна гибкости (27.20). Стойка равноустойчива в обеих главных плоскостях инерции. Верен ответ 3.

27.2 При гибкости, большей предельной (27.15), сжатый стержень устойчив, если напряжение в нем

$$\sigma < \sigma_y.$$

При гибкости, меньшей предельной, стержень устойчив при напряжениях

$$\sigma < \sigma_y.$$

Верен ответ 3.

Напряжение  $\sigma_1 < \sigma_y$ , но  $\sigma_1 > \sigma_{\bar{y}}$ ; напряжение  $\sigma_2 < \sigma_{\bar{y}}$ , но  $\sigma_2 > \sigma_y$ ; напряжение  $\sigma_3 < \sigma_{\bar{y}}$  и  $\sigma_3 < \sigma_y$ .

## 28 Продольный и продольно-поперечный изгиб

На рисунке 28.1 показан искривленный стержень, полученный из прямолинейного длиной  $l$ . Проекция отрезка искривленной оси стержня длиной  $ds$ , равной длине  $dz$  отрезка прямолинейного (до искривления) стержня, на ось  $z$  – в предположении малости углов  $\varphi$  –

$$ds \cos \varphi = dz \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx dz \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right) \approx dz \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2\right) \approx dz \left[1 - \frac{1}{2} (v')^2\right],$$

где  $v$  – малые прогибы стержня. Интеграл

$$\lambda = \int_0^l (dz - ds \cos \varphi)$$

даст величину сближения концов стержня при его искривлении:

$$\lambda = \int_0^l \left[ dz - dz + \frac{1}{2} (v')^2 dz \right] = \int_0^l \frac{1}{2} (v')^2 dz. \quad (28.1)$$

Положим, что стержень искривлен по полуволне синусоиды

$$v = f \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (28.2)$$

Используя в интеграле (28.1) углы  $\varphi$  – производные прогибов (28.2)

$$\varphi \approx v' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \quad (28.3)$$

и формулу

$$\cos^2 \frac{\pi z}{l} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi z}{l}}{2},$$

получим сближение

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4} \frac{f^2}{l}. \quad (28.4)$$

На рисунке 28.2 изображен продольный изгиб предварительно искривленного стержня. Теория такого изгиба позволит оценить влияние начальной (обычно, малой) кривизны стержня на величину предельной нагрузки сжатой стойки, равной критической (эйлеровой, если гибкость ее достаточно велика).

Дополнительное сближение концов шарнирно-оперто стержня на рисунке 28.2 при его изгибе силой  $F$

$$\lambda_1 = \lambda - \lambda_0.$$

Если предположить, что стержень искривляется по полуволне синусоиды (28.2), найдем, используя формулу (28.4):

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4l} (f^2 - f_0^2) = \frac{\pi^2}{4l} \left[ (f_0 + f_1)^2 - f_0^2 \right] = \frac{\pi^2}{4l} \left[ 2f_1 f_0 + f_1^2 \right]. \quad (28.5)$$

Кривизна стержня [4]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}}$$

при малых углах  $\varphi$  ( $v' \ll 1$ )

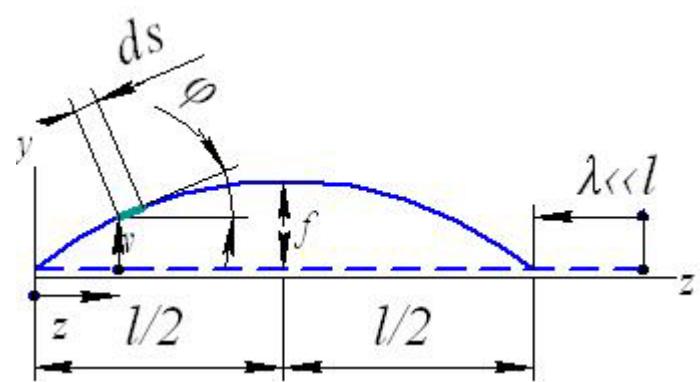


Рисунок 28.1 – Сближение концов стержня при его искривлении

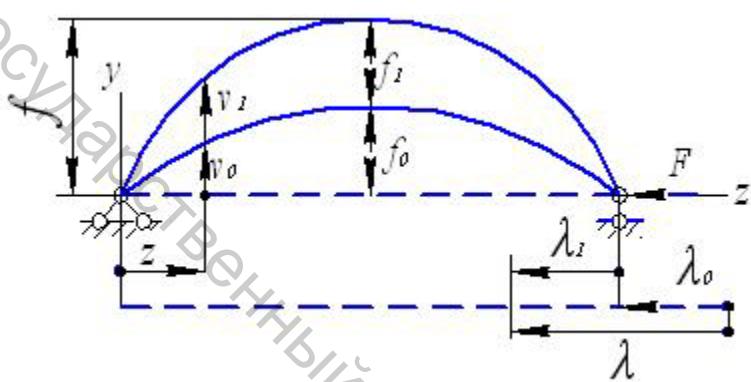


Рисунок 28.2 – Продольный изгиб шарнирно-опертого стержня

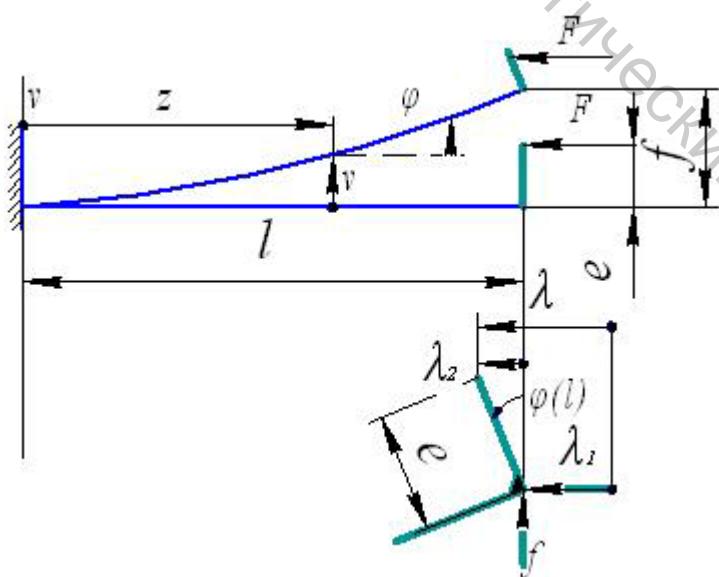


Рисунок 28.3 – Эксцентризитет сжимающей силы

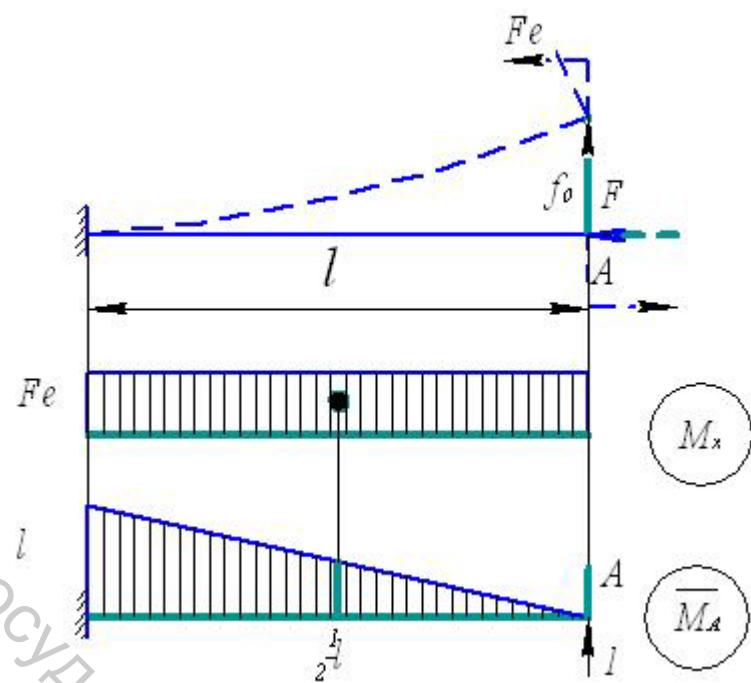


Рисунок 28.4 – Поперечный изгиб защемленного стержня

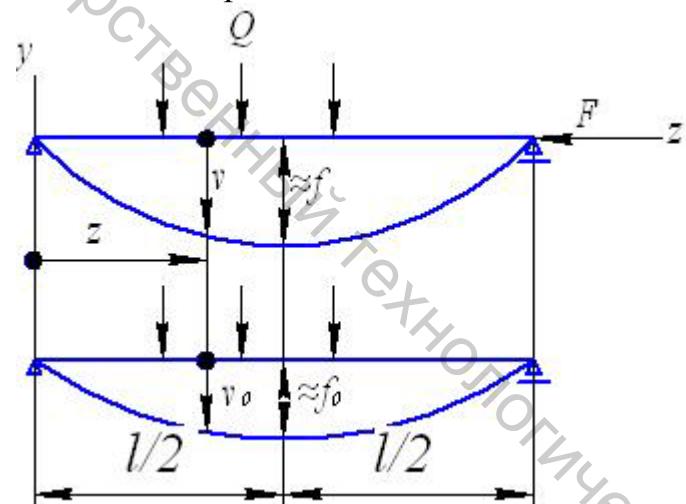


Рисунок 28.5 – Продольно-поперечный изгиб

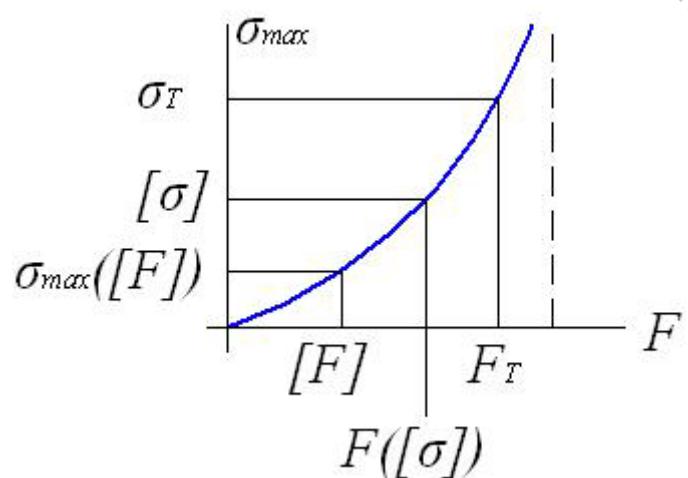


Рисунок 28.6 – К вычислению допускаемой нагрузки ( $[s]=2$ )

$$\frac{1}{\rho} \approx v'' . \quad (28.6)$$

Дифференцируя производную (28.3), найдем кривизну

$$\frac{1}{\rho} = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} . \quad (28.7)$$

Связем приращение первоначальной кривизны  $1/\rho_0$  (28.6) с изгибающим моментом:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad v'' - v''_0 = \frac{M_x}{EI_x}, \quad v''_1 = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (28.8)$$

$v_1$  – дополнительный (возникающий при изгибе) прогиб. Потенциальная энергия упругих деформаций (23.6) при изгибе

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} = \frac{EI_x}{2} \int_0^l \left( \frac{M_x}{EI_x} \right)^2 dz, \quad (28.9)$$

или – см. формулы (28.8), (28.7)

$$U = \frac{EI_x}{2} \int_0^l f_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi z}{l} = \frac{\pi^4 EI_x}{4l^3} f_1^2 .$$

Воспользуемся далее принципом возможных перемещений [5]: сумма работ силы  $F$  и упругих сил в состоянии равновесия стержня на любом возможном в этом состоянии перемещении стержня равна нулю. Сообщая стержню возможные (бесконечно малые) перемещения – прогибы, найдем дифференцированием сближения (28.5) возможное сближение концов стержня:

$$\delta \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4l} [2f_0 + 2f_1] \delta f_1, \quad (28.10)$$

работа силы  $F$  на сближении (28.10)

$$F \delta \lambda_1. \quad (28.11)$$

Работа упругих сил равна убыли потенциальной энергии (28.9):

$$-\delta U = -\frac{\pi^4 EI_x}{4l^3} 2f_1 \delta f_1. \quad (28.12)$$

Суммируя работы (28.11) и (28.12), получим уравнение

$$F \frac{\pi^2}{2l} (f_0 + f_1) \delta f_1 - \frac{\pi^4 EI_x}{2l^3} f_1 \delta f_1 = 0,$$

откуда дополнительная стрела прогиба в состоянии равновесия изогнутого стержня

$$f_1 = \frac{f_0}{\frac{F_y}{F} - 1},$$

где  $F_y$  – эйлерова сила шарнирно-оперто стержня:

$$F_y = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (28.13)$$

Полная стрела прогиба

$$f = f_0 + f_1 = f_0 + \frac{f_0}{\frac{F_y}{F} - 1} = \frac{f_0 \frac{F_y}{F}}{\frac{F_y}{F} - 1} = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_y}}. \quad (28.14)$$

При  $F \rightarrow F_y$  стрела прогиба (28.14) стремительно нарастает, вместе с ней столь же стремительно растут напряжения в стержне. Если они вместе с этим находятся в пределах пропорциональности, за предельную сжимающую нагрузку естественно принять эйлерову критическую силу (28.13) прямого стержня. Вывод – наличие начальной кривизны у сжатого стержня не сказывается на величине предельной сжимающей нагрузки (при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности!).

На рисунке 28.3 изображен защемленный стержень, сжатый нагрузкой, приложенной к нему с эксцентрикитетом. Выясним его влияние на величину предельной сжимающей нагрузки.

Положим, что стержень на рисунке 28.3 искривляется по четверти волн косинусоиды

$$v = f \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right). \quad (28.15)$$

Первая производная прогиба (28.15)

$$\varphi \approx v' = f \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l}. \quad (28.16)$$

Сближение (28.1) правого конца стержня с заделкой

$$\lambda_1 = \int_0^l \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{\pi^2}{16} \frac{f^2}{l}. \quad (28.17)$$

Сближение точки приложения силы  $F$  за счет поворота конца стержня (рис. 28.3) на угол (28.16) при  $z = l$

$$\lambda_2 \approx l\varphi(l) = ef \frac{\pi}{2l}. \quad (28.18)$$

Полное сближение, равное сумме сближений (28.17, 28.18),

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\pi^2}{16} \frac{f^2}{l} + \frac{\pi}{2} \frac{ef}{l}. \quad (28.19)$$

Продифференцируем выражение (28.16) и найдем потенциальную энергию упругих деформаций (28.9), учитя выражение (28.8):

$$\begin{aligned} v'' &= f \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi z}{2l}, \\ U &= \frac{EI_x}{2} \int_0^l (v'')^2 dz = \frac{\pi^4}{64} \frac{EI_x}{l^3} f^2. \end{aligned} \quad (28.20)$$

Подставляя сближение (28.19) и энергию (28.20) в уравнение работ  $F\delta\lambda - \delta U = 0$ , получим уравнение

$$F \left( \frac{\pi^2}{8} \frac{f}{l} \delta f + \frac{\pi}{2} \frac{e}{l} \delta f \right) - \frac{\pi^4}{32} \frac{EI_x}{l^3} f \delta f = 0,$$

его решение

$$f = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{F}{F_y} e}{1 - \frac{F}{F_y}}, \quad (28.21)$$

где  $F_y$  – эйлерова критическая сила прямого защемленного стержня

$$F_y = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2}. \quad (28.22)$$

Прогибу (28.21) можно придать другой вид – вид (28.14), используя выражение (28.22), получим

$$f = \frac{\frac{4}{\pi} \frac{4l^2}{\pi^2 EI_x} Fe}{1 - \frac{F}{F_y}} = \frac{\frac{16}{\pi^3} \frac{(Fe)l^2}{EI_x}}{1 - \frac{F}{F_y}} = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_y}}. \quad (28.23)$$

«Начальный» прогиб в формуле (28.23)

$$f_0 = \frac{16}{\pi^3} \frac{(Fe)l^2}{EI_x} \approx \frac{1}{2} \frac{(Fe)l^2}{EI_x}. \quad (28.24)$$

Понятно и в этом случае, что при напряжениях, находящихся в пределах пропорциональности, эксцентрикситет сжимающей силы не оказывается на величине предельной нагрузки – она определяется по формуле (28.22), выведенной для случая строгого продольной нагрузки (приложенной к стержню без эксцентрикитета).

На рисунке 28.4 показан поперечный изгиб защемленного стержня парой сил с моментом  $Fe$  – она образуется при параллельном переносе сжимающей силы  $F$  (рис. 28.3) на ось стержня. Прогиб свободного конца стержня находится по теореме Максвелла – Мора (23.10) и правилу Верещагина (23.12):

$$f_0 = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_A dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} [(Fe) \cdot l] \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} \frac{(Fe)l^2}{EI_x}. \quad (28.25)$$

Как видим результат (28.25) близок к результату (28.24) – «начальный» прогиб в формуле (28.23) можно находить, учитывая только поперечную составляющую продольно-поперечной нагрузки.

Наибольшие напряжения при продольно-поперечном изгибе (рис. 28.3)

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{F}{A} + \frac{F(f+e)}{W_x} = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_x} + \frac{Ff_0}{1 - \frac{F}{F_y}},$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{x0}}{W_x} + \frac{Ff_0}{1 - \frac{F}{F_y}}, \quad (28.26)$$

где  $M_{x0} = Fe$  – изгибающий момент от поперечной составляющей – момента  $Fe$ .

Первое и второе слагаемые доставляются принципом независимости действия сил, использующим первоначальные размеры стержня. Третье слагаемое – результат учета прогиба  $f$ , следовательно, отступления от принципа независимости действия сил – принципа наложения. Согласно ему напряжения при продольно-поперечном изгибе на рисунке 28.3 равны сумме напряжений при изгибе парой с моментом  $Fe$  и сжатии силой  $F$  (рис. 28.4).

При достаточно больших жесткостях  $EI_x$  эйлерова сила (28.22)

$$F_y \ll F,$$

прогиб (28.24 – 28.25)

$$f_0 \ll e, Ff_0 \ll M_{x0},$$

третьим слагаемым в формуле (28.26) возможно пренебречь, и мы возвращаемся к принципу независимости действия сил.

В общем случае продольно-поперечного изгиба (рис. 28.5) формула (28.26) переписывается: наибольшие напряжения в произвольном сечении гибкой балки

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{x0}}{W_x} + \frac{Fv_0}{1 - \frac{F}{F_y}}, \quad (28.27)$$

где  $M_{x0}$  и  $v_0$  – изгибающий момент и прогиб от поперечной нагрузки. Кстати, наибольший прогиб шарнирно-опертой балки (рис. 28.5) – при поперечной нагрузке, изгибающей балку в одну сторону, – близок к прогибу в середине пролета (при  $z=l/2$ ) – среднее сечение такой балки одно из опасных.

График зависимости (28.26) представлен на рисунке 28.6. Напряжение  $\sigma_{\max}$  растет быстрее сжимающей силы  $F$ .

Пусть коэффициент запаса прочности  $[s]=2$ . Отношение предельной сжимающей нагрузки  $F_T$ , отвечающей появлению текучести в опасном сечении стержня ( $\sigma_{\max} = \sigma_T$ ), к нагрузке, при которой  $\sigma_{\max} = [\sigma] = \sigma_T / [s]$ ,

$$\frac{F_T}{F([\sigma])} < \frac{\sigma_T}{[\sigma]} = [s].$$

Если допускаемую нагрузку определять по допускаемым напряжениям  $[\sigma]$ , требуемого отступления от предельного состояния не получить.

Допускаемая нагрузка

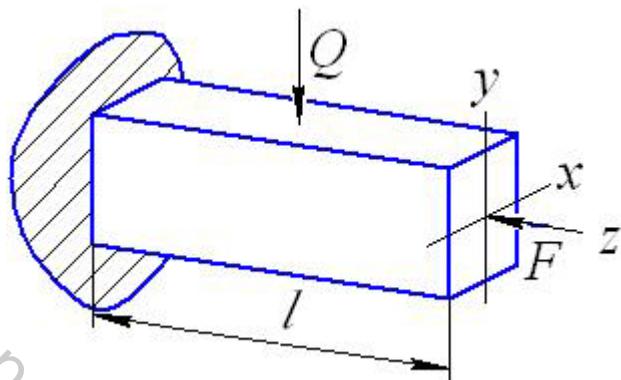
$$[F] = \frac{F_T}{[s]},$$

напряжения при этой нагрузке (рис. 28.6)

$$\sigma_{\max} ([F]) < [\sigma].$$

## Тестирование

28.1 На рисунке представлен продольно-поперечный изгиб в плоскости наибольшей жесткости ( $I_x > I_y$ ). Гибкость стержня в этой плоскости меньше предельной, в плоскости наименьшей жесткости  $xz$  – больше предельной. Выражение какой из критических сил следует использовать в формуле (28.27)?



Варианты ответа

$$1. F_y = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}. \quad 2. F_y = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2}. \quad 3. F_{\text{кр}} (\lambda < \lambda_{\text{кр}}).$$

28.2 На рисунке 28.7 представлен продольно-поперечный изгиб шарнироопертой балки. Какое сечение из отмеченных на рисунке, наиболее опасно?

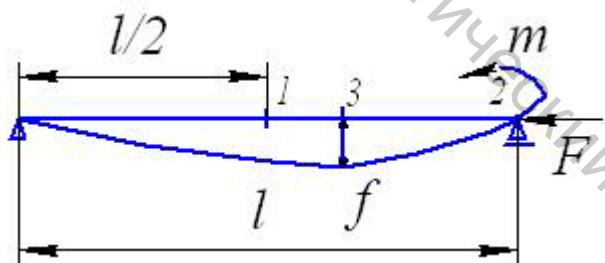


Рисунок 28.7 – Продольно-поперечный изгиб шарниро-опертой балки

Варианты ответа

1. Сечение 3.
2. Сечение 2.
3. Сечение 1 или сечение 2.

### Комментарии

28.1 Выражение для эйлеровой силы появилось в формуле (28.7) как результат рассмотрения изгиба в плоскости действия поперечной составляющей продольно-поперечной нагрузки. Верен ответ 2 – не взирая на то, что гибкость стержня в плоскости силы  $Q$  (в вертикальной плоскости) меньше предельной, и на то, что гибкость стержня в плоскости изгиба меньше гибкости в плоскости  $xz$ .

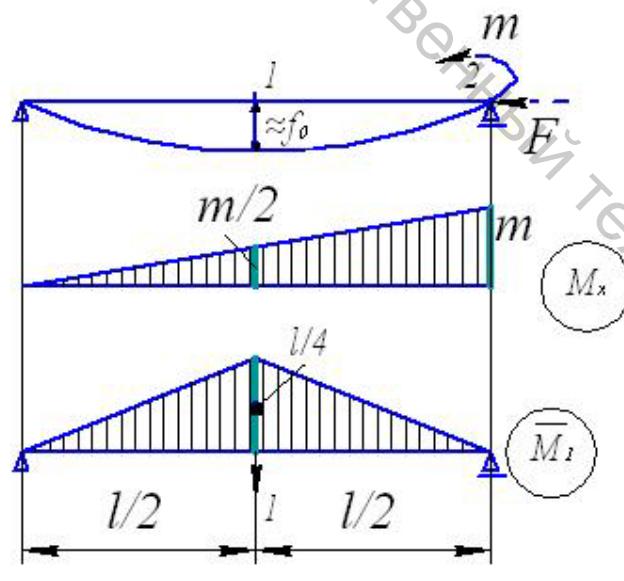
Стержню, однако, угрожает потеря устойчивости в плоскости  $xz$  – выпучивание вбок. Наряду с расчетом на прочность в вертикальной плоскости, дающим допускаемую нагрузку  $[F]_1 = F_T / [s]$ , необходим расчет на устойчивость, дающий допускаемую нагрузку

$$[F]_2 = \varphi[\sigma]A$$

при допускаемом напряжении  $[\sigma] = \sigma_T / [s]$ .

Допускаемая нагрузка – меньшая из этих двух.

28.2. Наибольший прогиб балки на рисунке 28.7 найдется в сечении, близком к середине пролета. Наиболее опасное сечение следует выбрать из сечений 1 и 2. Верен ответ 3. Напряжение (28.27) в сечении 1



$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{m/2}{W_x} + \frac{Ff_0}{1 - \frac{F}{F_y}}, \quad (28.28)$$

где по правилу Мора – Верещагина

$$f_0 = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_1 dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} l \frac{l}{4} \right) \frac{m}{2} = \frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI_x},$$

эйлерова сила

$$F_y = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}.$$

Напряжение (28.27) в сечении 2

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{m}{W_x}. \quad (28.29)$$

Наиболее опасному сечению отвечает меньшая из двух допускаемая нагрузка  $[F] = F_T / [s]$ .

## 29 Осесимметричные задачи Ламе о толстостенном цилиндре

На рисунке 29.1 изображен толстостенный упругий цилиндр с защемленными торцами. Внутреннее и наружное давления на поверхностях цилиндра, не изменяясь по контуру любого из его поперечных сечений, не изменяются и по длине его. Поперечные сечения цилиндра в этих условиях, плоские и нормальные к оси  $z$  до деформации, останутся плоскими и нормальными к ней. Расстояния между сечениями не изменяются – осевые перемещения  $w$  всех точек цилиндра равны нулю, все они перемещаются в плоскостях своих поперечных сечений, причем (ввиду осевой симметрии нагружения) перемещаются вдоль радиусов. Эти (радиальные) перемещения – функции расстояния (и только!) от оси цилиндра (рис. 29.2).

Радиальное относительное удлинение

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr} = \frac{(u+du)-u}{dr} = \frac{du}{dr}; \quad (29.1)$$

окружность 1 радиуса  $r$ , показанная штрихами, перейдет в окружность 2 радиуса  $r + u(r)$  – окружное удлинение

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}, \quad (29.2)$$

осевое удлинение

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (29.3)$$

Угол сдвига (17.4)

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u(r)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

касательные напряжения (рис. 29.3)

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz} = 0;$$

касательные напряжения  $\tau_{z\varphi}$  и  $\tau_{r\varphi}$  равны нулю в силу осевой симметрии задачи (на смежной правой грани элемента направления этих напряжений должны быть такими же, какие показаны на левой видимой грани, что невозможно ввиду закона парности). Все грани элемента на рисунке 29.3 – главные площадки.

Рассмотрим (рис. 29.4) элемент цилиндра, находящийся в равновесии. В проекциях на радиальное направление

$$(\sigma_r + d\sigma_r)[(r+dr)d\varphi \cdot dz] - \sigma_r(r d\varphi dz) - 2(\sigma_\varphi dr dz) \sin d\varphi / 2 = 0, \quad (29.4)$$

где  $(r+dr)d\varphi \cdot dz$ ,  $rd\varphi dz$ ,  $dr dz$  – площади верхней, нижней и боковых граней элемента; силы, входящие в уравнение (29.4), равны произведениям напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  на эти площади.

Заменяя в уравнении (29.4)  $\sin d\varphi / 2$  на эквивалентную бесконечно малую  $d\varphi / 2$  и вычеркивая бесконечно малую четвертого порядка  $d\sigma_r dr d\varphi dz$ , получим уравнение равновесия в напряжениях

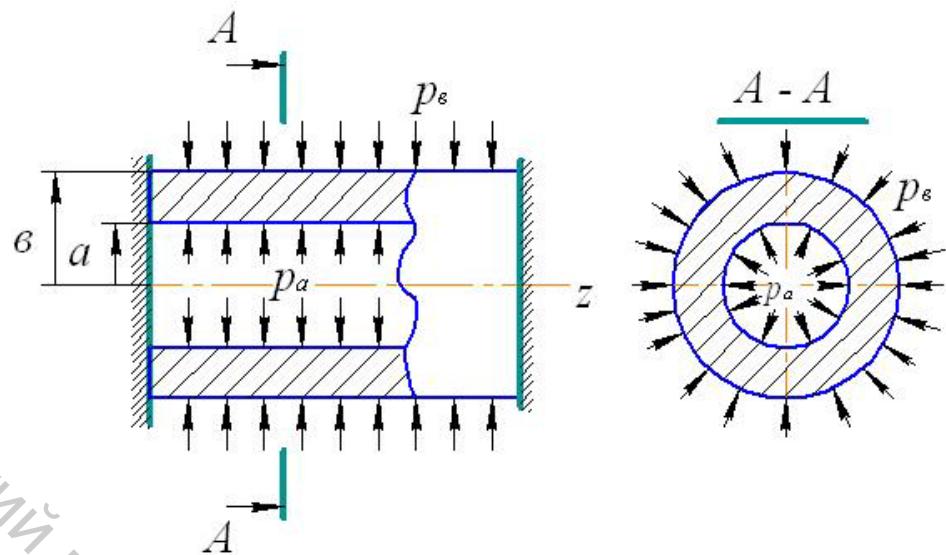


Рисунок 29.1 – Толстостенный цилиндр под давлением внутренним ( $p_a$ ) и наружным ( $p_e$ )

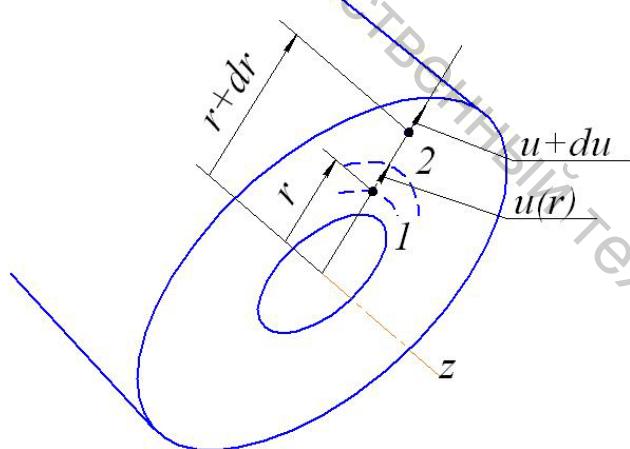


Рисунок 29.2 – Плоская асимметричная деформация

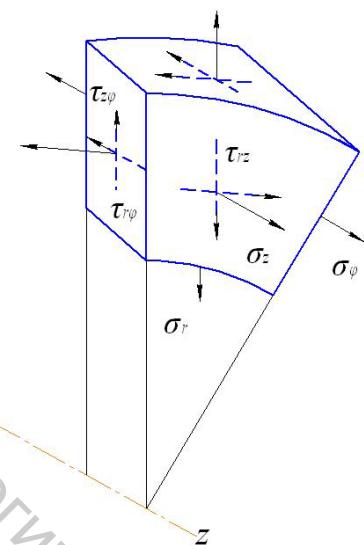


Рисунок 29.3 – Напряжения в цилиндре

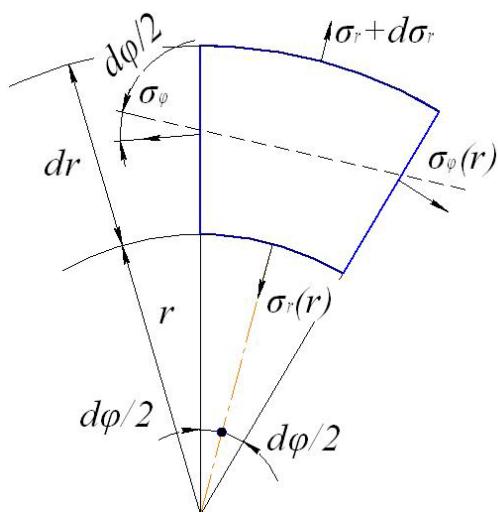


Рисунок 29.4 – К уравнению равновесия элемента цилиндра

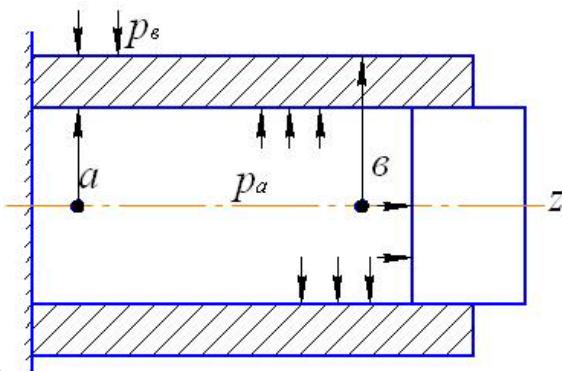


Рисунок 29.5 – Цилиндр со свободными торцами

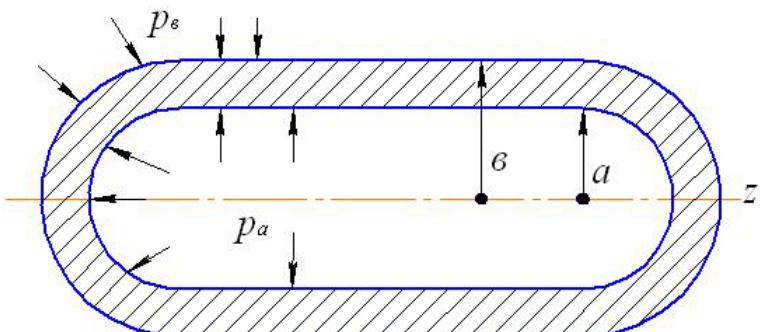


Рисунок 29.6 – Цилиндр с днищами

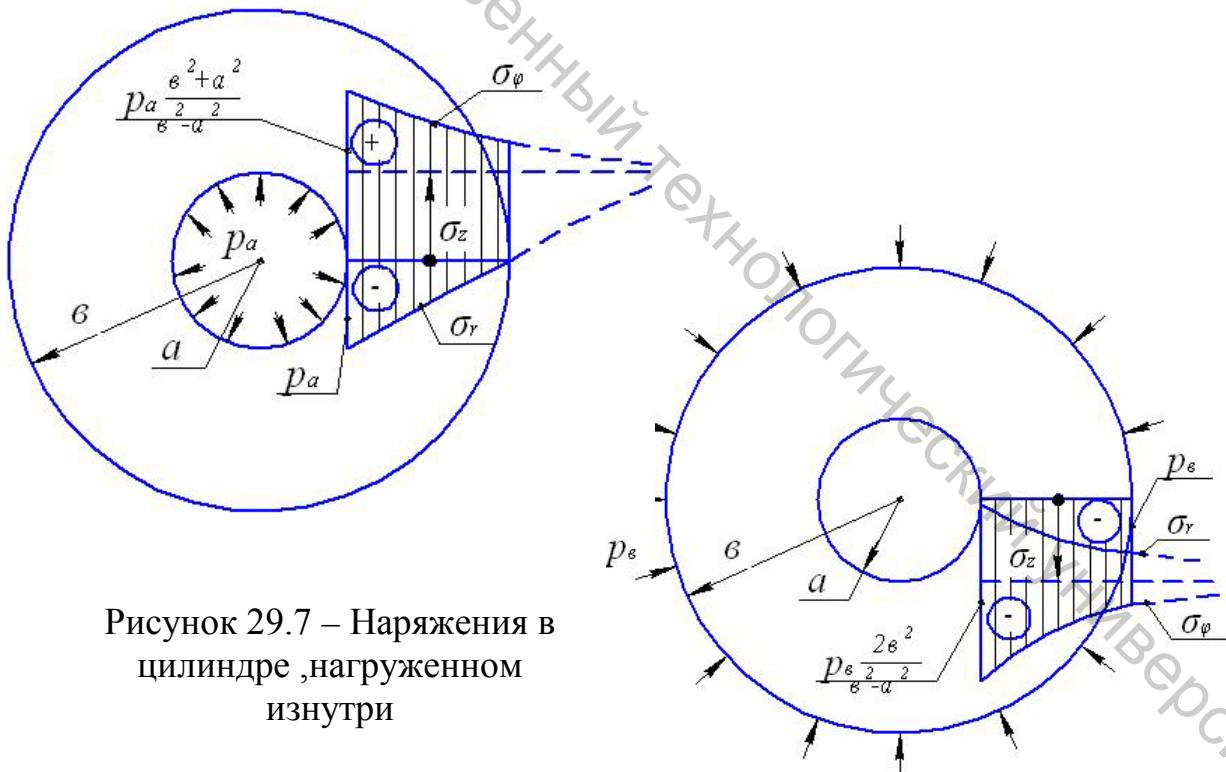


Рисунок 29.8 – Напряжения в цилиндре, нагруженном снаружи

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_\varphi = 0. \quad (29.5)$$

Выразим напряжения в уравнении (29.5) через деформации (29.1 – 29.3): прибегая к закону Гука (18.7)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] = \frac{1}{2G(1+\mu)} [\sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] = \frac{1}{2G(1+\mu)} [\sigma_\varphi - \mu(\sigma_r + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] = 0,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

– модуль сдвига, найдем формулы для напряжений

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad (29.6)$$

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\mu'} (\varepsilon_r + \mu' \varepsilon_\varphi) = \frac{2G}{1-\mu'} \left( \frac{du}{dr} + \mu' \frac{u}{r} \right), \quad (29.7)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{1-\mu'} (\varepsilon_\varphi + \mu' \varepsilon_r) = \frac{2G}{1-\mu'} \left( \frac{u}{r} + \mu' \frac{du}{dr} \right),$$

где коэффициент

$$\mu' = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Подставляя напряжения (29.7) в уравнение равновесия (29.5), получим однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера [6]

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} = 0. \quad (29.8)$$

Частное решение уравнения (29.8) ищем в виде

$$u = r^n:$$

$$n(n-1)r^{n-1} + nr^{n-1} - r^{n-1} = (n-1)(n+1)r^{n-1} = 0,$$

откуда получается характеристическое уравнение

$$(n-1)(n+1) = 0$$

с корнями

$$n_1 = 1, \quad n_2 = -1.$$

Общее решение уравнения (29.8)

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (29.9)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные интегрирования.

Используем решение (29.9) в формулах (29.7):

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\mu'} \left( C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \mu' C_1 + \mu' \frac{C_2}{r^2} \right) = 2G \frac{1+\mu'}{1-\mu'} C_1 - 2G C_2 \frac{1}{r^2} = D - \frac{B}{r^2}, \quad (29.10)$$

$$\sigma_\varphi = D + \frac{B}{r^2},$$

где  $D$  и  $B$  – новые произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (рис. 29.1)

$$\sigma_r(r=a) = -p_a, \quad \sigma_r(r=\hat{a}) = -p_{\hat{a}}. \quad (29.11)$$

Напряжения (29.6) в поперечных сечениях цилиндра

$$\sigma_z = 2\mu D = \text{const} \quad (29.12)$$

– напряжения (29.12) равномерно распределяются по кольцевому поперечному сечению (рис. 29.1) цилиндра.

Если на решения (29.10, 29.12) наложить решение  $\sigma_r = \sigma_\phi = 0$ ,  $\sigma_z = F/A$ , отвечающее растяжению (сжатию) цилиндра силами  $F = -2\mu D \cdot A$ , найдутся напряжения в цилиндре со свободными торцами (рис. 29.5) – те же напряжения (29.10) и  $\sigma_z = 0$ . При этом не важно, как реализуется торцевая нагрузка  $F$ : на достаточных (на два – три диаметра  $2\sigma$ ) удалениях от торцов напряжения в цилиндре практически не зависят от способа реализации растягивающей (сжимающей) нагрузки, определяясь по приведенной формуле

$$\sigma_z = \frac{F}{A}$$

(см. принцип Сен – Венана [6]).

В цилиндре с днищами (рис. 29.6) действуют те же напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  (29.10) и напряжения в поперечных сечениях

$$\sigma_z = \frac{p_a \pi a^2 - p_{\hat{a}} \pi \hat{a}^2}{A}, \quad (29.13)$$

где площадь поперечного сечения цилиндра

$$A = \pi \hat{a}^2 - \pi a^2.$$

Краевые условия (29.11) при только внутреннем давлении приобретают вид

$$\sigma_r(r=a) = -p_a, \quad \sigma_r(r=\hat{a}) = 0.$$

Подставляя в них радиальное напряжение (29.10), найдем постоянные  $D$  и  $B$ :

$$B = p_a \frac{a^2 \hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}, \quad D = p_a \frac{a^2}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (29.14)$$

Нетрудно увидеть, что постоянная  $D$  равна напряжению (29.13) (при  $p_{\hat{a}} = 0$ ) в цилиндре с днищами.

Итак, радиальное и окружное напряжения в толстостенном цилиндре (рис. 29.1, 29.5, 29.6), нагруженном только внутренним давлением  $p_a$ ,

$$\sigma_r = p_a \frac{a^2}{\hat{a}^2 - a^2} \left( 1 \mp \frac{\hat{a}^2}{r^2} \right). \quad (29.15)$$

Напряжения  $\sigma_z$  в защемленном цилиндре (рис. 29.1) определяются по формуле (29.12): растягивающие напряжения

$$\sigma_z = 2\mu p_a \frac{a^2}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (29.16)$$

В цилиндре со свободными торцами (рис. 29.5)

$$\sigma_z = 0.$$

Растягивающие напряжения в цилиндре с днищами (рис. 29.6)

$$\sigma_z = p_a \frac{a^2}{\hat{a}^2 - a^2} \quad (29.17)$$

дают ординату асимптоты эпюор напряжений (29.15). Эпюры напряжений (29.15, 29.17) представлены на рисунке (29.7).

Краевые условия (29.11) при только наружном давлении имеют вид

$$\sigma_r(r=a) = 0, \quad \sigma_r(r=\hat{a}) = -p_{\hat{a}}.$$

Подставляя в них радиальное напряжение (29.10), найдем постоянные  $B$  и  $D$ :

$$B = -p_{\hat{a}} \frac{a^2 \hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}, \quad D = -p_{\hat{a}} \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (29.18)$$

И здесь постоянная  $D$  равна напряжению (29.13) (при  $p_a = 0$ ) в цилиндре с днищами.

Радиальные и окружные напряжения в толстостенном цилиндре (рис. 29.1, 29.5, 29.6), нагруженном только наружным давлением  $p_e$ ,

$$\sigma_r = -p_{\hat{a}} \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2} \left( 1 \mp \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (29.19)$$

Сжимающие напряжения (29.12) в защемленном цилиндре (рис. 29.1)

$$\sigma_z = -2\mu p_{\hat{a}} \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (29.20)$$

В цилиндре со свободными торцами (рис. 29.5)

$$\sigma_z = 0.$$

Сжимающие напряжения в цилиндре с днищами (рис. 29.6)

$$\sigma_z = -p_{\hat{a}} \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2} \quad (29.21)$$

дают ординату асимптоты эпюор напряжений (29.19). Эпюры напряжений (29.19, 29.21) представлены на рисунке 29.8.

Эквивалентное напряжение по Треска – Сен – Венану (16.6)

$$\sigma_{\text{тр}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

В случае цилиндров на рисунках 29.5, 29.6 главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{\varphi}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r$  (рис. 29.7) или  $\sigma_1 = \sigma_r$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\varphi}$  (рис. 29.8), эквивалентное напряжение изображается ординатой, заключенной между кривыми эпюор  $\sigma_{\varphi}$  и  $\sigma_r$ . Наибольшая из таких ординат имеет место в точках у внутренней поверхности цилиндров, т. е. наибольшее эквивалентное напряжение на рисунке 29.7

$$\max \sigma_{\text{тр}} = p_a \frac{\hat{a}^2 + a^2}{\hat{a}^2 - a^2} - (-p_a) = p_a \frac{2\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}, \quad (29.22)$$

наибольшее эквивалентное напряжение на рисунке 29.8

$$\max \sigma_{\text{тр}} = 0 - \left( -p_{\hat{a}} \frac{2\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2} \right) = p_{\hat{a}} \frac{2\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (29.23)$$

### Тестирование

29.1 Цилиндр со свободными торцами (рис. 29.5) нагружен изнутри. Цилиндр с днищами (рис. 29.6) нагружен снаружи. Давления одинаковы. Размеры цилиндров одинаковы. Прочность какого из них выше?

### Варианты ответа

1. Цилиндр со свободными торцами (рис. 29.5) прочнее.
2. Цилиндр с днищами (рис. 29.6) прочнее.
3. Цилиндры равнопрочны.

29.2 Упругий цилиндр посажен (рис. 29.9) без зазора на круглый стержень, который можно считать абсолютно жестким. Какой из вариантов краевых условий правильный?

$$1. \sigma_r(r = \hat{a}) = p, \quad u(r = a) = 0,$$

$$2. \sigma_r(r = \hat{a}) = -p, \quad \frac{u(r = a)}{a} = 0,$$

$$3. \frac{u(r = \hat{a})}{\hat{a}} + \mu' \frac{du}{dr}(r = \hat{a}) = -\frac{p(1 - \mu')}{2G}, \quad u(r = a) = 0$$

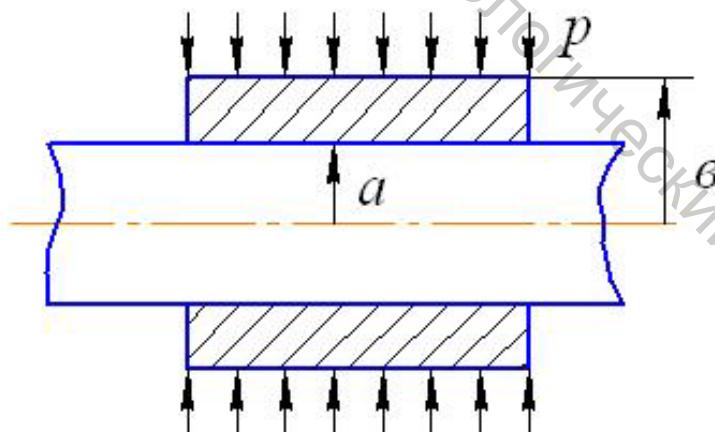


Рисунок 29.9 – Цилиндр, сжатый снаружи

### Варианты ответа

1. Вариант 3.
2. Вариант 2.
3. Вариант 1.

## Комментарии

29.1 При равных давлениях  $p_a = p_{\hat{a}} = p$  эквивалентные напряжения (29.22, 29.23) одинаковы. Верен ответ 3.

29.2 Верен ответ 2. Действительно, цилиндр сжат наружным давлением  $p$ , т. е. радиальное напряжение  $\sigma_r(r = \hat{a}) = -p$ ; перемещения точек внутренней поверхности цилиндра – втулки, соприкасающейся с поверхностью абсолютно твердого стержня, равны нулю, или окружное удлинение (удлинение неизменяемой окружности – границы радиуса  $a$ )  $u/a$  равно нулю.

В первом из условий варианта 3 фигурируют – см. рисунок 29.10 – окружные напряжения (29.7)

$$\sigma_{\varphi} = \frac{2G}{1-\mu'} \left( \frac{u}{r} + \mu' \frac{du}{dr} \right),$$

величина которых не задана на наружной поверхности втулки (задано радиальное напряжение!).

В первом из условий варианта 1 задано (на наружной поверхности) растягивающее (рис. 29.11) радиальное напряжение  $p$ , тогда как втулка сжата (рис. 29.10).

Ответы 1 и 3 не верны.

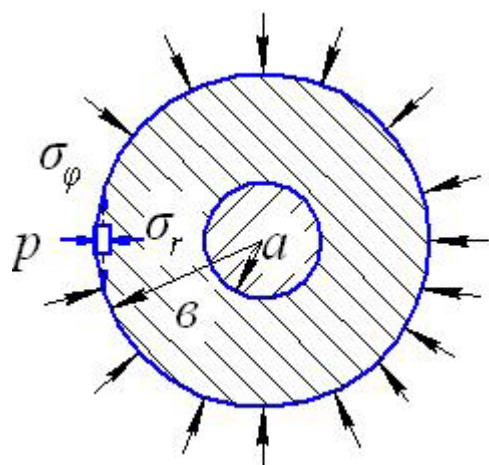


Рисунок 29.10 – Окружные напряжения на наружной поверхности втулки не заданы

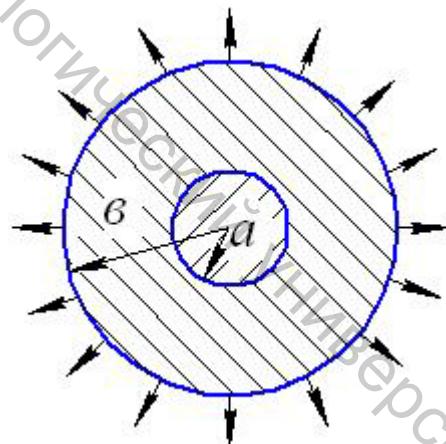


Рисунок 29.11 – Растягивающие напряжения на наружной поверхности втулки – не давление

## 30 Составные цилиндры

Пусть толстостенный цилиндр (рис. 29.5, 29.6) нагружен только внутренним давлением  $p_a = p$ . Напряжения в нем определяются по формулам (29.15, 29.17). По мере увеличения толщины цилиндра (радиуса  $a$ ) напряжения (29.15)

$$\sigma_\varphi = p \left( \frac{\frac{\dot{a}^2}{\hat{a}^2}}{1 - \frac{\dot{a}^2}{\hat{a}^2}} + \frac{1}{1 - \frac{\dot{a}^2}{\hat{a}^2}} \frac{a^2}{r^2} \right)$$

снижаются, стремясь к пределу

$$\sigma_\varphi = p \frac{a^2}{r^2},$$

радиальные напряжения:

$$\sigma_r = -p \frac{a^2}{r^2};$$

напряжения (29.17)

$$\sigma_z = p \frac{\frac{\dot{a}^2}{\hat{a}^2}}{1 - \frac{\dot{a}^2}{\hat{a}^2}} \rightarrow 0.$$

Соответствующие эпюры представлены на рисунке 30.1. Ввиду соотношения

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi = -\sigma_r = -\sigma_3$$

напряженное состояние области, окружающей отверстие, – чистый сдвиг. Наиболее опасны точки у внутренней поверхности. Эквивалентные напряжения (29.22) в них

$$\max \sigma_{y\hat{e}\hat{a}} = p \frac{2}{1 - \frac{a^2}{\hat{a}^2}} \rightarrow 2p. \quad (30.1)$$

Беспрецедентное утолщение цилиндра не приводит к столь же беспрецедентному росту прочности.

Цилиндр можно упрочнить, образуя его из двух цилиндров (рис. 30.2), сопрягаемых с натягом  $\Delta$ . Натяг достигается, если внутренний радиус большего из цилиндров сделать меньше наружного радиуса меньшего из цилиндров на величину  $\Delta$ . Если больший из цилиндров нагреть, меньший из них легко вставляется в него. При остывании на поверхности сопряжения цилиндров радиуса  $c$  возникает контактное давление  $p_k$ , сжимающее снаружи меньший из цилиндров и нагружающее изнутри больший из них. Используем формулы (29.15) и (29.19) и построим эпюры напряжений в сопряженных цилиндрах (рис. 30.3). Остается найти контактное давление  $p_k$  (при заданном натяге  $\Delta$ ).

При посадке (сопряжении) большего из цилиндров на меньший, радиальное перемещение точек внутренней поверхности первого больше перемещений наружной поверхности второго, т. е.

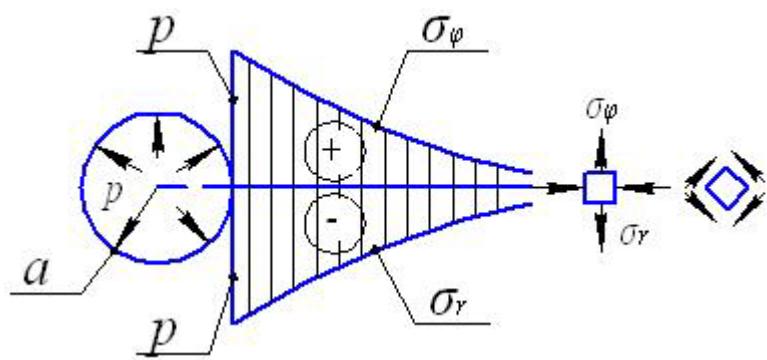


Рисунок 30.1 – Чистый сдвиг в цилиндре бесконечно большой толщины

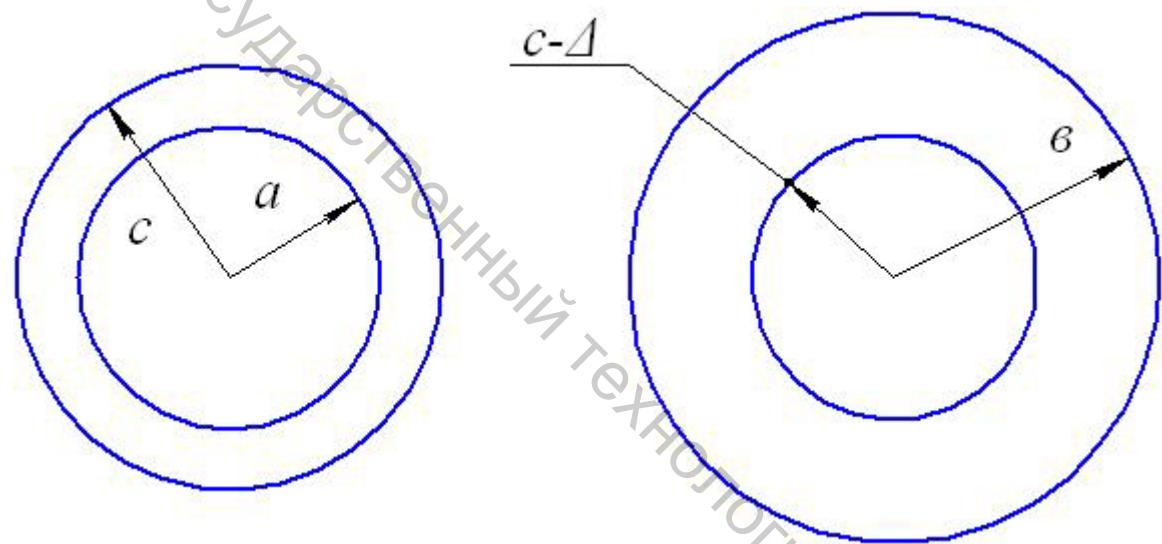


Рисунок 30.2 – Цилинды, сопрягаемые с натягом

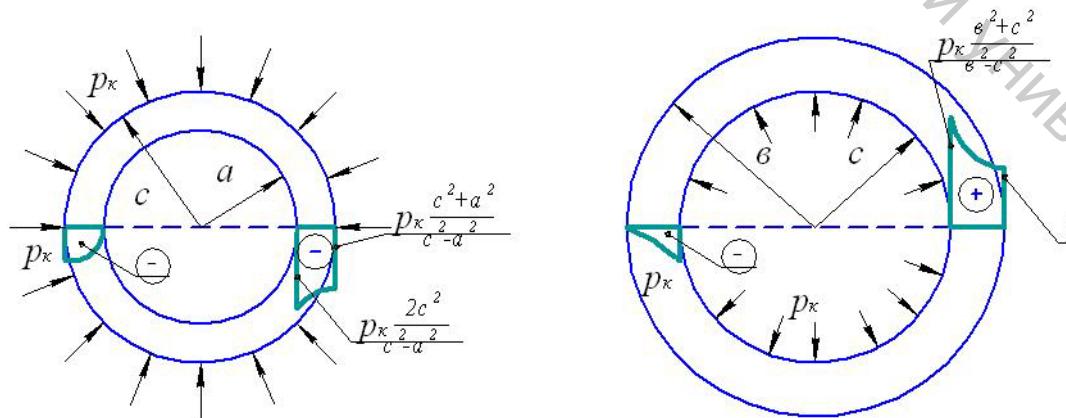


Рисунок 30.3 – Напряжения в цилиндрах, сопряженных с натягом

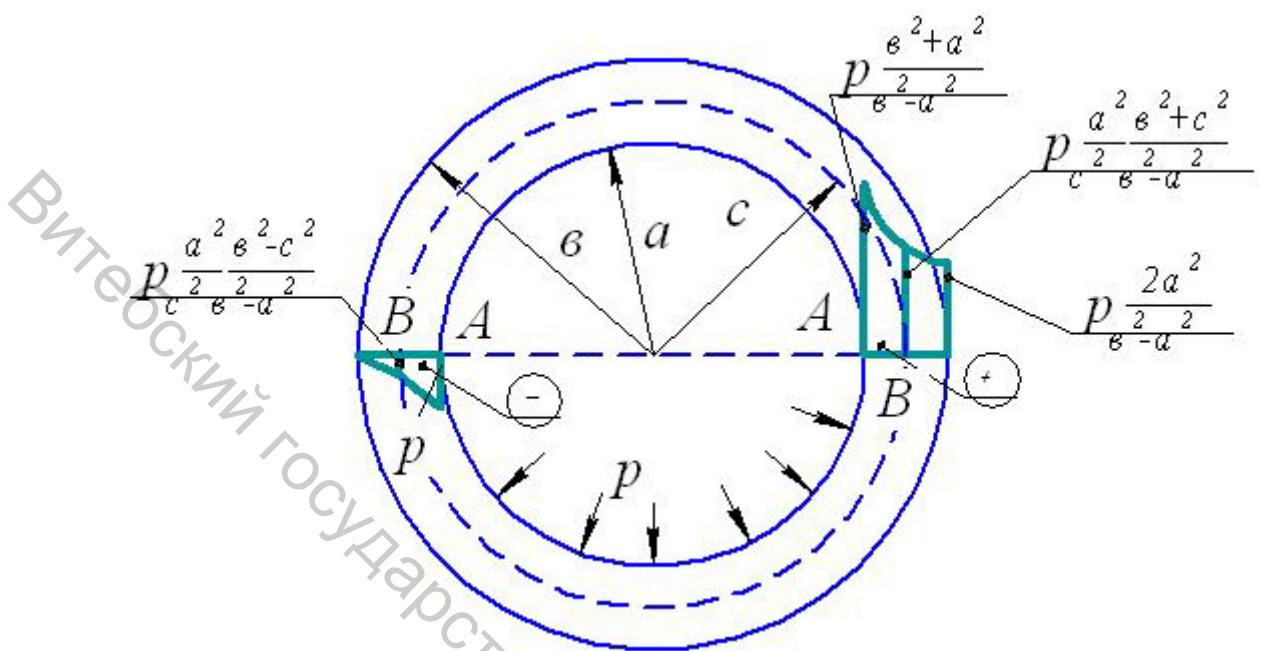


Рисунок 30.4 – Напряжения в сплошном цилиндре

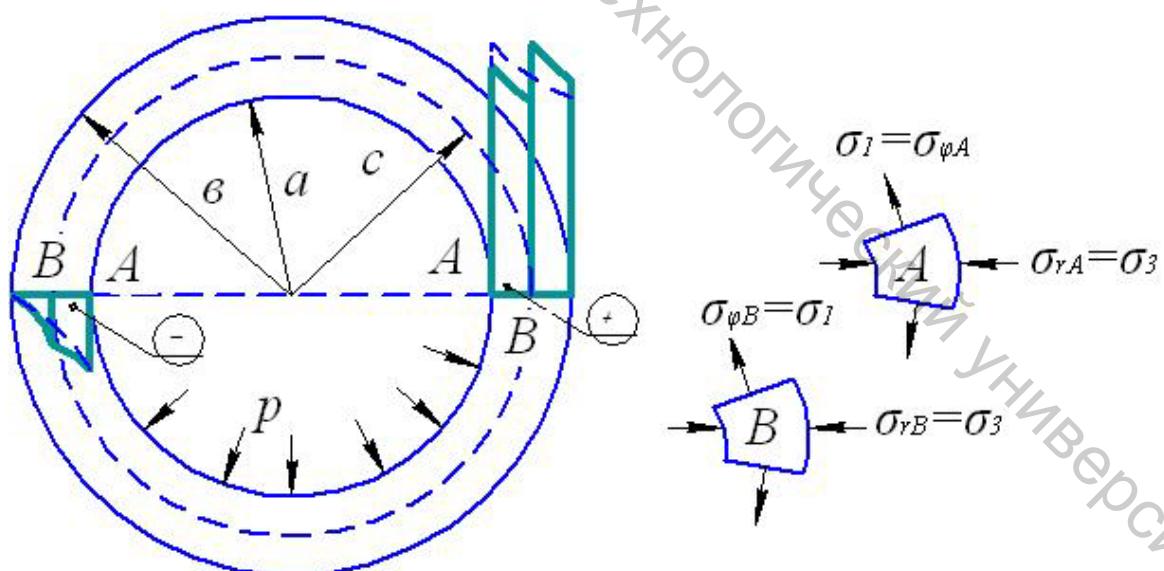


Рисунок 30.5 – Напряжения в составном цилиндре

$$u_1 - u_2 = \Delta. \quad (30.2)$$

Перемещения в уравнении (30.2) – перемещения в цилиндрах с открытыми торцами, тогда как перемещения (29.9) – перемещения в цилиндре с защемленными торцами. Требуемые перемещения найдем, если наложим на перемещение (29.9) перемещения при напряжениях  $\sigma_z$ , где напряжения  $\sigma_z$  даются формулой (29.12). Относительная радиальная деформация

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{E}(-\sigma_z) = \frac{\mu}{E}\sigma_z,$$

перемещения

$$u = \frac{\mu}{E}\sigma_z r;$$

искомые перемещения (в цилиндре с открытыми торцами)

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{\mu}{E}\sigma_z r. \quad (30.3)$$

Используя формулы (30.3), (29.10), (29.14) и (29.16), найдем перемещения  $u_1$ :

$$u_1 = C'_1 c + \frac{C'_2}{c} + \frac{\mu}{E} 2\mu p_e \frac{c^2}{\hat{a}^2 - c^2} c, \quad (30.4)$$

где постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C'_1 &= \frac{1}{2G} \frac{1-\mu'}{1+\mu'} D', & C'_2 &= \frac{1}{2G} B'; \\ D' &= p_e \frac{c^2}{\hat{a}^2 - c^2}, & B' &= p_e \frac{c^2 \hat{a}^2}{\hat{a}^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Опять же используя формулы (30.3), (29.10) и формулы (29.18), найдем

$$u_2 = C''_1 c + \frac{C''_2}{c} - \frac{\mu}{E} 2\mu p_e \frac{c^2}{c^2 - a^2} c, \quad (30.5)$$

где постоянные

$$\begin{aligned} C''_1 &= \frac{1}{2G} \frac{1-\mu'}{1+\mu'} D'', & C''_2 &= \frac{1}{2G} B''; \\ D'' &= -p_e \frac{c^2}{c^2 - a^2}, & B'' &= -p_e \frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Подставим перемещения (30.4, 30.5) в уравнение (30.2):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2G} \frac{1-\mu'}{1+\mu'} p_e \frac{c^2}{\hat{a}^2 - c^2} c + \frac{1}{2G} p_e \frac{c^2 \hat{a}^2}{\hat{a}^2 - c^2} \frac{1}{c} + \frac{\mu}{E} 2\mu p_e \frac{c^2}{\hat{a}^2 - c^2} c + \\ &+ \frac{1}{2G} \frac{1-\mu'}{1+\mu'} p_e \frac{c^2}{c^2 - a^2} c + \frac{1}{2G} p_e \frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{1}{c} + \frac{\mu}{E} 2\mu p_e \frac{c^2}{c^2 - a^2} c = \Delta, \end{aligned}$$

откуда контактное давление

$$p_e = \frac{E\Delta}{2c^3} \cdot \frac{(\hat{a}^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{\hat{a}^2 - a^2}. \quad (30.6)$$

На рисунке 30.4 представлены напряжения (рис. 29.7) в сплошном цилиндре, нагруженном внутренним давлением  $p_a = p$ . Наложим на

них напряжения, показанные на рисунке 30.3, – возникающие под действием контактного давления (30.6). Получим напряжения в составном цилиндре (рис. 30.5). Эквивалентное напряжение в опасной точке  $A$  меньшего из цилиндров

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}A} = \sigma_{1A} - \sigma_{3A} = \sigma_{\varphi A} - \sigma_{rA}, \quad (30.7)$$

где окружное и радиальное напряжения получаются суммированием напряжений, представленных на рисунках 30.4 и 30.3:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi A} &= p \frac{\hat{a}^2 + a^2}{\hat{a}^2 - a^2} - p_e \frac{2c^2}{c^2 - a^2}, \\ \sigma_{rA} &= -p + 0; \end{aligned}$$

эквивалентное напряжение в опасной точке  $B$  большего из цилиндров

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}\hat{A}} = \sigma_{\varphi\hat{A}} - \sigma_{rB}, \quad (30.8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi B} &= p \frac{a^2}{c^2} \frac{\hat{a}^2 + c^2}{\hat{a}^2 - a^2} + p_e \frac{\hat{a}^2 + c^2}{\hat{a}^2 - c^2}, \\ \sigma_{rB} &= -p \frac{a^2}{c^2} \frac{\hat{a}^2 - c^2}{\hat{a}^2 - a^2} - p_e. \end{aligned}$$

Потребуем равнопрочности сопрягаемых цилиндров:

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}A} = \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}\hat{A}}$$

– получится уравнение, откуда найдется требуемое для равнопрочности контактное давление (30.6)  $p_k$  (и требуемый натяг  $\Delta$ ), соответствующее заданному давлению  $p$ . Подставляя найденное давление  $p_k$  в любую из формул (30.7, 30.8), найдем эквивалентное напряжение – одно и то же в равноопасных точках  $A$  и  $B$ :

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}} = p \frac{2\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{1}{\frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right]. \quad (30.9)$$

Найдем радиус  $c$ , доставляющий минимум функции (30.9):

$$c = \sqrt{a\hat{a}}, \quad (30.10)$$

минимум функции (30.9)

$$\min \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}} = p \frac{\hat{a}}{\hat{a} - a} \quad (30.11)$$

меньше эквивалентного напряжения в сплошном цилиндре (29.22)

$$\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}} = p \frac{2\hat{a}^2}{\hat{a}^2 - a^2}, \quad (30.12)$$

отношение напряжения (30.11) к напряжению (30.12)

$$\frac{\min \sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}}{\sigma_{\hat{y}\hat{e}\hat{a}}} = \frac{\hat{a} + a}{2\hat{a}}.$$

Соотношения (30.10, 30.11) носят название условий Гадолина [2]. Посадка цилиндров по Гадолину даст почти двукратное (при сравнительно малом радиусе  $a$ ) снижение эквивалентного напряжения. В случае тонкостенных цилиндров (цилиндрических оболочек) радиусы

$$\hat{a} \approx a,$$

отношение эквивалентных напряжений

$$\frac{\min \sigma_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} \approx 1$$

– посадка цилиндров не даст эффекта.

### Тестирование

30.1 Упругая втулка посажена (рис. 30.6) с натягом на упругий вал. Каково напряженное состояние вала, нагруженного контактным давлением  $p_c$ ?

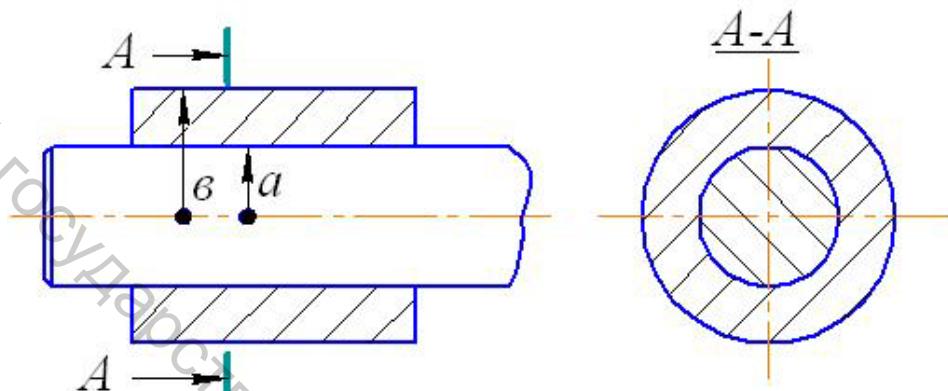


Рисунок 30.6 – Посадка втулки на вал

Варианты ответа

$$\sigma_1 = -p_e, \quad \sigma_1 = p_e, \quad \sigma_1 = 0,$$

$$\begin{array}{lll} 1. \sigma_2 = -p_e, & 2. \sigma_2 = 0, & 3. \sigma_2 = -p_e, \\ \sigma_3 = 0. & \sigma_3 = -p_e. & \sigma_3 = -p_e. \end{array}$$

30.2 Втулка посажена на вал с зазором  $\Delta$  ( $\Delta \ll a$ ) (рис. 30.7) и подвергнута наружному давлению  $p$ . Каким краевым условиям нужно подчинить втулку, чтобы ответить на вопрос о возможном (или невозможном) контактном давлении  $p_c$ ?

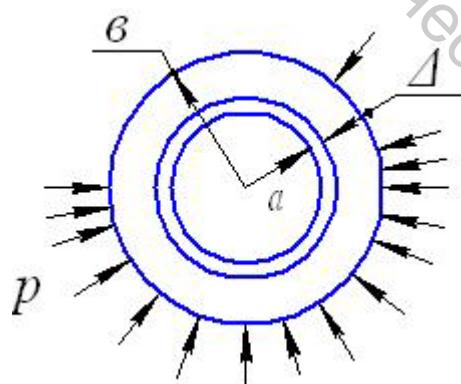


Рисунок 30.7 – Вал вставлен во втулку с зазором

Варианты ответа

$$\begin{array}{lll} 1. \sigma_r(r = \hat{a}) = -p, & 2. \sigma_r(r = \hat{a}) = -p, & 3. \sigma_r(r = \hat{a}) = -p, \\ \sigma_r(r = a) = 0. & u(r = a) = -\Delta. & \sigma_r(r = a) = -p_e. \end{array}$$

### Комментарии

30.1 Из формул (29.10)

$$\sigma_r = D \mp \frac{B}{r^2}$$

следует: при  $B \neq 0$  и  $r \rightarrow 0$  напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  неограниченно растут.

Требуя ограниченности напряжений, находим: константа

$$B = 0,$$

и напряжения

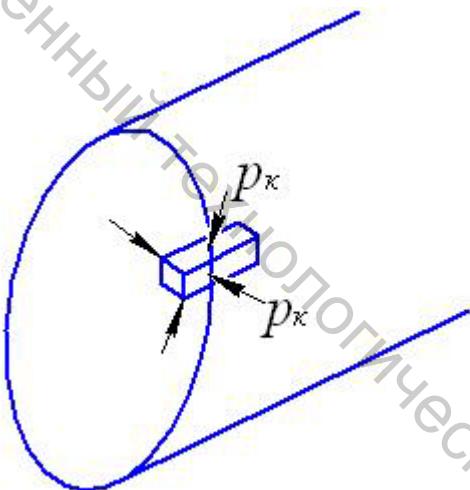
$$\sigma_r = \sigma_\varphi = D = \text{const},$$

но на границе  $\sigma_r = -p_e$ , следовательно,  $\sigma_r = \sigma_\varphi = -p_e$  во всем объеме вала.

Осевой нагрузки нет, напряжения  $\sigma_z = 0$ , и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -p_e$ .

Верен ответ 3. В ответе 1 главные напряжения пронумерованы в порядке возрастания, тогда как их следует нумеровать в порядке убывания ( $\sigma_1$  – наибольшее напряжение,  $\sigma_3$  – наименьшее). В ответе 2  $\sigma_1 = p_e > 0$ , тогда как при сжатии вала давлением  $p_k$  все напряжения сжимающие.

Напряженное состояние вала показано на рисунке



30.2 Верен ответ 1. Найдя из краевых условий, приведенных в варианте 1, произвольные постоянные интегрирования в перемещениях (30.5) (с заменой  $p_k$  на  $p$ ,  $c$  на  $\varphi$ ), найдем перемещения (30.5) (с заменой  $c$  на  $a$ ) на внутренней поверхности втулки. Если они не превысят зазор  $\Delta$ , контактного давления не будет, если же они окажутся больше  $\Delta$ , давление  $p_k$  возникнет.

В ответе 2 перемещения точек внутренней поверхности положены равными зазору. Однако задавать перемещения при заданном давлении ( $p_a = 0$ ) нельзя. И наоборот, нельзя задавать давление при заданном перемещении. Наконец, в ответе 3 использована неизвестная величина контактного давления – она не может быть задана, она – результат решения задачи в целом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Москва : Наука, 1977. – 416 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1964. – 540 с.
3. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – Москва : Физматгиз, 1976. – 856 с.
4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Том 1 / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – 480 с.
5. Жирнов, Н. И. Классическая механика / Н. И. Жирнов. – Москва : Просвещение, 1980. – 303 с.
6. Кац, А. М. Теория упругости / А. М. Кац. – Москва : Гостехтеориздат, 1956. – 208 с.

Учебное издание

Федосеев Гелий Николаевич  
Сакевич Валерий Николаевич

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

Курс лекций

Редактор А.А. Калинин  
Технический редактор Е.С. Максимович  
Корректор Т.А. Осипова  
Компьютерная верстка Е.С. Максимович

---

Подписано к печати \_\_\_\_\_. Формат \_\_\_\_\_. Бумага офсетная № 1.  
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. листов \_\_\_\_\_. Уч.-из. листов \_\_\_\_\_.  
Тираж \_\_\_\_\_. экз. Заказ № \_\_\_\_\_.  
Учреждение образования «Витебский государственный  
технологический университет» 210035, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский

государственный технологический университет».

Лицензия № 02330 / 0494384 от 16 марта 2009 г.