

5. Сторожилов, А. И. Обучение студентов решению геометрических задач с использованием трёхмерного компьютерного моделирования : дисс. ... канд. пед. Наук : 130002 / А. И. Сторожилов. – Минск, 2002.
6. Шабека, Л.С. Разработка принципов и методических подходов к решению инженерных геометро-графических задач на базе трёхмерного компьютерного моделирования : отчёт о НИР (заключит.) БГПА ; рук. темы Л. С. Шабека . – № ГР 20001142. – Минск, 2000. – 143.с.

УДК 517.9

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО

ПОЛИНОМА $P(z) = \frac{1}{z} + c_1 + c_2 z$

НА ОТРЕЗКЕ, ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ И ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Студ. Родионова К.Ю., ст. преп. Силивончик В.В.

УО «Витебский государственный технологический университет»

Задача минимизации нормы полинома $P(z) = \frac{1}{z} + c_1 + c_2 z$ уже решена на трёхточечном множестве $M = \{z_1, z_2, z_3\} : z_1 = a, z_2 = a - ib, z_3 = a + ib$. Найдены оптимальные значения параметров c_1 и c_2 :

$$c_{1*} = -\frac{4a^2 + b^2}{2a(a^2 + b^2)}, c_{2*} = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad (1)$$

и оптимальное (минимальное) значение нормы полинома:

$$\min \|P(z)\|_M = \|P_*(z)\|_M = \frac{b^2}{2a(a^2 + b^2)}, \quad (2)$$

где $P_*(z) = \frac{1}{z} + c_{1*} + c_{2*} z$. Введём обозначение:

$$r = \frac{b^2}{2a(a^2 + b^2)}. \quad (3)$$

Тогда равенство примет вид: $\|P_*(z)\|_M = R$, что равносильно равенству $\|P_*(z)\|_M^2 = r^2$. Рассмотрим функцию $f(x; y) = |P_*(z)|^2$ ($z = x + iy$) и исследуем линию уровня

$$f(x; y) = r^2. \quad (4)$$

Преобразуем равенство

$$f(x; y) = |P_*(z)|^2 = P_*(z) \cdot \overline{P_*(z)} = P_*(z) \cdot P_*(\bar{z}),$$

где черта означает комплексное сопряжение. Подставим $P_*(z) = \frac{1}{z} + c_{1*} + c_{2*} z$.

$$f(x; y) = \left(\frac{1}{z} + c_{1*} + c_{2*} z \right) \cdot \left(\frac{1}{\bar{z}} + c_{1*} + c_{2*} \bar{z} \right) = \frac{1}{z\bar{z}} + c_{1*}^2 + c_{2*}^2 z\bar{z} + c_{1*} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) + c_{1*} c_{2*} (z + \bar{z}).$$

Поскольку

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, z\bar{z} = x^2 + y^2, \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = 2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, z + \bar{z} = 2x,$$

то

$$f(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{(4a^2 + b^2)^2}{4a^2(a^2 + b^2)^2} + \frac{x^2 + y^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{4a^2 + b^2}{a(a^2 + b^2)} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4a^2 + b^2}{a(a^2 + b^2)}$$

Теперь, после преобразования

$$c_1^2 - r^2 = \frac{(4a^2 + b^2)^2}{4a^2(a^2 + b^2)^2} - \frac{b^4}{4a^2(a^2 + b^2)^2} = \frac{4a^2 + 2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

и вынесения за скобки выражения $\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{a(a^2 + b^2)}$, уравнение принимает вид:

$$a(a^2 + b^2)^2 + a(4a^2 + 2b^2)(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2)^2 - (4a^2 + b^2)(a^2 + b^2)x + 2a(a^2 + b^2)(x^2 - y^2) - (4a^2 + b^2)x(x^2 + y^2) = 0. \quad (5)$$

Найдём пересечение линии уровня с некоторыми прямыми:

1. $x = a, z = a + iy$. Уравнение преобразуется к виду $y^2(y^2 - b^2) = 0$, и получаем три точки пересечения $z_1 = a, z_2 = a - ib, z_3 = a + ib$.

2. $y = 0, z = x$. Уравнение принимает вид:

$$a(a^2 + b^2)^2 + a(4a^2 + 2b^2)x^2 + ax^4 - (4a^2 + b^2)(a^2 + b^2)x + 2a(a^2 + b^2)x^2 - (4a^2 + b^2)x^3 = 0, \\ (ax^2 - (2a^2 + b^2)x + a^3 + ab^2) \cdot (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) = 0.$$

Выражение в первых скобках даёт два корня: $x = a, x = \frac{a^2 + b^2}{a}$. Выражение во вторых имеет отрицательный дискриминант.

3. $y = b, z = x + ib$. Уравнение преобразуется к виду

$$(x - a)(ax^3 - (3a^2 + b^2)x^2 + (3a^3 + 5ab^2)x - a^4 - 4a^2b^2 - 2b^4) = 0.$$

Первое решение $x = a$ даёт точку пересечения $z_3 = a + bi$. Приравняем нулю выражение во вторых скобках. После замены $\frac{x}{a} = t, \frac{b}{a} = \beta$ получим кубическое уравнение

$$t^3 - (3 + \beta^2)t^2 + (3 + 5\beta^2)t - (1 + 4\beta^2 + 2\beta^4) = 0.$$

Исследование этого уравнения показывает, что оно имеет ровно одно решение t_0 , причём $t_0 > 1$. Поэтому прямая $y = b$ пересекается с линией уровня в двух точках:

$z_3 = a + ib$ и $z_4 = at_0 + ib$. Непосредственно проверяется, что $\frac{a^2 + b^2}{a} > t_0$.

4. $x = at_0, z = at_0 + iy$. Обозначим: $at_0 = s$. Уравнение преобразуется к виду

$$(y^2 - b^2)(a(y^2 - b^2) + 2a(a^2t_0^2 + b^2) + a(4a^2 + 2b^2) - at_0(4a^2 + b^2) - 2a(a^2 + b^2)) = 0,$$

$$y = \pm b \Leftrightarrow y^2 + 2a^2t_0^2 - t_0(4a^2 + b^2) + 2a^2 + b^2 = 0. \quad (6)$$

Непосредственно проверяется, что $2a^2t_0^2 - t_0(4a^2 + b^2) + 2a^2 + b^2 > 0$ и второе из уравнений решений не имеет. Имеем две точки пересечения: $z = at_0 \pm ib$.

Теперь рассмотрим поведение функции $f(x; y)$ на отрезках $[z_2; z_3]$ и $[z_3; z_4]$.

1. $z \in [z_2; z_3]$. Имеем $f(a; 0) = f(a; -b) = f(a; b) = r^2$. В остальных точках отрезка это равенство не выполняется. Покажем, что в точке $x = a, y = 0$ имеет место локальный максимум функции $f(a; y)$. Для этого найдём значения производных $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ в этой

точке. Поскольку $f(x; y) = P(z) \cdot P(\bar{z}) = \left(\frac{1}{z} + c_1 + c_2 z \right) \cdot \left(\frac{1}{\bar{z}} + c_1 + c_2 \bar{z} \right)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} &= \frac{dP(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot P(\bar{z}) + P(z) \cdot \frac{dP(\bar{z})}{d\bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{dP(z)}{dz} \cdot i \cdot P(\bar{z}) \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\left(-\frac{1}{z^2} + c_2 \right) \cdot i \cdot \left(\frac{1}{\bar{z}} + c_1 + c_2 \bar{z} \right) \right), \\ \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} &= 2 \operatorname{Re} \left(-\frac{d^2 P(z)}{dz^2} \cdot P(\bar{z}) + \frac{dP(z)}{dz} \cdot \frac{dP(\bar{z})}{d\bar{z}} \right) = \left(-2 \frac{1}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{\bar{z}} + c_1 + c_2 \bar{z} \right) + \left(c_2 - \frac{1}{z^2} \right) \left(c_2 - \frac{1}{\bar{z}^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Подставим $x = a, y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a; 0)}{\partial y} &= 2 \operatorname{Re} \left(i \cdot \left(\frac{1}{a^2} + c_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{a} + c_1 + c_2 a \right) \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 f(a; 0)}{\partial y^2} &= 2 \operatorname{Re} \left(-2 \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{1}{a} + c_1 + c_2 a \right) + \left(c_2 - \frac{1}{a^2} \right) \left(c_2 - \frac{1}{a^2} \right) \right) = \\ &= -2 \left(\frac{1}{a^4} - \frac{4a^2 + b^2}{a^4(a^2 + b^2)} + \frac{4}{a^2(a^2 + b^2)} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \right) = -2 \frac{a^2 b^2}{a^4(a^2 + b^2)^2} = -2 \frac{b^2}{a^2(a^2 + b^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

Мы получили $\frac{\partial f(a; 0)}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 f(a; 0)}{\partial y^2} < 0$. Значит, в точке $y = 0$ функция $f(a; y)$ достигает локального максимума, и на отрезке $[z_2; z_3]$ имеем $f(a; y) \leq r^2$. Это означает, что

$$\min \| P(z) \|_{[z_2; z_3]} = \| P_*(z) \|_{[z_2; z_3]} = r$$

и оптимизация на отрезке $[z_2; z_3]$ завершена.

2. $z \in [z_3; z_4]$. Имеем $f(a; b) = f(a t_0; b) = r^2$. В остальных точках отрезка это равенство не выполняется. Покажем, что в точке $x = a, y = b$ имеет место убывание функции $f(x; b)$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{dP(z)}{dz} \cdot P(\bar{z}) \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\left(-\frac{1}{z^2} + c_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{\bar{z}} + c_1 + c_2 \bar{z} \right) \right).$$

Подставляя $x = a, y = b$, получаем $\frac{\partial f(a; b)}{\partial x} = -2 \frac{b^4}{a(a^2 + b^2)^3} < 0$. Убывание доказано и на отрезке $[z_3; z_4]$ имеем $f(b; x) \leq r^2$. Это означает, что

$$\min \| P(z) \|_{[z_3; z_4]} = \| P_*(z) \|_{[z_3; z_4]} = r$$

и оптимизация на отрезке $[z_3; z_4]$ завершена.

Рассмотрение отрезков $[z_2; z_3]$ и $[z_3; z_4]$ позволяет заключить, что прямоугольник A с вершинами $z_2 = a - ib, z_3 = a + ib, z_4 = a t_0 + ib, z_5 = a t_0 - ib$ лежит внутри области, ограни-

ченной линией уровня $f(x; y) = r^2$, что равносильно $|P_*(z)| = r$. Аналогичный вывод можно сделать для треугольника B с вершинами $z_2 = a - ib$, $z_3 = a + ib$, $z_6 = \frac{a^2 + b^2}{a}$. Поэтому

$$\min \|P(z)\|_A = \min \|P(z)\|_B = \|P_*(z)\|_A = \|P_*(z)\|_B = r$$

и завершена оптимизация на указанных прямоугольнике и треугольнике.

Список использованных источников

1. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – Москва : Наука, 1976. – 480 с.
2. Лаврентьев, В. А. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1977. – 456 с.

УДК 517.925

О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

Студ. Сафронов К.С., доц. Денисов В.С., ст. преп. Завацкий Ю.А.

УО «Витебский государственный технологический университет»

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ay^5 + By + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x), \quad (A > 0, B > 0). \quad (1)$$

При $A = 0$, $B = 1$ получается система, которую называют системой Лье́нара (или системой нелинейных колебаний). Она широко изучалась на предмет существования, единственности предельного цикла, оценки числа предельных циклов, их расположения. В статьях [1, 2] были найдены достаточные условия существования, по крайней мере, двух предельных циклов системы нелинейных колебаний.

В работе [3] были получены более общие теоремы существования предельных циклов. В статье [4] были найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла системы Лье́нара, охватывающего конечное число особых точек.

Для систем, обобщающих систему Лье́нара, результатов намного меньше. В работе [5] доказана теорема существования, по крайней мере, двух предельных циклов системы с кубической нелинейностью. В тезисах [6] опубликован результат существования по крайней мере одного устойчивого предельного цикла системы (1). В данной статье методами работ [2, 4] для системы (1) доказана единственность устойчивого предельного цикла, окружающего, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны, обеспечивают существование и единственность решений системы (1) и удовлетворяют условиям:

Функции $f(x)$ и $g(x)$ нечётные.

Существуют точки x_1 , x_3 , такие что $f(0) = f(x_1) = g(0)$;

$f(x) < 0$ на $(0; x_1)$; $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; +\infty)$.

Введём обозначения:

$$G(x) = \int_0^x -g(s)ds; \quad M = \max_{[0, x_1]} |f(x)|; \quad \varphi(x) = \int_0^x -g(s)f(s)ds \quad (2)$$