МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практикум

для студентов первого курса специальностей
6-05-0611-04 «Электронная экономика»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

Витебск
2024

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко
А. П. Дмитриев

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии»
УО «ВГТУ», протокол № 3 от 31.10.2024.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол № 3 от 22.11.2024.

Математический анализ. Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев. – Витебск : УО «ВГТУ», 2024. – 111 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену или зачёту по четырём разделам курса «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»: неопределённые интегралы, определённые интегралы, двойные интегралы, тройные интегралы. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум составлен на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет работы преподавания дисциплины «Математический анализ» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих выпускников. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», которые изучают курс «Математический анализ». В работе приведён краткий теоретический материал для проведения практических занятий по указанному выше курсу. Практикум написан в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ».

В работе выделяются тринадцать тем курса «Математический анализ». Каждая тема представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач по рассматриваемой теме. В то же время этих сведений недостаточно для итоговой аттестации по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем курса, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01. Некоторые темы курса «Математический анализ» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза в процессе изучения других дисциплин.

На кафедре «Математика и информационные технологии» по дисциплине «Математический анализ» разработана тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенная методическая разработка позволяет подготовиться студентам к прохождению теста как по отдельным темам курса, так и по всему материалу.

Данный практикум может быть использован преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материалы практикума для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ)» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 6-05-0611-04, 6-05-0611-01

1. Первообразная функции. Теорема о первообразных.
2. Определение неопределенного интеграла, его геометрический смысл.
3. Таблица неопределённых интегралов элементарных функций.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Методы интегрирования неопределенного интеграла.
6. Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Интегрирование рациональных выражений.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Интегрирование тригонометрических выражений.
10. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
11. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функции.
12. Свойства определенного интеграла.
13. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.
14. Связь неопределенного и определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.
15. Методы интегрирования определенного интеграла.
16. Несобственные интегралы первого рода.
17. Несобственные интегралы второго рода.
18. Вычисление площадей фигур в декартовой системе координат с помощью определённого интеграла.
19. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями заданными параметрическим образом, с помощью определённого интеграла.
20. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат с помощью определённого интеграла.
21. Вычисление длины дуги кривой в декартовой системе координат с помощью определённого интеграла.
22. Вычисление длины дуги кривой заданной параметрическим образом с помощью определённого интеграла.
23. Вычисление длины дуги кривой в полярной системе координат с помощью определённого интеграла.
24. Вычисление объемов тел с помощью определённого интеграла.
25. Вычисление площадей поверхности фигур вращения с помощью определённого интеграла.
26. Применение определённого интеграла в механике.
27. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
28. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
29. Определение двойного интеграла.
30. Определение тройного интеграла.

31. Свойства двойных интегралов.
32. Свойства тройных интегралов.
33. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
34. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
35. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.
36. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
37. Вычисление двойного интеграла в обобщённой полярной системе координат.
38. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.
39. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.
40. Вычисление тройного интеграла в обобщённой цилиндрической системе координат.
41. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.
42. Вычисление тройного интеграла в обобщённой сферической системе координат.
43. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат с помощью двойного интеграла.
44. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат с помощью двойного интеграла.
45. Вычисление объёмов тел в декартовой системе координат с помощью двойного интеграла.
46. Вычисление объёмов тел в полярной системе координат с помощью двойного интеграла.
47. Вычисление объёмов тел в декартовой системе координат с помощью тройного интеграла.
48. Вычисление объёмов тел в цилиндрической системе координат с помощью тройного интеграла.
49. Вычисление объёмов тел в сферической системе координат с помощью тройного интеграла.
50. Вычисление массы плоской пластины с помощью двойного интеграла.
51. Вычисление массы тела с помощью тройного интеграла.
52. Вычисление центра масс плоской пластины с помощью двойного интеграла.
53. Вычисление центра масс пространственного тела с помощью тройного интеграла.
54. Вычисление момента инерции плоской пластины с помощью двойного интеграла.
55. Вычисление статического момента плоской пластины с помощью двойного интеграла.
56. Вычисление момента инерции пространственного тела с помощью тройного интеграла.
57. Вычисление статического момента пространственного тела с помощью тройного интеграла.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Содержание: первообразная функции, неопределённый интеграл, основные свойства неопределённого интеграла, таблица основных неопределённых интегралов, непосредственное интегрирование, геометрический смысл неопределённого интеграла.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегрирование – это задача, обратная дифференцированию. То есть по заданной производной или дифференциалу некоторой функции необходимо восстановить саму функцию. С механической точки зрения это означает, что по заданной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон движения этой точки.

Определение 1.1.1 Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I, если для всех точек этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.1 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале I, то они отличаются друг от друга лишь на постоянную величину C, то есть $F_2(x) - F_1(x) = C$, где $C = Const$.

Определение 1.1.2 Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$.

Определение 1.1.3 *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке I называется множество всех первообразных этой функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.1.1}$$

В формуле (1.1.1) функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, а C – *константой*. Процесс нахождения неопределённого интеграла называется *интегрированием*.

Теорема 1.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале I, то она интегрируема на этом интервале.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой множество однопараметрических кривых $y = F(x) + C$, обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с одной и той же абсциссой параллельны между собой. Кривые множества $\{F(x)+C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси ординат.

Основные свойства неопределённого интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

5) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$;

6) если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int f(a \cdot x + b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + C.$$

Таблица основных неопределённых интегралов приведена в приложении А (табл. А.1).

Если производные элементарных функций всегда выражаются элементарными функциями, то интегралы от элементарных функций не всегда можно представить в виде элементарных функций. Такие интегралы называются «*не берущимися*». Приведём примеры «*не берущихся*» интегралов: $\int e^{-x^2}\,dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – эллиптический интеграл первого рода, $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ – эллиптический интеграл второго рода.

Одним из методов интегрирования неопределённого интеграла является *метод непосредственного интегрирования.* Данный метод основан на применении таблицы основных неопределённых интегралов и их свойств.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти первообразную функции $f(x)=5\cos 7x-3\sin 4x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Производные функций $y=\sin 7x$, $y=\cos 4x$ и $y=\arcsin x$ равны, соответственно, $y'=7\cos 7x$, $y'=-4\sin 4x$ и $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, $\cos 7x=\dfrac{1}{7}\left(\sin 7x\right)'$, $\sin 4x=-\dfrac{1}{4}\left(\cos 4x\right)'$, а $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(\arcsin x\right)'$. Тогда первообразная заданной функции равна $F(x)=\dfrac{5}{7}\sin 7x+\dfrac{3}{4}\cos 4x+\arcsin x$.

1.2.2 Найти $\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx$.

Решение. Применив свойства 4 и 5, получим

$$\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx=4\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx.$$

Применим к интегралам первую формулу таблицы интегралов

$$\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx=4\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C=x^4+x^3-x^2+5x+C.$$

1.2.3 Найти $\int\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение. $\int\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=5\ln|x|+\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x}+C$.

1.2.4 Найти $\int 2^x5^xe^xdx$.

Решение. $\int 2^x5^xe^xdx=\int(10e)^x\,dx=\dfrac{(10e)^x}{\ln 10e}+C$.

1.2.5 Найти $\int \operatorname{ctg}^2 xdx$.

Решение. $\int \operatorname{ctg}^2 xdx=\int\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$
$=-\operatorname{ctg}x-x+C$.

1.2.6 Найти $\int\dfrac{(2+x)^2}{x\left(4+x^2\right)}dx$.

Решение. $\int\dfrac{(2+x)^2}{x\left(4+x^2\right)}dx=\int\dfrac{4+4x+x^2}{x\left(4+x^2\right)}dx=\int\left(\dfrac{4}{4+x^2}+\dfrac{1}{x}\right)dx=$
$=\dfrac{4}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\ln|x|+C=2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\ln|x|+C$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти первообразные следующих функций:

1.3.1.1 $3x^5+2$. **1.3.1.2** $4x^3+5x+e$. **1.3.1.3** $\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}$.

1.3.1.4 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\pi$. **1.3.1.5** $\dfrac{1}{\sqrt{4+3x}}$. **1.3.1.6** $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.3.1.7 $\dfrac{1}{25+x^2}$ **1.3.1.8** $\dfrac{x^3+1}{x-1}$. **1.3.1.9** $\cos 7x-\sin 6x$.

1.3.2 Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

1.3.2.1 $\int\left(\sqrt{5x}+3\right)dx$. **1.3.2.2** $\int\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x}}dx$. **1.3.2.3** $\int\dfrac{\left(5-\sqrt{x}\right)^2}{5\sqrt{x}}dx$.

1.3.2.4 $\int\dfrac{x^4+x^2+3}{x}dx$. **1.3.2.5** $\int 7^{2x}e^x\,dx$. **1.3.2.6** $\int\left(x+\sin x\right)dx$.

1.3.2.7 $\int\dfrac{6-\cos x}{\cos^2 x}dx$. **1.3.2.8** $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$. **1.3.2.9** $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx$.

1.3.2.10 $\int\dfrac{dx}{9-x^2}$. **1.3.2.11** $\int\dfrac{dx}{25+x^2}$. **1.3.2.12** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$.

1.3.2.13 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-11}}$. **1.3.2.14** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$. **1.3.2.15** $\int\dfrac{(9+x)^2\,dx}{x\left(81+x^2\right)}$.

1.3.2.16 $\int\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^4-25}}dx$. **1.3.2.17** $\int\dfrac{x^2-5}{x^2-4}dx$. **1.3.2.18** $\int\dfrac{x^2+8}{x^2+9}dx$.

1.3.2.19 $\int\left(\dfrac{9\sqrt[7]{x^2}-3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[21]{x}}-\sin x+31^x+\dfrac{(10+x)^2}{x\left(100+x^2\right)}-\dfrac{2\cos x+3\cos^2 x}{4\cos x}+\mathrm{tg}^2\,x-\dfrac{9}{x}\right)dx$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

1.4.1.1 $\int\left(\dfrac{5\sqrt[7]{x}-2\sqrt[4]{x}}{7\sqrt[5]{x}}-3\sin x+2^x+\dfrac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}-\dfrac{\cos x+\cos^2 x}{2\cos x}+\mathrm{tg}^2\,x-\dfrac{4}{x}+2\right)dx$.

1.4.1.2 $\int\left(\frac{6\sqrt[5]{x}-3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[7]{x}}+\cos x+3^x+\frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)}+\frac{3\sin x+5\sin^2 x}{4\sin x}+\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

1.4.1.3 $\int\left(\frac{4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x}}-9\operatorname{sh}x+4^x+\frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}-\frac{\cos x-\cos^2 x}{3\cos x}+5\operatorname{th}^2 x-\frac{9}{x^{10}}\right)dx.$

1.4.1.4 $\int\left(\frac{9\sqrt[9]{x}-6\sqrt[4]{x}}{5\sqrt[3]{x}}+4\operatorname{ch}x+5^x+\frac{(2-x)^2}{x(4+x^2)}+\frac{7\sin x-8\sin^2 x}{5\sin x}+\operatorname{cth}^2 x-\frac{7}{x}\right)dx.$

1.4.1.5 $\int\left(\frac{9\sqrt{x}+6\sqrt[5]{x}}{3\sqrt[10]{x}}-\sin x+6^x+\frac{(3+x)^2}{x(9+x^2)}+\frac{2\cos x+\cos^2 x}{5\cos x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-6\right)dx.$

1.4.1.6 $\int\left(\frac{8\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^7}}+\cos x+8^x+3\cdot\frac{(4+x)^2}{x(16+x^2)}+\frac{1+3\sin x}{2\sin x}+\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{8}{x^9}\right)dx.$

1.4.1.7 $\int\left(\frac{4\sqrt[10]{x}-3\sqrt[5]{x}}{6\sqrt[15]{x}}-2\operatorname{sh}x+7^x+\frac{(3-x)^2}{x(9+x^2)}-\frac{7-5\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{4}{x^5}\right)dx.$

1.4.1.8 $\int\left(\frac{8\sqrt[6]{x}-6\sqrt[7]{x}}{7\sqrt[3]{x^4}}+9\operatorname{ch}x+9^x+\frac{(4-x)^2}{x(16+x^2)}+5^{2x}\cdot 3^x+\frac{2}{\sqrt{x^2-7}}-\frac{8}{x^9}+5\right)dx.$

1.4.1.9 $\int\left(\frac{12\sqrt[3]{x}-21\sqrt[4]{x}}{8\sqrt[12]{x}}-7\sin x+10^x+\frac{(5+x)^2}{x(25+x^2)}-\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\sin x}+9\operatorname{tg}^2 x-\frac{4}{x}\right)dx.$

1.4.1.10 $\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}-3\sqrt[6]{x}}{9\sqrt[8]{x}}+2\cos x+11^x+\frac{(6+x)^2}{x(36+x^2)}+\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}+7\operatorname{ctg}^2 x+\frac{5}{x^6}\right)dx.$

1.4.1.11 $\int\left(\frac{7\sqrt[7]{x^2}+\sqrt{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}}-3\operatorname{sh}x+12^x+\frac{(5-x)^2}{x(25+x^2)}-\frac{3-2\cos x}{\cos x}+2\operatorname{th}^2 x-\frac{8}{x}+8\right)dx.$

1.4.1.12 $\int\left(\frac{8\sqrt[9]{x^2}-5\sqrt[8]{x^5}}{4\sqrt[4]{x^5}}+\operatorname{ch}x+13^x+\frac{(6-x)^2}{x(36+x^2)}+\frac{\sin x-5\sin^2 x}{4\sin x}+\operatorname{cth}^2 x-\frac{7}{x}\right)dx.$

1.4.1.13 $\int\left(\frac{4\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[30]{x}}-\sin x+7^x+\frac{(7+x)^2}{x(49+x^2)}+\frac{\cos x+8\cos^2 x}{2\cos x}+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx.$

1.4.1.14 $\int\left(\frac{7\sqrt[3]{x^8}-8\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[12]{x}}+\cos x+15^x+\frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)}+\frac{1+3\sin x}{2\sin x}+\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{2}{x^3}\right)dx.$

1.4.1.15 $\int\left(\frac{4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}}{12\sqrt[12]{x}}-\operatorname{sh}x+16^x+\frac{(7-x)^2}{x\left(49+x^2\right)}-\frac{3-\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{4}{x^5}+e\right)dx.$

1.4.1.16 $\int\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{8\sqrt[6]{x}}-9\sin x+17^x+\frac{(8+x)^2}{x\left(64+x^2\right)}-\frac{7\cos x+\cos^2 x}{3\cos x}-\operatorname{tg}^2 x-\frac{7}{x^8}\right)dx.$

1.4.1.17 $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[8]{x}}{5\sqrt{x}}+8\cos x+18^x+\frac{(9+x)^2}{x\left(81+x^2\right)}+\frac{\sin x+2\sin^2 x}{3\sin x}+4\operatorname{ctg}^2 x+\frac{4}{x}\right)dx$

.

1.4.1.18 $\int\left(\frac{\sqrt[7]{x}-2\sqrt[6]{x}}{3\sqrt[5]{x}}+4\operatorname{sh}x+19^x+\frac{(8-x)^2}{x\left(64-x^2\right)}-\frac{\cos x-3\cos^2 x}{6\cos x}+7\operatorname{th}^2 x-\frac{5}{x}\right)dx.$

1.4.1.19 $\int\left(\frac{\sqrt[5]{x}-3\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[3]{x}}+\operatorname{ch}x+20^x+\frac{(x-1)^2}{x\left(x^2-1\right)}+\frac{\sin x-3\sin^2 x}{5\sin x}+\operatorname{cth}^2 x-\frac{3}{x^4}+7\right)dx.$

1.4.1.20 $\int\left(\frac{5\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}{4\sqrt[3]{x}}-7\sin x+21^x+\frac{(x+3)^2}{x\left(x^2+9\right)}+\frac{3\cos x+\cos^2 x}{6\cos x}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx.$

1.4.1.21 $\int\left(\frac{5\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[3]{x^7}}+\cos x+21^x+\frac{(x+4)^2}{x\left(x^2+16\right)}+\frac{1+5\sin x}{5\sin x}+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6}{x^7}\right)dx.$

1.4.1.22 $\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}{20\sqrt{x}}-3\operatorname{sh}x+22^x+\frac{(x-3)^2}{x\left(x^2-9\right)}-\frac{2-4\cos x}{2\cos x}+\frac{3}{\sqrt{16+x^2}}-\frac{7}{x^8}\right)dx.$

1.4.1.23 $\int\left(\frac{8\sqrt[8]{x}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}}+5\operatorname{ch}x+23^x+\frac{(x-4)^2}{x\left(16+x^2\right)}+6^{2x}\cdot 5^x+\frac{3}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{5}{x^6}+\pi\right)dx.$

1.4.1.24 $\int\left(\frac{\sqrt[8]{x}+5\sqrt[5]{x}}{4\sqrt[4]{x}}-8\sin x+24^x+\frac{(x+5)^2}{x\left(x^2+25\right)}-\operatorname{tg}x\cdot\frac{2}{\sin x}+3\operatorname{tg}^2 x-\frac{8}{x}\right)dx.$

1.4.1.25 $\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+3\cos x+25^x+\frac{(x+6)^2}{x\left(x^2+36\right)}+\frac{2}{\sqrt{3-x^2}}+5\operatorname{ctg}^2 x+\frac{3}{x^4}\right)dx.$

1.4.1.26 $\int\left(\frac{6\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[5]{x^3}}-5\operatorname{sh}x+26^x+\frac{(x-5)^2}{x\left(x^2+25\right)}-\frac{2-3\cos x}{\cos x}+7\operatorname{th}^2 x-\frac{5}{x^6}\right)dx.$

1.4.1.27 $\int\left(\frac{\sqrt{x^9}-\sqrt[5]{x^8}}{3\sqrt[6]{x^5}}+\operatorname{ch}x+27^x+\frac{(x-6)^2}{x\left(x^2+36\right)}+\frac{\sin x-6\sin^2 x}{3\sin x}+3\operatorname{cth}^2 x-\frac{7}{x}\right)dx.$

1.4.1.28 $\int\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{x}}-8\sin x+28^x+\frac{(x+7)^2}{x(x^2+49)}+\frac{3\cos x+\cos^2 x}{5\cos x}+\frac{2}{\sqrt{8-x^2}}\right)dx$.

1.4.1.29 $\int\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[7]{x^3}}{7\sqrt{x^3}}+2\cos x+29^x+\frac{(x+8)^2}{x(x^2+64)}+\frac{2+\sin x}{2\sin x}+\frac{9}{\cos^2 x}+\frac{11}{x^{12}}\right)dx$.

1.4.1.30 $\int\left(\frac{\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}}{24\sqrt[6]{x}}-3\mathrm{sh}x+30^x+\frac{(x-7)^2}{x(x^2+49)}-\frac{2-\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}-\frac{5}{x^6}\right)dx$.

2 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: интегрирование подстановкой или заменой переменной, метод «поднесения» функции под знак дифференциала, метод интегрирования по частям.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Кроме метода непосредственного интегрирования рассматриваются ещё два метода интегрирования: метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Метод подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить неопределённый интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Метод подстановкой состоит в том, что в заданном интеграле $\int f(x)dx$ переменную интегрирования x заменяем новой переменной интегрирования z по формуле $x=\varphi(z)$. Тогда подынтегральное выражение будет иметь вид: $f(x)dx=f(\varphi(z))d\varphi(z)=f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$.

Теорема 2.1.1 Пусть функция $x=\varphi(z)$ определена и дифференцируема на некотором множестве K и пусть M – множество значений этой функции, на котором определена функции $f(x)$. Тогда если на множестве M функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве K справедлива формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz. \qquad (2.1.1)$$

Предположим, что интеграл, стоящий в правой части формулы (2.1.1), известен, то есть $\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C$.

Отсюда можно найти исходный интеграл в виде функции от переменной x. Для этого необходимо разрешить уравнение $x = \varphi(z)$ относительно переменной z. Если $z = \psi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C = \Phi(\psi(x)) + C.$$

Часто при нахождении неопределённых интегралов пользуются методом «*подведения*» под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\eta'(x)dx = d(\eta(x))$. Переход от левой части последнего равенства к правой части называется подведением множителя $\eta'(x)$ под знак дифференциала.

Предположим, что необходимо найти интеграл вида

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx.$$

Внесём в этом интеграле множитель $\eta'(x)$ под знак дифференциала и выполним замену переменной $\eta'(x) = t$:

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx = \int g(\eta(x))d(\eta(x)) = \int g(t)dt.$$

Если интеграл $\int g(t)dt$ является табличным, то его находят непосредственным интегрированием.

Метод интегрирования по частям

Теорема 2.1.2 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на промежутке I, то справедлива следующая формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2.1.2)$$

Формула (2.1.2) называется «*формулой интегрирования по частям*».

Формула интегрирования по частям в основном применяется, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на трансцендентную функцию (всякая аналитическая функция, отличная от алгебраической функции, для вычисления значений которой помимо алгебраических операций над аргументом, необходимо применять предельный переход в той или иной форме) или произведение трансцендентных функций. В частности, к трансцендентным функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические, обратно тригонометрические, гиперболические и обратно гиперболические функции.

В формуле интегрирования по частям через функцию $u = u(x)$ обозначают ту функцию, производная которой даёт наибольшее упрощение. Через дифференциал dv обозначаем всё то, что осталось в подынтегральном выражении. Если выполняется условие теоремы 2.1.2, то формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно.

Приведём некоторые часто встречающиеся типы интегралов, которые находятся по формуле интегрирования по частям.

1. *Интегралы типа* $\int P_n(x)\sin\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\beta x\,dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{sh}\,\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{ch}\,\alpha x\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x, а α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить всё то, что остаётся в подынтегральном выражении, и применить формулу интегрирования по частям n раз.

2. *Интегралы типа* $\int P_n(x)\log_a\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\ln\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\arccos\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,\beta x\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x, а β – некоторое число. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить функцию u равной множителю при многочлене $P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить $P_n(x)dx$.

3. *Интегралы типа* $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, где α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, необходимо дважды применить формулу интегрирования по частям.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t,\, x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)'dt = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot 2tdt}{t} = 2\int \cos tdt = 2\sin t + C =$$
$$= 2\sin\sqrt{x} + C.$$

2.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \left(2 + 4\cos 5x\right)^3 \sin 5x\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int (2+4\cos 5x)^3 \sin 5x\, dx = \begin{bmatrix} 2+4\cos 5x = t \\ d(2+4\cos 5x) = dt \\ -20\sin 5x dx = dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{20}\int t^3 dt = -\frac{1}{80}t^4 + C =$$

$$= -\frac{1}{80}(2+4\cos 5x)^4 + C.$$

2.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int 4x \ln x\, dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 4x\ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = 4x\, dx & v = 2x^2 \end{bmatrix} = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C.$$

2.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int 125x^2 \sin 3x\, dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 125x^2 \sin 5x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = 125\sin 5x\, dx & v = -25\cos 5x \end{bmatrix} = -25x^2 \cos 5x + \int 50x\cos 5x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2x & du = 2dx \\ dv = 25\cos 5x\, dx & v = 5\sin 5x \end{bmatrix} = -25x^2\cos 5x + 10x\sin 5x - \int 10\sin 5x\, dx =$$

$$= -25x^2 \cos 5x + 10x\sin 5x + 2\cos 5x + C.$$

2.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)), а затем формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)' dt = 2tdt \end{bmatrix} = \int 2te^t dt = \begin{bmatrix} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix} = 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти неопределённые интегралы.

2.3.1.1 $\int \sin(3x+4)\,dx$. **2.3.1.2** $\int \frac{\sin(3x-1)}{\cos^3(3x-1)}dx$. **2.3.1.3** $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

2.3.1.4 $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5}dx$. **2.3.1.5** $\int xe^{x^2+1}\,dx$. **2.3.1.6** $\int \frac{\mathrm{tg}\,3x\,dx}{\cos^2 3x}$.

2.3.1.7 $\int \frac{6-\cos 3x}{\sin^2 3x}dx$. **2.3.1.8** $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. **2.3.1.9** $\int \frac{x^3dx}{x^8+1}$.

2.3.2 Найти неопределённые интегралы.

2.3.2.1 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. **2.3.2.2** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x}$. **2.3.2.3** $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

2.3.3 Найти неопределённые интегралы.

2.3.3.1 $\int (3x+4)e^{2x+1}\,dx$. **2.3.3.2** $\int (x^2-1)\ln x dx$. **2.3.3.3** $\int x^2\cos 3x\,dx$.

2.3.3.4 $\int \mathrm{arctg}\,2x\,dx$. **2.3.3.5** $\int (x-1)\sin 6x\,dx$. **2.3.3.6** $\int x\arcsin x\,dx.$

2.3.4 Найти неопределённые интегралы.

2.3.4.1 $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$. **2.3.4.2** $\int \sin\sqrt{x}dx$. **2.3.4.3** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

2.4.1.1 а) $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$; б) $\int 27(x^2-2)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.4.1.2 а) $\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$; б) $\int (x^2+2x)\ln x dx$; в) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

2.4.1.3 а) $\int \frac{\left(2x-5\right)dx}{x^2-5x+6}$; б) $\int 8x^2\sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

2.4.1.4 а) $\int \mathrm{tg}\left(6x+4\right)dx$; б) $\int \mathrm{arctg}\,2x\,dx$; в) $\int 2x^3\sin x^2dx$.

2.4.1.5 а) $\int \mathrm{ctg}(3x-1)dx$; б) $\int 27x^2\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{\mathrm{arcctg}\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}dx.$

2.4.1.6 а) $\int \mathrm{th}\left(4x+5\right)dx$; б) $\int \mathrm{arcctg}\,3x\,dx$; в) $\int 3x^5\cos x^3\,dx$.

2.4.1.7 а) $\int \mathrm{cth}\left(7x+5\right)$; б) $\int \frac{x\sin 4x}{\cos^2 4x}dx$; в) $\int \frac{\arcsin\sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}}dx$.

2.4.1.8 а) $\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; б) $\int \arcsin 2x\,dx$; в) $\int 3x^7 \sin x^4 dx$.

2.4.1.9 а) $\int \sin^3 5x \cos 5x\,dx$; б) $\int \frac{x\cos 5x}{\sin^2 5x}dx$; в) $\int \frac{\arccos \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

2.4.1.10 а) $\int \cos^4 3x \sin 3x\,dx$; б) $\int \arccos 7x\,dx$; в) $\int 2x^9 \cos x^5 dx$.

2.4.1.11 а) $\int \frac{\mathrm{tg}^5 7x\,dx}{\cos^2 7x}$; б) $\int x^2 \log_2 x \ln 2dx$; в) $\int 10x^3 5^{5x^2+3} dx$.

2.4.1.12 а) $\int \frac{\mathrm{ctg}^6 4x\,dx}{\sin^2 4x}$; б) $\int 64x^2 5^{4x+2} dx$; в) $\int x^3 \log_3 x^2 dx$.

2.4.1.13 а) $\int \frac{\mathrm{arctg}^9 8x\,dx}{1+64x^2}$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}\, 2x\,dx$; в) $\int 8x^{15} \sin x^8\,dx$.

2.4.1.14 а) $\int \frac{\mathrm{arcctg}^4 3x\,dx}{1+9x^2}$; б) $\int 27x^2 \sin 3x\,dx$; в) $\int \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

2.4.1.15 а) $\int \frac{\arcsin^6 7x\,dx}{\sqrt{1-49x^2}}$; б) $\int x\,\mathrm{arcctg}\, 5x\,dx$; в) $\int 7x^5 \cos x^3 dx$.

2.4.1.16 а) $\int \frac{\arccos^7 6x\,dx}{\sqrt{1-36x^2}}$; б) $\int \frac{x\sin 5x}{\cos^2 5x}dx$; в) $\int \arcsin\sqrt[4]{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.4.1.17 а) $\int \frac{\left(\ln^3 5x+\ln 3x\right)dx}{x}$; б) $\int x\arcsin 7x\,dx$; в) $\int \frac{\ln\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

2.4.1.18 а) $\int \frac{\left(\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x\right)dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{x\cos 6x}{\sin^2 6x}dx$; в) $\int 3^{\sqrt{x}} dx$.

2.4.1.19 а) $\int \frac{\left(\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}\, x\right)dx}{\sin^2 x}$; б) $\int 64(x^2-3)e^{4x}dx$; в) $\int \frac{\log_5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

2.4.1.20 а) $\int e^{3x^2+x}(12x+2)\,dx$; б) $\int (x^2+5x)\ln x dx$; в) $\int 6x^{11}\sin x^6\,dx$.

2.4.1.21 а) $\int 2^{x^2+4x}(4x+8)\,dx$; б) $\int 27x^2 \sin 3x\,dx$; в) $\int \mathrm{arctg}\sqrt[7]{x}\frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$.

2.4.1.22 а) $\int \frac{6xdx}{\sqrt{81x^4-16}}$; б) $\int \mathrm{arctg}\, 4x\,dx$; в) $\int 9x^3 \cos x^2 dx$.

2.4.1.23 а) $\int \frac{12xdx}{\sqrt{9x^2-2}}$; б) $\int 216x^2 \cos 6x\,dx$; в) $\int x^3\,\mathrm{arcctg}\, x^2\,dx$.

2.4.1.24 а) $\int \frac{8xdx}{\sqrt{16x^4+49}}$; б) $\int \mathrm{arcctg}\, 9x\,dx$; в) $\int x\arcsin x^2\,dx$.

2.4.1.25 а) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^4-2}}$; б) $\int \frac{x\sin 6x}{\cos^2 6x}dx$; в) $\int x\arccos x^2\,dx$.

2.4.1.26 а) $\int \frac{24x^5dx}{64x^{12}+1}$; б) $\int \arcsin 5x\,dx$; в) $\int x^5 6^{3x^3+1}dx$.

2.4.1.27 а) $\int \frac{10x^4dx}{32x^{10}+1}$; б) $\int \frac{x\cos 11x}{\sin^2 11x}dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}dx.$

2.4.1.28 а) $\int \frac{\sin^2 x\cos x\,dx}{\sin^6 x+4}$; б) $\int \arccos 8x\,dx$; в) $\int \frac{\ln(\ln(\ln x))}{x\ln x}dx$.

2.4.1.29 а) $\int \frac{\cos^2 x\sin x\,dx}{\cos^3 x+16}$; б) $\int x^2\log_3 x\ln 3dx$; в) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.4.1.30 а) $\int \frac{\left(3^{\sqrt{x}}-5\right)dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int 27x^2 7^{3x+2}dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Содержание: рациональные дроби, интегрирование простейших рациональных дробей, разложение рациональной дроби на простейшие дроби, интегрирование рациональных дробей методом неопределённых коэффициентов, интегрирование рациональных дробей методом частных значений, правило интегрирования произвольных рациональных дробей.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены, то есть любая дробь вида

$$R(x)=\frac{A_n(x)}{B_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}.$$

Если степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя $(n\ge m)$, то дробь называется *неправильной рациональной дробью*. Если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя $(n<m)$, то дробь называется *правильной рациональной дробью*.

Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, для чего необходимо разделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе по правилу деления многочленов:

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = P(x) + \frac{C_k(x)}{B_m(x)},$$

где $P(x)$ – целая часть дроби $\dfrac{A_n(x)}{B_m(x)}$; $C_k(x)$ – остаток от деления (многочлен степени $k < m$).

Например,

$$\frac{x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 2x - 3} = x^2 + 4x + \frac{2x+1}{x^2 + 2x - 3},$$

так как

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2} & x^2 + 4x \quad \leftarrow \textit{целая часть} \\
 & - \; 4x^3 + 8x^2 - 10x & \\
 & \quad \underline{4x^3 + 8x^2 - 12x} & \\
 & \qquad\qquad 2x + 1 \quad \leftarrow \textit{остаток} &
\end{array}$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, то есть к использованию табличных интегралов и интегрированию правильной рациональной дроби. Интегрирование правильных рациональных дробей осуществляется путём перехода к интегрированию простейших рациональных дробей.

Простейшей рациональной дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырёх типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}\,(n \ge 2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,(n \ge 2)$.

В простейших рациональных дробях параметры A, M, N, a, p, q – действительные числа, а квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то есть дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных методов интегрирования неопределённого интеграла и таблицы основных неопределённых интегралов:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = \frac{A}{(1-n)\cdot (x-a)^{n-1}} + C.$$

Найдём интеграл от простейшей рациональной дроби третьего типа.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left[\begin{array}{l}\textit{в числителе выделяем}\\ \textit{производную знаменателя}\end{array}\right] = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\textit{представляем интеграл в}\\ \textit{виде суммы двух интегралов}\end{array}\right] = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\textit{в первом интеграле подводим выражение } (2x+p) \textit{ под знак дифференциала,}\\ \textit{а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'\,dx}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Рассмотрим интегрирование простейшей рациональной дроби четвёртого типа $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$. Интегрирование дроби этого типа после выделения в числителе производной квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе, и выделения полного квадрата в этом трёхчлене сводится к вычислению интегралов

$$\int \left(x^2+px+q\right)^{-n} d\left(x^2+px+q\right) = \frac{1}{(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}} + C_1$$

и

$$I_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}.$$

В последнем интеграле $z = x + p/2$, $b = \sqrt{4q-p^2}/2$.

Представим последний интеграл в виде

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}=\frac{1}{b^2}\int\frac{\left(z^2+b^2\right)-z^2}{\left(z^2+b^2\right)^n}dz=\frac{1}{b^2}\left(\int\frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}-\int\frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}\right)=$$

$$=\left[\int\frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}=I_{n-1}\right]=\frac{1}{b^2}\left(I_{n-1}-\int\frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}\right).$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}$ воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int\frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}=\begin{bmatrix} u=z & du=dz \\ dv=\frac{zdz}{\left(z^2+b^2\right)^n} & v=\frac{1}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}\end{bmatrix}=\frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}=\frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу интеграла I_n, имеем

$$I_n=\frac{1}{b^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}-\frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}\right). \tag{3.1.1}$$

Формула (3.1.1) называется рекуррентной. Зная табличный интеграл $I_1=\int\frac{dz}{z^2+b^2}=\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{z}{b}+C$, по формуле (3.1.1) можно найти интеграл $I_2=\int\frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^2}$ и т. д.

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех четырёх типов простейших рациональных дробей.

Рассмотрим произвольную правильную рациональную дробь. Любую правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого – четвёртого типа. Для разложения $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби необходимо разложить многочлен $B_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение $B_m(x)=0$. Предположим, что многочлен $B_m(x)$ разложим на простейшие линейные и квадратные множители:

$$B_m(x)=\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}\ldots\left(x-\alpha_i\right)^{s_i}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j},$$
где $s_1+\ldots+s_i+2r_1+\ldots+2r_j=m$.

Теорема 3.1.1 Правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$, где $B_m(x)=\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}\ldots\left(x-\alpha_i\right)^{s_i}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$, можно единственным образом разложить на сумму простейших рациональных дробей:

$$\frac{C_k(x)}{B_m(x)}=\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{\left(x-\alpha_1\right)^2}+\ldots+\frac{A_{1s_1}}{\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i}+\frac{A_{i2}}{\left(x-\alpha_i\right)^2}+\ldots+\frac{A_{is_i}}{\left(x-\alpha_i\right)^{s_i}}+$$
$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{1r_1}x+N_{1r_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{M_{j1}x+N_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_{j2}x+N_{j2}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{M_{jr_j}x+N_{jr_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}},$$

где коэффициенты в разложении являются некоторыми действительными числами.

Проиллюстрируем формулу теоремы 3.1.1 примерами, не находя коэффициентов в разложении.

1) $\dfrac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+2)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+2x+2}$;

2) $\dfrac{3x^2-4x+1}{(x-3)^3(x^2-x+4)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{(x-3)^3}+\dfrac{Mx+N}{x^2-x+4}$;

3) $\dfrac{x-4}{x^4(x^2+4)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x^4}+\dfrac{Mx+N}{x^2+4}+\dfrac{Kx+L}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Чтобы найти коэффициенты в разложении правильной рациональной дроби на простейшие рациональные дроби, чаще всего используют метод неопределённых коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределённых коэффициентов

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами. Приводим простейшие дроби в разложении к общему знаменателю $B_m(x)$ и приравниваем многочлен, получившийся в числителе, многочлену $C_k(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая равенство многочленов, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного равенства. В результате получаем систему m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными. Решая полученную систему, находим неизвестные коэффициенты в разложении дроби на простейшие рациональные дроби.

Метод частных значений

При использовании данного метода для нахождения неопределённых коэффициентов придаём переменной x несколько частных значений (по числу неопределённых коэффициентов) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов. Наиболее выгодно применять этот метод в случае простых действительных корней уравнения $B_m(x)=0$. Тогда удобно последовательно полагать x равным одним из корней многочлена, стоящего в знаменателе.

Иногда для нахождения неопределённых коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, то есть приравнивать коэффициенты при некоторых степенях переменной и придавать переменной частные значения.

Сформулируем **правило интегрирования рациональных дробей**.

Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1) если рассматриваемая дробь является неправильной, то её необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) если рассматриваемая рациональная дробь является правильной, то её необходимо представить в виде суммы простейших рациональных дробей;

3) интеграл от рациональной дроби необходимо представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{(4x-1)dx}{x^5-x^2}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда подынтегральная функция представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{4x-1}{x^5-x^2}=\frac{4x-1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть, получаем дробь, равную первоначальной, причём её знаменатель равен знаменателю исходной дроби, а, следовательно, числители полученных дробей также будут равны.

$$Ax(x-1)(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+$$
$$+(Mx+N)x^2(x-1)=4x-1.$$

Для определения неизвестных параметров в разложении применим комбинированный метод «неопределённых коэффициентов».

При значении переменной $x=0$, получаем значение параметра $B=1$.

При значении переменной $x=1$, получаем значение параметра $C=1$.

Перепишем равенство числителей дробей в виде

$$A(x^4-x)+B(x^3-1)+C(x^4+x^3+x^2)+M(x^4-x^3)+N(x^3-x^2)=4x-1,$$

или, с учётом найденных параметров, равенство принимает вид

$$\left(A+1+M\right)x^4+\left(2-M+N\right)x^3+(1-N)x^2-Ax=4x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+1+M=0, \\ 2-M+N=0, \\ 1-N=0, \\ -A=4. \end{cases}$$

Из полученной системы находим неизвестные параметры в разложении исходной подынтегральной функции: $A=-4$, $B=1$, $C=1$, $M=3$, $N=1$.

Итак, $\dfrac{4x-1}{x^5-x^2}=-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$.

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{4x-1}{x^5-x^2}dx=-4\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{3x+1}{x^2+x+1}dx=$

$$=-4\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\int\frac{2x+1-1/3}{x^2+x+1}dx=\ln\frac{|x-1|}{x^4}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\ln\frac{|x-1|}{x^4}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{\left(x^2+x+1\right)'dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}=$$

$$=\ln\frac{|x-1|}{x^4}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

3.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\, x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x} & x+3 \\ -\, 3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x^2+6} & \\ 3x+1 & \end{array}$$

Таким образом, $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx = \int x\,dx + 3\int dx +$

$$+\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти неопределённые интегралы.

3.3.1.1 $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$. **3.3.1.2** $\int\frac{(3x-1)dx}{x^3-4x^2+3x}$. **3.3.1.3** $\int\frac{dx}{x^3-9x}$.

3.3.1.4 $\int\frac{6x-2}{(x-5)^2(x+2)}dx$. **3.3.1.5** $\int\frac{(x+1)dx}{x^4+4x^3+4x^2}$. **3.3.1.6** $\int\frac{(x^2+3)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.1.7 $\int\frac{(6-x)dx}{(x-2)(x^2+6x+13)}$. **3.3.1.8** $\int\frac{(x+5)dx}{x^3+2x^2+5x}$. **3.3.1.9** $\int\frac{(x^3+2)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.2 Найти неопределённые интегралы.

3.3.2.1 $\int\frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16}$. **3.3.2.2** $\int\frac{(x^3+x^2)dx}{x^2-6x+5}$. **3.3.2.3** $\int\frac{x^4\,dx}{x^2-4x+20}$.

3.3.2.4 $\int\frac{x^2\,dx}{x^2+8x+41}$. **3.3.2.5** $\int\frac{(x^3-2x)dx}{x^2+7x-8}$. **3.3.2.6** $\int\frac{x^5-x^4}{x^3+4096}dx$

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти неопределённые интегралы.

3.4.1.1 а) $\int\frac{(7x^2-1)dx}{x^3-2x^2-3x}$; б) $\int\frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int\frac{x^4}{x^3-1}dx$.

3.4.1.2 а) $\int\frac{\left(x^2+2\right)dx}{x^3+2x^2-3x}$; б) $\int\frac{\left(x^2-19x+34\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int\frac{x^4+2x}{x^3+1}dx$.

3.4.1.3 а) $\int\frac{\left(x^2-5\right)dx}{x^3+3x^2-4x}$; б) $\int\frac{\left(2x+22\right)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int\frac{2x^5}{x^3-8}dx$.

3.4.1.4 а) $\int\frac{\left(2x^2+1\right)dx}{x^3+x^2-2x}$; б) $\int\frac{\left(3x+13\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int\frac{x^5-2}{x^3+8}dx$.

3.4.1.5 а) $\int\frac{\left(4x^2-5\right)dx}{x^3-3x^2+2x}$; б) $\int\frac{\left(4x+2\right)dx}{x^4+4x^2}$; в) $\int\frac{3x^4}{x^3-27}dx$.

3.4.1.6 а) $\int\frac{\left(3x+2\right)dx}{x^3+6x^2+8x}$; б) $\int\frac{\left(4x^2+38\right)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int\frac{x^4+3x}{x^3+27}dx$.

3.4.1.7 а) $\int\frac{\left(x-9\right)dx}{x^3-6x^2+8x}$; б) $\int\frac{\left(x^2-6x+8\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int\frac{4x^5}{x^3-64}dx$.

3.4.1.8 а) $\int\frac{\left(5x^2-9\right)dx}{x^3-7x^2+12x}$; б) $\int\frac{\left(x^2-5x+40\right)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int\frac{4x^5-x^2}{x^3+64}dx$.

3.4.1.9 а) $\int\frac{\left(4x-3\right)dx}{x^3-8x^2+15x}$; б) $\int\frac{8\,dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int\frac{5x^4}{x^3-125}dx$.

3.4.1.10 а) $\int\frac{\left(6x^2+2\right)dx}{x^3-9x^2+18x}$; б) $\int\frac{\left(12-6x\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int\frac{5x^4+3x}{x^3+125}dx$.

3.4.1.11 а) $\int\frac{\left(3x^2+3\right)dx}{x^3-7x^2+10x}$; б) $\int\frac{\left(4x-x^2-12\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int\frac{6x^5}{x^3-216}dx$.

3.4.1.12 а) $\int\frac{\left(2x+5\right)dx}{x^3+4x^2-12x}$; б) $\int\frac{\left(2x^2+4x+20\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int\frac{6x^5-x}{x^3+216}dx$.

3.4.1.13 а) $\int\frac{\left(8x^2+2\right)dx}{x^3-5x^2-14x}$; б) $\int\frac{\left(2x^2+2x+20\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int\frac{7x^4}{x^3-343}dx$.,

3.4.1.14 а) $\int\frac{\left(3x+7\right)dx}{x^3-8x^2+12x}$; б) $\int\frac{\left(x^2-13x+40\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int\frac{x^4+7x}{x^3+343}dx$.

3.4.1.15 а) $\int\frac{\left(7x^2+2\right)dx}{x^3-10x^2+21x}$ б) $\int\frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int\frac{8x^5+x^4}{x^3-512}dx$.

3.4.1.16 а) $\int\frac{\left(2x+6\right)dx}{x^3+8x^2+12x}$; б) $\int\frac{\left(x^2+3x+2\right)dx}{x^3-1}$; в) $\int\frac{8x^5-x}{x^3+512}dx$.

3.4.1.17 а) $\int\frac{\left(2x^2-4\right)dx}{x^3+2x^2-8x}$; б) $\int\frac{\left(6-9x\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int\frac{9x^4}{x^3-729}dx$.

3.4.1.18 а) $\int\frac{\left(3x-5\right)dx}{x^3+2x^2-15x}$; б) $\int\frac{\left(4x^2+7x+5\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ в) $\int\frac{x^4-9x}{x^3+729}dx$.

3.4.1.19 а) $\int \frac{\left(2x^2+6\right)dx}{x^3+6x^2-7x}$; б) $\int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int \frac{x^5+10x^3}{x^3-1000}dx$.

3.4.1.20 а) $\int \frac{\left(3x-2\right)dx}{x^3-x^2-6x}$; б) $\int \frac{\left(3-9x\right)dx}{x^3-1}$; в) $\int \frac{x^5-10x^4}{x^3+1000}dx$.

3.4.1.21 а) $\int \frac{\left(3x^2-4\right)dx}{x^3+x^2-12x}$; б) $\int \frac{\left(4x^2+x+10\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{11x^4}{x^3-1331}dx$.

3.4.1.22 а) $\int \frac{\left(5x-2\right)dx}{x^3+7x^2+10x}$; б) $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int \frac{11x^4+x^3}{x^3+1331}dx$.

3.4.1.23 а) $\int \frac{\left(2x^2-6\right)dx}{x^3+4x^2-12x}$; б) $\int \frac{\left(3x^2+2x+1\right)dx}{x^3-27}$; в) $\int \frac{x^5+12x^2}{x^3-1728}dx$.

3.4.1.24 а) $\int \frac{\left(4x+5\right)dx}{x^3-9x^2+20x}$; б) $\int \frac{\left(8x+5\right)dx}{(x+3)(x^2-8x+25)}$; в) $\int \frac{12x^5-2x}{x^3+1728}dx$.

3.4.1.25 а) $\int \frac{\left(2x^2-3\right)dx}{x^3+x^2-6x}$; б) $\int \frac{\left(2x^2+x+7\right)dx}{(x-3)(x^2+x+1)}$; в) $\int \frac{13x^4+x^2}{x^3-2197}dx$.

3.4.1.26 а) $\int \frac{\left(5x-4\right)dx}{x^3-x^2-20x}$; б) $\int \frac{\left(3x+5\right)dx}{x^3+27}$; в) $\int \frac{13x^4}{x^3+2197}dx$.

3.4.1.27 а) $\int \frac{\left(3x^2-7\right)dx}{x^3+4x^2-21x}$; б) $\int \frac{\left(4x^2+7\right)dx}{x^3+6x^2+25x}$; в) $\int \frac{14x^3+x^2}{x^3-2744}dx$.

3.4.1.28 а) $\int \frac{\left(8x+2\right)dx}{x^3-2x^2-8x}$; б) $\int \frac{\left(4x^2+3x\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int \frac{14x^5-x^4}{x^3+2744}dx$.

3.4.1.29 а) $\int \frac{\left(5x^2-3\right)dx}{x^3+2x^2-15x}$; б) $\int \frac{\left(5x+8\right)dx}{(x+1)(x^2-6x+34)}$; в) $\int \frac{x^4+15x^3}{x^3-3375}dx$.

3.4.1.30 а) $\int \frac{\left(4x-5\right)dx}{x^3+x^2-20x}$; б) $\int \frac{\left(4x+12\right)dx}{x^4+16x^2}$; в) $\int \frac{15x^5-x^4}{x^3+3375}dx$.

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Содержание: интегрирование интегралов вида $\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$, $\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$, универсальная тригонометрическая подстановка, подстановка вида $\mathrm{tg}\,x=t$.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегралы типа $\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$, где $m, n\in Z, m\ge 0, n\ge 0$.

Если числа m и n – чётные, то, применяются формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное, то отделяя от нечётной степени один сомножитель, подносим его под знак дифференциала. В подынтегральной функции переходим к функции, которую получили под знаком дифференциала, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Интегралы типа $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x \, dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \, dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x \, dx$.

Данные интегралы вычисляются путём разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right).$$

Интегралы типа $\int \operatorname{tg}^n x\, dx, \int \operatorname{ctg}^n x\, dx \ \ (n \in N, n > 1)$.

Они вычисляются подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$ соответственно.

Если $\operatorname{tg} x = t$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \frac{t^n dt}{1+t^2}$. Данный интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, который находится по правилу интегрирования рациональных дробей.

Интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если имеет место тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощённую подстановку* $\operatorname{tg} x = t$. При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \sin^2 3x\,dx$.

Решение. $\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C$.

4.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \cos^3 5x\,dx$.

Решение. $\int \cos^3 5x\,dx = \int \cos^2 5x \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \left(1-\sin^2 5x\right) d\sin 5x =$

$$= [\sin 5x = t] = \frac{1}{5}\int \left(1-t^2\right) dt = \frac{t}{5} - \frac{t^3}{15} + C = \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin^3 5x}{15} + C.$$

4.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \sin 12x \cos 8x\,dx$.

Решение. $\int \sin 4x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 6x)\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C$.

4.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{12\cos x + 5\sin x + 13}$.

Решение. $\int \frac{dx}{12\cos x + 5\sin x + 13} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{2\,dt}{\left(12\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\frac{2t}{1+t^2} + 13\right)\cdot\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2+10t+25} = 2\int \frac{dt}{(t+5)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+5} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5} + C.$$

4.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t, & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{10t^2}{1+t^2}\right)\cdot\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{1-9t^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3t}{1-3t}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3\operatorname{tg} x}{1-3\operatorname{tg} x}\right| + C.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Найти неопределённые интегралы.

4.3.1.1 $\int \cos^2 7x\,dx$. **4.3.1.2** $\int \sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$. **4.3.1.3** $\int \cos^4 x\sin^2 x\,dx$.

4.3.1.4 $\int \cos^3 2x\,dx$. **4.3.1.5** $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$. **4.3.1.6** $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$.

4.3.2 Найти неопределённые интегралы:

4.3.2.1 $\int \cos 6x\cos 4x dx$. **4.3.2.2** $\int \sin 6x\sin 2x\,dx$. **4.3.2.3** $\int \cos 5x\sin x\,dx$.

4.3.2.4 $\int \cos 8x\cos 7x dx$. **4.3.2.5** $\int \sin 9x\sin 6x\,dx$. **4.3.2.6** $\int \sin 7x\cos x\,dx$.

4.3.3 Найти неопределённые интегралы.

4.3.3.1 $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$. **4.3.3.2** $\int \frac{dx}{1-\sin x}$. **4.3.3.3** $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

4.3.3.4 $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\cos x+\sin x}$. **4.3.3.5** $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}$. **4.3.3.6** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

4.3.4 Найти неопределённые интегралы.

4.3.4.1 $\int \frac{dx}{\cos^2 x-4\sin^2 x}$. **4.3.4.2** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+8\cos^2 x}$. **4.3.4.3** $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

4.3.4.4 $\int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$. **4.3.4.5** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^2 x}$. **4.3.4.6** $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти неопределённые интегралы.

4.4.1.1 а) $\int \sin^2 3x\cos^3 3x dx$; б) $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$; в) $\int \frac{(2tgx-1)dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

4.4.1.2 а) $\int \sin^3 5x\cos^3 5x dx$; б) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x-8}$.

4.4.1.3 а) $\int \sin^3 7x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x-5}$.

4.4.1.4 а) $\int \cos^3 9x dx$; б) $\int \frac{dx}{12\sin x-15\cos x}$; в) $\int \frac{(3tgx+1)dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

4.4.1.5 а) $\int \sin^3 2x\cos^2 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{24\cos x+26}$; в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+1}$.

4.4.1.6 а) $\int \sin^4 8x\cos^3 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{3\cos x-5}$; в) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3}$.

4.4.1.7 а) $\int \sin^3 6x\cos^4 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{25\sin x+7}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{2\sin^2 x-2}$.

4.4.1.8 а) $\int \sin^4 2x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{41\sin x-9}$; в) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-1}$.

4.4.1.9 а) $\int \cos^4 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$; в) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x-2}$.

4.4.1.10 а) $\int \sin^5 12x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x+1}$.

4.4.1.11 а) $\int \sin^2 4x\cos^3 4x dx$; б) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$; в) $\int \frac{(4tgx-3)dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

4.4.1.12 а) $\int \sin^3 6x\cos^3 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{3-5\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{6\sin^2 x-9}$.

4.4.1.13 а) $\int \sin^3 8x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x-25}$.

4.4.1.14 а) $\int \cos^3 11x dx$; б) $\int \frac{dx}{9\sin x-6\cos x}$; в) $\int \frac{(5tgx+1)dx}{\cos 2x}$.

4.4.1.15 а) $\int \sin^3 3x\cos^2 3x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{8\cos x+10}$; в) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+1}$.

4.4.1.16 а) $\int \sin^4 9x\cos^3 9x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{40\cos x-24}$; в) $\int \frac{dx}{6\cos^2 x+1}$.

4.4.1.17 а) $\int \sin^3 7x\cos^4 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{13\sin x+5}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x-3}$.

4.4.1.18 а) $\int \sin^4 2x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x-3}$; в) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-1}$.

4.4.1.19 а) $\int \cos^4 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$; в) $\int \frac{dx}{9\cos^2 x-1}$.

4.4.1.20 а) $\int \cos^5 20x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x-3}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x-3}$.

4.4.1.21 а) $\int \sin^2 5x\cos^3 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5-11\cos x}$; в) $\int \frac{(5tgx-1)dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

4.4.1.22 а) $\int \sin^3 7x\cos^3 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{7-25\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-9}$.

4.4.1.23 а) $\int \sin^3 9x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x+12\cos x}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x-4}$.

4.4.1.24 а) $\int \cos^3 12x dx$; б) $\int \frac{dx}{12\sin x-5\cos x}$; в) $\int \frac{(7tgx+1)dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

4.4.1.25 а) $\int \sin^3 4x\cos^2 4x dx$; б) $\int \frac{dx}{15\cos x+17}$; в) $\int \frac{dx}{6\sin^2 x+1}$.

4.4.1.26 а) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{20\cos x-29}$; в) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2}$.

4.4.1.27 а) $\int \sin^3 8x \cos^4 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x + 3}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x - 4}$.

4.4.1.28 а) $\int \sin^4 3x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{7\sin x - 13}$; в) $\int \frac{dx}{12\sin^2 x - 1}$.

4.4.1.29 а) $\int \cos^4 6x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 4}$; в) $\int \frac{dx}{25\cos^2 x - 1}$.

4.4.1.30 а) $\int \cos^5 30x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x - \cos x - 5}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{16\sin^2 x + 1}$.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Содержание: методы замены переменных при интегрировании иррациональных выражений.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. В этих интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x. Они находятся с помощью подстановки $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = k_1, \frac{m_2}{n_2} = k_2, \dots$ являются целыми числами, то есть нахождение неопределённого интеграла сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t: $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx = \int R\left(t^s, t^{k_1}, t^{k_2}, \dots\right) s t^{s-1}\, dt$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots\right) dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. Они находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$. При такой замене переменной интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$**,** где R – рациональная функция двух аргументов, могут быть найдены с помощью подстановки $u = x + \frac{b}{2a}$. Они сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

Интегралы этого типа могут быть также найдены с помощью одной из трёх подстановок Эйлера:

1) если $a > 0$, то применяется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$;

2) если $a < 0, c > 0$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$;

3) если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0)$, где x_0 – один из корней квадратного трёхчлена.

Интегралы типа $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m, n, p \in Q,\ a, b \in R \setminus \{0\}$. Данные интегралы называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$. Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева П. Л. только в следующих трёх случаях:

1) если $p \in Z$, то применяется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n} \in Z$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s x^n$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома нельзя выразить через элементарные функции.

Рассмотрим интегралы от иррациональных функций, для интегрирования которых применяются тригонометрические подстановки.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, где R – рациональная функция аргументов $\left(|x| \le |a|\right)$, находятся с помощью подстановки $x = a\sin t$ *или* $x = a\cos t$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, где R – рациональная функция двух аргументов $(|x| \ge |a|)$, находятся с помощью подстановки $x = \dfrac{a}{\sin t}$ *или* $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, находятся с помощью подстановки $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ *или* $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$.

Решение. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x = t^4 & t = \sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3dt & \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{4t^3dt}{t-t^2} = -4\int \frac{t^2dt}{t-1} = -4\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = -4\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= -2t^2 - 4t - 4\ln|t-1| + C = -2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + C.$$

5.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1 = t^6 & t = \sqrt[6]{2x+1} \\ x = \frac{1}{2}\left(t^6-1\right) & dx = 3t^5dt \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

5.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \dfrac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$

5.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$.

Решение. $\int x^3\left(4-x^2\right)^{3/2}dx=\left[\begin{matrix} m=3 & n=2 & p=-\dfrac{3}{2}\notin Z \\ \dfrac{m+1}{n}=2\in Z & 4-x^2=t^2 & xdx=-tdt \end{matrix}\right]=$

$$=-\int(4-t^2)t^{-3}tdt=\int\frac{t^2-4}{t^2}dt=\int dt-4\int\frac{dt}{t^2}=t+\frac{4}{t}=\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}+C.$$

5.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\left[\begin{matrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t\,dt \\ t=\arcsin\dfrac{x}{2} \end{matrix}\right]=\int\sqrt{4-4\sin^2 x}\,2\cos t\,dt=4\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int\left(1+\cos 2t\right)dt=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\sin 2\arcsin\frac{x}{2}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\sin\arcsin\frac{x}{2}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{2}+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти неопределённые интегралы.

5.3.1.1 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. **5.3.1.2** $\int\dfrac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt{x}}$. **5.3.1.3** $\int\dfrac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.3.2 Найти неопределённые интегралы.

5.3.2.1 $\int\sqrt{\left(7+6x-x^2\right)^3}dx$. **5.3.2.2** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **5.3.2.3** $\int\dfrac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

5.3.3 Найти неопределённые интегралы.

5.3.3.1 $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$. **5.3.3.2** $\int\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}}$. **5.3.3.3** $\int\dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

5.3.3.4 $\int\dfrac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$. **5.3.3.5** $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **5.3.3.6** $\int\sqrt[7]{x}\,\sqrt[3]{2x+3}\,dx$.

5.3.4 Найти неопределённые интегралы.

5.3.4.1 $\int\dfrac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^2}$. **5.3.4.2** $\int\dfrac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^2}$. **5.3.4.3** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$.

5.3.4.4 $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$. **5.3.4.5** $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$. **5.3.4.6** $\int \sqrt{25+x^2}\,dx$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найти неопределённые интегралы.

5.4.1.1 а) $\int \frac{x}{1+\sqrt{4x+1}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}}$.

5.4.1.2 а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$.

5.4.1.3 а) $\int \frac{5}{1+\sqrt[4]{9x+1}}dx$; б) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

5.4.1.4 а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}\,dx}{x^3}$.

5.4.1.5 а) $\int \frac{2x+1}{2+\sqrt{7x+2}}dx$; б) $\int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx$.

5.4.1.6 а) $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{6x+7}}$; б) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5.4.1.7 а) $\int \frac{3x-1}{3+\sqrt[4]{4x+3}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-49}}$.

5.4.1.8 а) $\int \frac{3dx}{5+\sqrt[3]{9x+2}}$; б) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{64+x^2}}$.

5.4.1.9 а) $\int \frac{4x+5}{4+\sqrt{3x+4}}dx$; б) $\int \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}}dx$.

5.4.1.10 а) $\int \frac{x\,dx}{4+\sqrt[3]{3x+4}}$; б) $\int x^4\sqrt{9-x^2}\,dx$.

5.4.1.11 а) $\int \frac{7x}{5+\sqrt[4]{8x+5}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-49}}$.

5.4.1.12 а) $\int \frac{x\,dx}{9+\sqrt[3]{3x-1}}$; б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$.

5.4.1.13 а) $\int \frac{3x-2}{6+\sqrt{7x+6}}dx$; б) $\int \frac{28x^4}{\sqrt{81-x^2}}dx$.

5.4.1.14 а) $\int \frac{x\,dx}{6-\sqrt[3]{6x-9}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-36}\,dx}{x^3}$.

5.4.1.15 а) $\int \frac{2x+5}{7+\sqrt[4]{5x+2}}dx$; б) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

5.4.1.16 а) $\int \frac{2x\,dx}{5-3\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

5.4.1.17 а) $\int \frac{2x-4}{6-\sqrt{9x+2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-64}}$.

5.4.1.18 а) $\int \frac{3x\,dx}{4-3\sqrt[3]{x+2}}$; б) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{49+x^2}}$.

5.4.1.19 а) $\int \frac{3x-3}{5+\sqrt[4]{7x+1}}dx$; б) $\int \frac{12x^3}{\sqrt{36-x^2}}dx$.

5.4.1.20 а) $\int \frac{dx}{6+2\sqrt[3]{6x+5}}$; б) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

5.4.1.21 а) $\int \frac{7x+6}{6+\sqrt{2x+7}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$.

5.4.1.22 а) $\int \frac{4x\,dx}{10+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}}$.

5.4.1.23 а) $\int \frac{x-1}{9+\sqrt[4]{6x+5}}dx$; б) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{64-x^2}}dx$.

5.4.1.24 а) $\int \frac{5x\,dx}{3-\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}\,dx}{x^3}$.

5.4.1.25 а) $\int \frac{3x}{8+\sqrt{2x+3}}dx$; б) $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx$.

5.4.1.26 а) $\int \frac{2x\,dx}{2+7\sqrt[3]{x+2}}$; б) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

5.4.1.27 а) $\int \frac{4x-2}{2-\sqrt[4]{3x+4}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-81}}$.

5.4.1.28 а) $\int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{9x+1}}$; б) $\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{36+x^2}}$.

5.4.1.29 а) $\int \frac{2x-1}{3-5\sqrt{4x+1}}dx$; б) $\int \frac{14x^3}{\sqrt{49-x^2}}dx$.

5.4.1.30 а) $\int \frac{x\,dx}{4+\sqrt[3]{6x+8}}$; б) $\int x^4\sqrt{5-x^2}\,dx$.

6 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Содержание: определённый интеграл и его свойства, геометрический и физический смысл определённого интеграла, формула Ньютона – Лейбница для вычисления определённого интеграла, методы интегрирования определённого интеграла.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n элементарных частичных отрезков системой точек $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Длина частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = \overline{1, n}$, равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим длину наибольшего частичного отрезка разбиения через $\lambda_n = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ и назовём *мелкостью разбиения*. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбираем точки ξ_i и вычисляем значения функции в них, то есть $f(\xi_i)$.

Определение 6.1.1 *Интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_i, называется алгебраическая сумма произведений значения функции, вычисленной в точке ξ_i на длину частичного отрезка, которому принадлежит эта точка, то есть сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n. \tag{6.1.1}$$

Определение 6.1.2 *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм вида (6.1.1) при мелкости разбиения стремящегося к нулю, если этот предел существует и конечен.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6.1.2}$$

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или интегрируемой на отрезке $[a;b]$). При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным вы-*

ражением, x *– переменной интегрирования*, a и b *– нижним и верхним пределами интегрирования*, соответственно.

Теорема 6.1.1 Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Теорема 6.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, то есть определённый интеграл существует, в смысле существования предела интегральных сумм.

Теорема 6.1.3 Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нём всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический смысл определённого интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \ge 0$. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox (рис. 6.1.1).

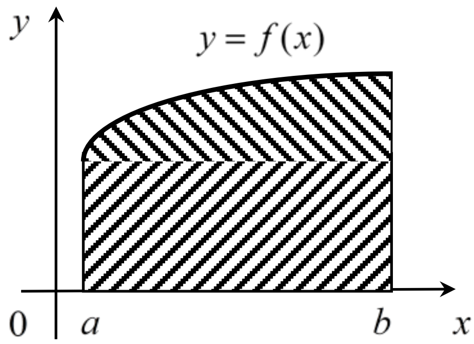


Рисунок 6.1.1 – Криволинейная трапеция

С геометрической точки зрения определённый интеграл от неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (6.1.3)$$

Физический смысл определённого интеграла.

Пусть точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v(t)$, $t_0 \le t \le \tau$. Смещение точки за малый промежуток времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ приближённо можно считать равным $v(\tau_i)\Delta t_i$, где $\tau_i \in [t_{i-1};t_i]$. Тогда интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$ представляет собой приближённое значение пути, пройденного точкой от момента времени t_0 до τ. В пределе при $\lambda_n = \max\limits_i \{\Delta t_i\} \to 0$ получаем точное значение этого пути S, то есть

$$S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = \int_{t_0}^{\tau} v(t)\,dt. \tag{6.1.4}$$

Приведём основные свойства определённого интеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$;

3) $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x) \big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

4) $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx$;

5) если на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причём для каждой точки этого отрезка выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

6) если на отрезке $[a;b]$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$;

7) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

8) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$;

9) если $M = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ и $a < b$, то справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a);$$

10) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на отрезке найдётся такая точка $c \in [a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$.

Определённый интеграл вычисляется по ***формуле Ньютона – Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{6.1.5}$$

Данная формула устанавливает связь определённого и неопределённого интегралов. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Рассмотрим основные *методы интегрирования определённого интеграла*.

Метод непосредственного интегрирования определённого интеграла

Данный метод основан на применении свойств определённого интеграла, таблицы неопределённых интегралов и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод замены (подстановки) переменной в определённом интеграле

Применение замены переменной в определённом интеграле основывается на следующей теореме.

Теорема 6.1.4 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt. \tag{6.1.6}$$

Формула (6.1.6) называется *формулой замены переменной в определённом интеграле*. Для вычисления определённого интеграла по этой формуле необходимо выполнить замену $x=\varphi(t)$, вычислить $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по переменной t, решая уравнения $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$.

Необходимо отметить, что при вычислении определённого интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения будут изменяться пределы интегрирования.

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Данный метод основан на следующей теореме.

Теорема 6.1.5 Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{6.1.7}$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 x^2 dx$ как предел интегральных сумм.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Разобьём отрезок $\left[0;1\right]$ на n равных частей точками $x_0=0$, $x_1=\Delta x_1$, $x_2=2\cdot\Delta x$, ... , $x_n=n\cdot\Delta x=1$, где $\Delta x=1/n$. В качестве точек ξ_i возьмём крайние правые точки каждого из элементарных отрезков, то есть точки ξ_i совпадают с точками x_i. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x_i=\left(\Delta x\right)^2\Delta x+\left(2\cdot\Delta x\right)^2\Delta x+\ldots+\left(n\cdot\Delta x\right)^2\Delta x=$$

$$=\left(\Delta x\right)^3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}.$$

Учитывая, что $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, получаем

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

6.2.2 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 x\,dx$.

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sin^2 x\,dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(4-4\cos 2x)\,dx=(4x-2\sin 2x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$

$$=\left(4\cdot\frac{\pi}{2}-2\sin 2\frac{\pi}{2}\right)-\left(4\cdot\frac{\pi}{4}-2\sin 2\frac{\pi}{4}\right)=2\pi-0-\pi+2=\pi+2.$$

6.2.3 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_8^{27}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. $\int\limits_8^{27}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}=\begin{bmatrix} x=t^3 & x=8\to t=2 \\ dx=3t^2dt & x=27\to t=3\end{bmatrix}=\int\limits_2^3\dfrac{3t^2dt}{t^2+t}=$

$$=3\int\limits_2^3\frac{tdt}{t+1}=3\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(3t-3\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_2^3=\left(9-3\ln 4\right)-\left(6-3\ln 3\right)=3-\ln\frac{64}{27}.$$

6.2.4 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx =$

$$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) = e - e + 1 = 1.$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Вычислить определённые интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интегрирования произвольным образом.

6.3.1.1 $\int\limits_{-1}^{2} x\,dx$. **6.3.1.2** $\int\limits_{1}^{3} x^2\,dx$. **6.3.1.3** $\int\limits_{0}^{1} e^x\,dx$. **6.3.1.4** $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x\,dx$.

6.3.2 Вычислить определённые интегралы.

6.3.2.1 $\int\limits_1^2 \left(x^2 + 5x + 3\right) dx$. **6.3.2.2** $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 3x\,dx$. **6.3.2.3** $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

6.3.3 Вычислить определённые интегралы.

6.3.3.1 $\int\limits_4^5 \dfrac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$. **6.3.3.2** $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{(4x+3)dx}{x^2 - 9x + 8}$. **6.3.3.3** $\int\limits_1^2 \dfrac{(6x+7)dx}{x^2 + 3x + 2}$.

6.3.4 Вычислить определённые интегралы.

6.3.4.1 $\int\limits_1^6 \dfrac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}}$. **6.3.4.2** $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{3 + 2\cos x}$. **6.3.4.3** $\int\limits_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

6.3.5 Вычислить определённые интегралы.

6.3.5.1 $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$. **6.3.5.2** $\int\limits_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x\,dx$. **6.3.5.3** $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

6.3.5.4 $\int\limits_0^1 x^2 e^{3x}\,dx$. **6.3.5.5** $\int\limits_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x\,dx$. **6.3.5.6** $\int\limits_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Вычислить определённые интегралы.

6.4.1.1 а) $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 \dfrac{x}{2} \cos^4 \dfrac{x}{2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} x \sin 4x\,dx$.

6.4.1.2 а) $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin^6 x \cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \dfrac{dx}{16 + 9\cos^2 x}$.

6.4.1.3 а) $\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}dx$; б) $\int_\pi^{2\pi} x\cos 3x\,dx$.

6.4.1.4 а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^8 x dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\sin^2 x}$.

6.4.1.5 а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^8 x\,dx$; б) $\int_1^{e} x^2\ln x\,dx$.

6.4.1.6 а) $\int_0^{2\pi} \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\cos^2 x}$.

6.4.1.7 а) $\int_0^{9\pi} \sin^2\frac{x}{3}\cos^6\frac{x}{3}dx$; б) $\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$.

6.4.1.8 а) $\int_0^{6\pi} \sin^6\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

6.4.1.9 а) $\int_0^{2\pi} \sin^8 2x\,dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x\,dx$.

6.4.1.10 а) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$; б) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

6.4.1.11 а) $\int_0^{3\pi} \sin^6\frac{x}{6}dx$; б) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$.

6.4.1.12 а) $\int_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}dx$; б) $\int_1^{2} \frac{dx}{x^3+8}$.

6.4.1.13 а) $\int_0^{5\pi} \sin^2\frac{x}{5}\cos^2\frac{x}{5}dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x\,dx$.

6.4.1.14 а) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 3x\cos^4 3x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-4\sin^2 x}$.

6.4.1.15 а) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 x\,dx$; б) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x\,dx$.

6.4.1.16 а) $\int_0^{14\pi} \sin^2\frac{x}{7}\cos^4\frac{x}{7}dx$; б) $\int_0^{3} x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

6.4.1.17 а) $\int_0^{10\pi} \sin^4\frac{x}{5}\cos^4\frac{x}{5}dx$; б) $\int_0^{\pi/5} x\sin 5x\,dx$.

6.4.1.18 а) $\int_0^{4\pi} \sin^6\frac{x}{4}dx$; б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{49+x^2}}$.

6.4.1.19 а) $\int\limits_{0}^{8\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx$; б) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} x\cos 4x\, dx$.

6.4.1.20 а) $\int\limits_{0}^{10\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx$; б) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\, dx$.

6.4.1.21 а) $\int\limits_{-14\pi}^{-12\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} x^3 \ln x\, dx$.

6.4.1.22 а) $\int\limits_{\pi}^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{8} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

6.4.1.23 а) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{8} dx$; б) $\int\limits_{0}^{1/4} \arcsin 2x\, dx$.

6.4.1.24 а) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi} \sin \frac{x}{2} \cos^{15} \frac{x}{2} dx$; б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

6.4.1.25 а) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \arccos 2x\, dx$.

6.4.1.26 а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^6 2x \cos^2 2x dx$; б) $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$.

6.4.1.27 а) $\int\limits_{0}^{\pi/12} \cos^8 3x\, dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \operatorname{arctg} 4x\, dx$.

6.4.1.28 а) $\int\limits_{0}^{\pi/16} \sin^8 4x dx$; б) $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

6.4.1.29 а) $\int\limits_{9\pi}^{18\pi} \sin^2 \frac{x}{9} \cos^2 \frac{x}{9} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 3} x^4 e^{2x}\, dx$.

6.4.1.30 а) $\int\limits_{-36\pi}^{36\pi} \sin^4 \frac{x}{6} \cos^6 \frac{x}{6} dx$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^3-27}$.

7 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: несобственные интегралы первого и второго рода, сходимость и расходимость несобственных интегралов.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

При введении понятия определённого интеграла как предела интегральных сумм предполагалось, что пределы интегрирования являются конечными, а подынтегральная функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. При выполнении этих условий интегралы называются *собственными*. Если хотя бы одно из указанных условий нарушается, то интегралы называются *несобственными интегралами*.

Определим несобственные интегралы первого рода или интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Определение 7.1.1 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным верхним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ называется предел $f(b)$ при значении $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7.1.1)$$

Определение 7.1.2 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным нижним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $f(a)$ при значении $a \to -\infty$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7.1.2)$$

Если пределы в правых частях формул (7.1.1) и (7.1.2) существуют и конечны, то несобственные интегралы первого рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Несобственный интеграл первого рода с двумя бесконечными пределами интегрирования вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx, \qquad (7.1.3)$$

где $-\infty < c < +\infty$.

Определим несобственные интегралы второго рода или интегралы от неограниченных подынтегральных функций.

Определение 7.1.3 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при значении $\varepsilon \to +0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (7.1.4)$$

Определение 7.1.4 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a;b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=a$ называется предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ при значении $\varepsilon \to +0$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \qquad (7.1.5)$$

Если пределы в правых частях формул (7.1.4) и (7.1.5) существуют и конечны, то несобственные интегралы второго рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой точке $c\in[a;b]$, то данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \quad (7.1.6)$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x\,dx$.

Решение. $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin x\Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b - 0)$. Данный предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

7.2.2 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{x}\Big|_{a}^{1} = -\lim\limits_{a\to-\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right) = -1$. Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.2.3 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=2\lim\limits_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$ $=2\lim\limits_{b\to\infty}\left(arctgb-0\right)=\pi$. Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.2.4 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|x|\Big\|_{\varepsilon}^1=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln1-\ln|\varepsilon|\right)=+\infty$. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

7.2.5 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.3.1.1 $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

7.3.1.2 $\int\limits_{-\infty}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$.

7.3.1.3 $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2x\,dx}{x}$.

7.3.1.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2}$.

7.3.1.5 $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

7.3.1.6 $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

7.3.2 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.3.2.1 $\int\limits_0^2\frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

7.3.2.2 $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

7.3.2.3 $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$.

7.3.2.4 $\int\limits_0^1\ln x\,dx$

7.3.2.5 $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.3.2.6 $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x\cos x}$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.4.1.1 а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2-1}$.

7.4.1.2 а) $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{2+x^2}$; б) $\int\limits_5^6\frac{dx}{\sqrt{x-5}}$.

7.4.1.3 а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{2x-1}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$. **7.4.1.4** а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

7.4.1.5 а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{4+64x^2}$; б) $\int\limits_{\sqrt{8}}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$. **7.4.1.6** а) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int\limits_6^{7}\frac{dx}{\sqrt{x-6}}$.

7.4.1.7 а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{xdx}{x-1}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ctg}dx$. **7.4.1.8** а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_1^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

7.4.1.9 а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int\limits_2^{4}\frac{dx}{x^2-16}$. **7.4.1.10** а) $\int\limits_{-\infty}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int\limits_6^{7}\frac{dx}{\sqrt[4]{x-6}}$.

7.4.1.11 а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{3x-1}$; б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$. **7.4.1.12** а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_1^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

7.4.1.13 а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{9+25x^2}$; б) $\int\limits_1^{4}\frac{dx}{x^2-1}$. **7.4.1.14** а) $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{3+x^2}$; б) $\int\limits_7^{8}\frac{dx}{\sqrt{x-7}}$.

7.4.1.15 а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi}\operatorname{ctg}dx$. **7.4.1.16** а) $\int\limits_5^{\infty}\frac{dx}{x^5}$; б) $\int\limits_2^{6}\frac{dx}{\sqrt{6-x}}$.

7.4.1.17 а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{16+x^2}$; б) $\int\limits_2^{3}\frac{dx}{x^2-9}$. **7.4.1.18** а) $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{5}}\frac{dx}{5+x^2}$; б) $\int\limits_9^{10}\frac{dx}{\sqrt{x-9}}$.

7.4.1.19 а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{3x-1}$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3}\operatorname{tg}x\,dx$. **7.4.1.20** а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x^6}$; б) $\int\limits_5^{9}\frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.

7.4.1.21 а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{9+64x^2}$; б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{x^2-4}$. **7.4.1.22** а) $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}dx}{7+x^2}$; б) $\int\limits_8^{9}\frac{dx}{\sqrt{x-8}}$.

7.4.1.23 а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{5x+2}$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{ctg}dx$. **7.4.1.24** а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x^7}$; б) $\int\limits_4^{8}\frac{dx}{\sqrt{8-x}}$.

7.4.1.25 а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{1+9x^2}$; б) $\int\limits_3^{6}\frac{dx}{x^2-36}$. **7.4.1.26** а) $\int\limits_{-\infty}^{4}\frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

7.4.1.27 а) $\int\limits_6^{\infty}\frac{dx}{5x-1}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$. **7.4.1.28** а) $\int\limits_7^{\infty}\frac{dx}{x^7}$; б) $\int\limits_0^{9}\frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.

7.4.1.29 а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{64+x^2}$; б) $\int\limits_1^{7}\frac{dx}{x^2-49}$. **7.4.1.30** а) $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{5}}\frac{dx}{5+x^2}$; б) $\int\limits_6^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-6}}$.

8 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Содержание: вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат, вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

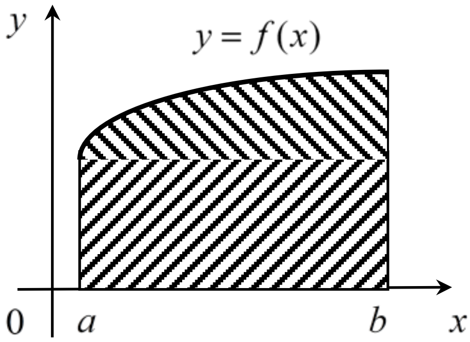


Рисунок 8.1.1 – Криволинейная трапеция

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке_$[a;b]$ и $f(x) \geq 0$. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox (рис. 8.1.1).

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{8.1.1}$$

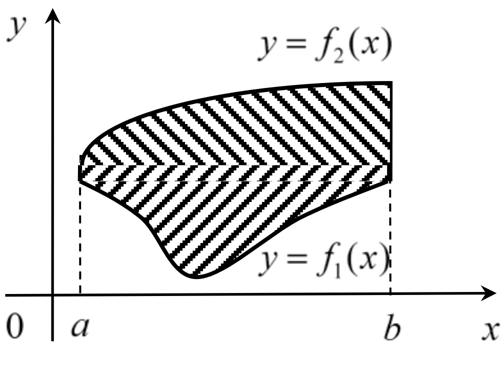


Рисунок 8.1.2 – Плоская фигура Φ

Рассмотрим плоскую фигуру Φ, которая ограничена графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, а также двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Пусть для каждой точки x из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис. 8.1.2).

Площадь этой плоской фигуры находится по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \tag{8.1.2}$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt\,, \qquad (8.1.3)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $x(t_1) = a$, $y(t_2) = b$ ($y(t) \ge 0$ на отрезке $[t_1; t_2]$).

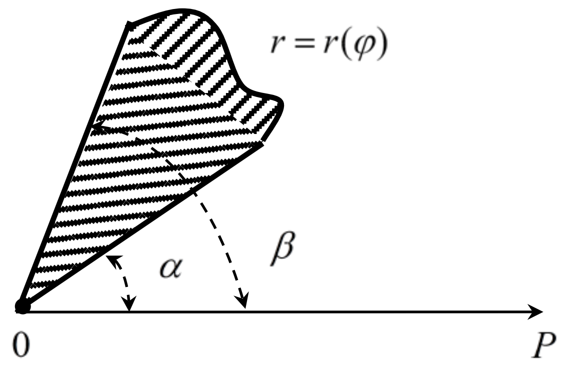


Рисунок 8.1.3 – Криволинейный сектор

Пусть фигура ограничена непрерывной функцией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где φ и r – полярные координаты. Полученная фигура называется *криволинейным сектором*, ограниченным дугой графика функции $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис. 8.1.3).

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi\,. \qquad (8.1.4)$$

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Вычислить площадь фигуры $\Phi 1$, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

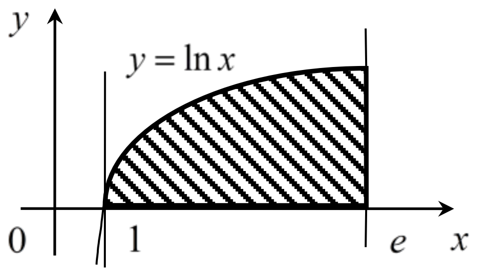


Рисунок 8.2.1.1 – Фигура $\Phi 1$

Решение. Находим площадь фигуры $\Phi 1$, которая является криволинейной трапецией (рис. 8.2.1.1) по формуле (8.1.1).

$$S = \int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - 0 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1\,(кв.\,ед).$$

8.2.2 Вычислить площадь фигуры $Ф\,2$, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

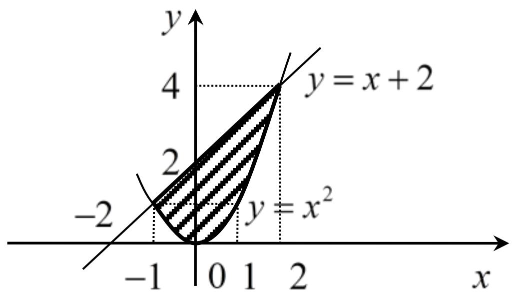


Рисунок 8.2.2.1 – Фигура Ф 2

Решение. Находим точки пересечения данных линий и строим искомую фигуру Ф 2 (рис. 8.2.2.1):

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \to \begin{cases} y = x + 2, \\ x^2 = x + 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Следовательно, согласно формуле (8.1.2), имеем

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2 \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} = 4{,}5\ (кв.\,ед).$$

8.2.3 Вычислить площадь фигуры $Ф\,3$, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox, где $a > 0$.

Решение. Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую её арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π (рис. 8.2.3.1).

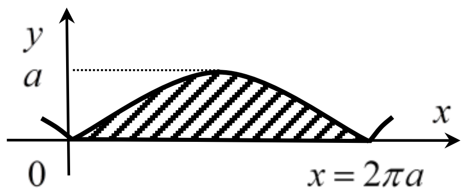


Рисунок 8.2.3.1 – Фигура Ф 3

Для определения площади фигуры $Ф\,3$, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox, воспользуемся формулой (8.1.3). Следовательно,

$$S = \int_{0}^{2\pi} a\left(1 - \cos t\right)\left(a\left(t - \cos t\right)\right)' dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} a\left(1 - \cos t\right) a\left(1 - \cos t\right) dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - \cos t\right)^2 dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt =$$

$$= a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2\ (кв.\,ед).$$

8.2.4 Вычислить площадь фигуры $Ф\,4$, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, где $a > 0$.

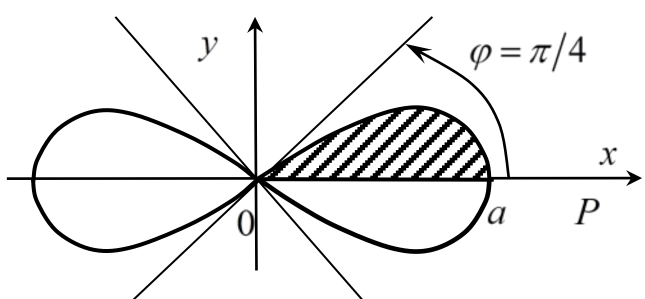


Рисунок 8.2.4.1 – Фигура Ф 4

Решение. Так как в уравнении лемнискаты Бернулли переменные x и y имеют чётную степень, то кривая, ограничивающая заданную фигуру $Ф\,4$, симметрична относительно осей координат. Следовательно, для нахождения площади всей фигуры

Ф 4 достаточно вычислить площадь четвёртой части этой фигуры, расположенной, например, в первой четверти, и полученный результат увеличить в четыре раза.

Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат, используя формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение данной кривой примет вид: $\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 = a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right) \to r^2 = a^2\cos 2\varphi$ или $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Первой четверти декартовой системы координат соответствует изменение полярного угла φ от 0 до $\pi/4$ (рис. 8.2.4.1). Используя формулу (8.1.4), находим площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли.

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = a^2\ (\textit{кв. ед}).$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Вычислить площади фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 8.3.1.1–8.3.1.10.

8.3.1.1 $y = e^{2x}, y = 0, x = 0, x = \ln 2$.

8.3.1.2 $y = x^2 - 6x + 8, y = 0$.

8.3.1.3 $y = x^2 + 2x,\ y = x + 2$

8.3.1.4 $y = \dfrac{27}{x^2 + 9}, y = \dfrac{x^2}{6}$

8.3.1.5 $y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3,\ x = 0$.

8.3.1.6 $y = \ln(x + 2),\ y = 2\ln x,\ y = 0$.

8.3.1.7 $y = 1 - \cos t,\ x = t - \sin t,\ y = 0$.

8.3.1.8 $y = 2t^2 - t^3,\ x = 2t - t^3$.

8.3.1.9 $r = a(1 + \sin\varphi),\ a > 0$.

8.3.1.10 $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}, \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах.

8.4.1.1 $y = x^2 + x,\ y = 3 - x$.

8.4.1.2 $y = x^2 + 4x,\ y = x$.

8.4.1.3 $y = x^2, y = 2 - x$.

8.4.1.4 $y = \dfrac{2}{x},\ y = 3 - x$.

8.4.1.5 $y = \dfrac{6}{x},\ y + x = -5$.

8.4.1.6 $y = -\dfrac{2}{x},\ y = 3 + x$.

8.4.1.7 $y = \sqrt{x}, y = x$.

8.4.1.8 $y = -\sqrt{x}, y = -x^2$.

8.4.1.9 $y=\sqrt{x}, y=x-2$.

8.4.1.10 $y=\dfrac{2}{x^2+1}, y=x^2$.

8.4.1.11 $y=\dfrac{32}{x^2+4}, y=x^2$.

8.4.1.12 $y=\dfrac{90}{x^2+1}, y=x^2$.

8.4.1.13 $y=x^2-4x, y=-x^2$.

8.4.1.14 $y=x^2-1, y=x-x^2$.

8.4.1.15 $y=x^2, y=8-x^2$.

8.4.1.16 $y=x^2-x, y=2x+2$.

8.4.1.17 $y=x^2-x, y=4x$.

8.4.1.18 $y=x^2-6, y=-x$.

8.4.1.19 $y=\dfrac{4}{x^2}, y=5-x^2$.

8.4.1.20 $y=\dfrac{8}{x^3}, y=9-x^3$.

8.4.1.21 $y=\dfrac{10}{x^2}, y=8-x^2$.

8.4.1.22 $y=\sqrt{x^3}, y=x^3$.

8.4.1.23 $y=-\sqrt{x^3}, y=-x^3$.

8.4.1.24 $y=\sqrt{x^3}, y=3x$.

8.4.1.25 $y=\dfrac{3}{x^2-4}, y=x^2-2$.

8.4.1.26 $y=\dfrac{5}{x^2-9}, y=x^2-5$.

8.4.1.27 $y=\dfrac{3}{4-x^2}, y=x^2$.

8.4.1.28 $y=x^2+8x, y=-x^2$.

8.4.1.29 $y=x^2-1, y=1-x^2$.

8.4.1.30 $y=x^2, y=2-x^2$.

8.4.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, которые заданы параметрическим образом.

8.4.2.1 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=4\ (y\geq 4)$.

8.4.2.2 $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2\ (x\geq 2)$.

8.4.2.3 $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y=6\ (0<x<8\pi, y\geq 6)$.

8.4.2.4 $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1\ (x\geq 1)$.

8.4.2.5 $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3}\ (x\geq 6\sqrt{3})$.

8.4.2.6 $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3\ (0<x<4\pi, y\geq 3)$.

8.4.2.7 $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$ $y=4\ (y\geq 4)$.

8.4.2.8 $\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $x=12\sqrt{3}\ (x\geq 12\sqrt{3})$.

8.4.2.9 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6\ (0 < x < 12\pi, y \geq 6).$

8.4.2.10 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \geq 2).$

8.4.2.11 $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}\ (y \geq 2\sqrt{3}).$

8.4.2.12 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ (0 < x < 6\pi, y \geq 3).$

8.4.2.13 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ (x \geq 1).$

8.4.2.14 $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}\ (y \geq 4\sqrt{3}).$

8.4.2.15 $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 5\ (0 < x < 20\pi, y \geq 5).$

8.4.2.16 $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \geq 2).$

8.4.2.17 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5\ (y \geq 5).$

8.4.2.18 $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2\ (0 < x < 16\pi, y \geq 2).$

8.4.2.19 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ (y \geq 3).$

8.4.2.20 $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}\ (y \geq \sqrt{3}).$

8.4.2.21 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9\ (0 < x < 12\pi, y \geq 9).$

8.4.2.22 $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ (y \geq 3).$

8.4.2.23 $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}\ (x \geq 9\sqrt{3}).$

8.4.2.24 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2\ (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$

8.4.2.25 $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2).$

8.4.2.26 $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2).$

8.4.2.27 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1\ (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$

8.4.2.28 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}\ (x \geq 3\sqrt{3}).$

8.4.2.29 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}\ (x \geq 3\sqrt{3})$.

8.4.2.30 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4\ (0 < x < 8\pi, y \geq 4)$.

8.4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

8.4.3.1	$r = 2\sin\varphi, r = 4\sin\varphi.$	**8.4.3.2**	$r = \cos 3\varphi.$
8.4.3.3	$r = \sin\varphi.$	**8.4.3.4**	$r = \sin 3\varphi.$
8.4.3.5	$r = \cos 2\varphi.$	**8.4.3.6**	$r = 1/2 + \sin\varphi.$
8.4.3.7	$r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi.$	**8.4.3.8**	$r = 1/2 + \cos\varphi.$
8.4.3.9	$r = 4\cos 4\varphi.$	**8.4.3.10**	$r = 2 + \cos\varphi.$
8.4.3.11	$r = 2\sin 4\varphi.$	**8.4.3.12**	$r = \cos\varphi - \sin\varphi.$
8.4.3.13	$r = \sin 6\varphi.$	**8.4.3.14**	$r = \cos\varphi + \sin\varphi.$
8.4.3.15	$r = 2\cos 6\varphi.$	**8.4.3.16**	$r = 6\sin\varphi, r = 4\sin\varphi.$
8.4.3.17	$r = 4\sin^2\varphi.$	**8.4.3.18**	$r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}.$
8.4.3.19	$r = 3\sin\varphi, r = 5\sin\varphi.$	**8.4.3.20**	$r = 3\cos 5\varphi.$
8.4.3.21	$r = \sin 4\varphi.$	**8.4.3.22**	$r = \sqrt{\sin 2\varphi}.$
8.4.3.23	$r = \sin 5\varphi.$	**8.4.3.24**	$r = 8\cos 8\varphi.$
8.4.3.25	$r = 6\cos 6\varphi.$	**8.4.3.26**	$r = 8\sin 8\varphi.$
8.4.3.27	$r = 2 + 2\cos\varphi.$	**8.4.3.28**	$r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$
8.4.3.29	$r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$	**8.4.3.30**	$r = 4\sin 3\varphi.$

9 ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ

Содержание: вычисление длин дуг кривых заданных в декартовой и полярной системах координат.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

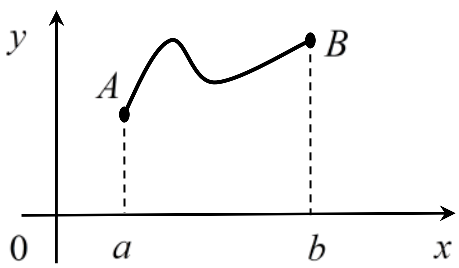


Рисунок 9.1.1 – Плоская дуга

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$, дуга AB – график этой функции (рис. 9.1.1).

Длина l плоской гладкой дуги AB, уравнение которой задано в аналитическом виде, вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \quad (9.1.1)$$

Предположим, что плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $t\in[t_1;t_2]$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t)\neq 0$ для любого значения $t\in[t_1;t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t, которые соответствуют концам дуги, то есть точкам A и B соответственно (рис. 9.1.1).

Длина l плоской гладкой дуги AB, уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt. \quad (9.1.2)$$

Рассмотрим пространственную кривую L, заданную параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ и $t\in[t_1;t_2]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t)\neq 0$ для любого значения $t\in[t_1;t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t, которые соответствуют концам кривой L.

Длина l пространственной гладкой дуги L, уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\,dt. \quad (9.1.3)$$

Пусть плоская гладкая кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, а α и β – значения полярного угла φ, которые соответствуют концам кривой L. Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \quad (9.1.4)$$

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, отсечённой прямой $x=1$.

Решение. Линия $L1$, длину которой необходимо найти, изображена на рисунке 9.2.1.1. Найдём производную функции $y=f(x)$, заданной неявно соотношением $y^2=x^3$, имеем $2yy'=3x^2$, откуда $(y')^2=\frac{9}{4}x$. В силу симметрии кривой относительно оси абсцисс достаточно вычислить длину дуги расположенной в первой четверти, и удвоить полученный результат. По формуле (9.1.1) получаем длину дуги заданной кривой

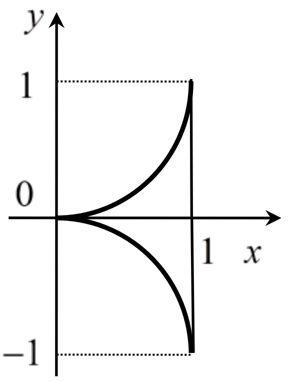


Рисунок 9.2.1.1 – Линия $L1$

$$l=2\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\int_0^1\sqrt{4+9x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{4+9x}\,d(4+9x)=\frac{2}{27}\sqrt{(4+9x)^3}\Big|_0^1=\frac{26}{27}\sqrt{13}-\frac{16}{27}=\frac{26\sqrt{13}-16}{27}\approx 2{,}9\ (\text{лин. ед}).$$

9.2.2 Вычислить длину астроиды $y=a\sin^3 t$, $x=a\cos^3 t$, где $a>0$.

Решение. Ввиду симметрии астроиды (рис. 9.2.2.1) относительно осей координат достаточно вычислить длину её части, расположенной в первой четверти плоскости, а затем полученный результат умножить на четыре. Имеем $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t=3a\sin^2 t\cos t$. Тогда, согласно формуле (9.1.2), имеем

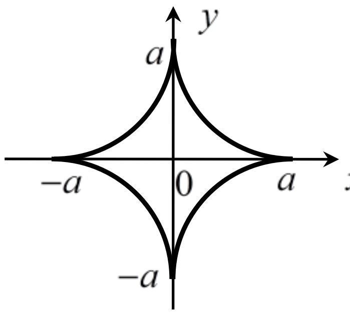


Рисунок 9.2.2.1 – Астроида

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=6a\ (\text{лин. ед}).$$

9.2.3 Вычислить длину кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$, где $a>0$.

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рис. 9.2.3.1) относительно полярной оси *OP* достаточно вычислить длину дуги, расположенной выше оси, а затем полученный результат увеличить в два раза. Имеем $r'_\varphi=a\sin\varphi$. Используя формулу (9.1.4), находим длину дуги кардиоиды.

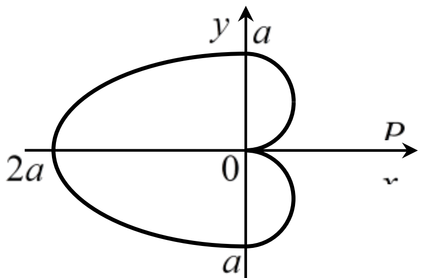


Рисунок 9.2.3.1 – Кардиоида

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(1-\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=2a^2\int_0^{\pi}2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=0+8a=8a\ (\text{лин. ед}).$$

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ от $x=\pi/3$ до $x=\pi/2$.

9.3.2 Найти длину дуги кривой $y=\operatorname{ch}x$ от $x=0$ до $x=1$.

9.3.3 Найти длину дуги кривой $y=(1-x/3)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox.

9.3.4 Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=\frac{5}{p}(x-p)^3$, отсекаемой прямой $x=2p$.

9.3.5 Найти длину дуги кривой $y=e^t\sin t,\ x=e^t\cos t$ от $t=0$ до $t=1$.

9.3.6 Найти длину дуги кривой $y=3\sin t-\sin 3t,\ x=3\cos t-\cos 3t$ от $t=0$ до $t=\pi/2$.

9.3.7 Найти длину дуги петли кривой $y=\frac{1}{3}t-t^3,\ x=t^2$.

9.3.8 Найти длину дуги петли кривой $y=2-\frac{t^4}{4},\ x=\frac{t^6}{6}$ между точками её пересечения с осями координат.

9.3.9 Найти длину дуги кривой $r=\varphi^2$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$.

9.3.10 Найти длину кардиоиды $r=1-\cos\varphi$.

9.3.11 Найти длину пространственной кривой $x=t^2,\ y=t+\frac{1}{3}t^3, z=t-\frac{1}{3}t^3$ от $t=0$ до $t=\sqrt{3}$.

9.3.12 Найти длину пространственной кривой $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t, z=e^t$ между плоскостями $z=e$ и $z=e^2$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовых координатах.

9.4.1.1 $y = e^x + e,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

9.4.1.2 $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},$ $1/4 \le x \le 1.$

9.4.1.3 $y = e^x + 25,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

9.4.1.4 $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1,$ $0 \le x \le 9/16.$

9.4.1.5 $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

9.4.1.6 $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,$ $0 \le x \le 1/2.$

9.4.1.7 $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2.$

9.4.1.8 $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5,$ $1/9 \le x \le 1.$

9.4.1.9 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,\ 0 \le x \le 2.$

9.4.1.10 $y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

9.4.1.11 $y = \ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

9.4.1.12 $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},$ $0 \le x \le 3/4.$

9.4.1.13 $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6.$

9.4.1.14 $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,$ $0 \le x \le 8/9.$

9.4.1.15 $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3.$

9.4.1.16 $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},$ $0 \le x \le 15/16.$

9.4.1.17 $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le 1/4.$

9.4.1.18 $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},$ $0 \le x \le 1/4.$

9.4.1.19 $y = 2 + ch\,x,\ 0 \le x \le 1.$

9.4.1.20 $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6.$

9.4.1.21 $y = 2 - e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

9.4.1.22 $y = 1 - \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2.$

9.4.1.23 $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4.$

9.4.1.24 $y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2.$

9.4.1.25 $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

9.4.1.26 $y = ch\,x + 3,\ 0 \le x \le 1.$

9.4.1.27 $y = \ln\cos x + 2,\ 0 \le x \le \pi/6.$

9.4.1.28 $y = e^x + 13,\ \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

9.4.1.29 $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4},\ 0 \le x \le 2.$

9.4.1.30 $y = \dfrac{1 - e^x - e^{-x}}{2},\ 0 \le x \le 3.$

9.4.2 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями с параметром.

9.4.2.1 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$

9.4.2.2 $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

9.4.2.3 $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

9.4.2.4 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ 0 \le t \le \pi / 4. \end{cases}$

9.4.2.5 $\begin{cases} x = (1{,}5 \cdot t^2 - 3)\sin t + 3t\cos t, \\ y = (3 - 1{,}5 \cdot t^2)\cos t + 3t\sin t, \\ 0 \le t \le \pi/2. \end{cases}$

9.4.2.6 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$

9.4.2.7 $\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$

9.4.2.8 $\begin{cases} x = 0{,}5\cos t - 0{,}25\cos 2t, \\ y = 0{,}5\sin t - 0{,}25\sin 2t, \\ \pi / 2 \le t \le 2\pi / 3. \end{cases}$

9.4.2.9 $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t), \\ 0 \le t \le \pi / 3. \end{cases}$

9.4.2.10 $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \\ 0 \le t \le \pi/3. \end{cases}$

9.4.2.11 $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t), \\ y = e^t(\cos t + \sin t), \\ \pi/2 \le t \le \pi. \end{cases}$

9.4.2.12 $\begin{cases} x = e^{2t}(\cos 2t + \sin 2t), \\ y = e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t), \\ \pi/6 \le t \le \pi/4. \end{cases}$

9.4.2.13 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \\ 0 \le t \le \pi/3. \end{cases}$

9.4.2.14 $\begin{cases} x = 10\cos^3 2t, \\ y = 10\sin^3 2t, \\ 0 \le t \le \pi/4. \end{cases}$

9.4.2.15 $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t, \\ 0 \le t \le \pi/4. \end{cases}$

9.4.2.16 $\begin{cases} x = 8\cos^3 3t, \\ y = 8\sin^3 3t, \\ 0 \le t \le \pi/18. \end{cases}$

9.4.2.17 $\begin{cases} x = \cos 2t + 2t\sin 2t, \\ y = \sin 2t - 2t\cos 2t, \\ 0 \le t \le \pi / 4. \end{cases}$

9.4.2.18 $\begin{cases} x = 3{,}5 \cdot (2\cos t + \cos 2t), \\ y = 3{,}5 \cdot (2\sin t + \sin 2t), \\ 0 \le t \le \pi / 2. \end{cases}$

9.4.2.19 $\begin{cases} x = e^t(\cos 3t - \sin 3t), \\ y = e^t(\cos 3t + \sin 3t), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

9.4.2.20 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 + \cos t), \\ \pi / 2 \le t \le 2\pi / 3. \end{cases}$

9.4.2.21 $\begin{cases} x = 2 \cdot (2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2 \cdot (2\sin t + \sin 2t), \\ 0 \le t \le \pi / 3. \end{cases}$

9.4.2.22 $\begin{cases} x = \left(0{,}5t^2 - 1\right)\sin t + t\cos t, \\ y = \left(1 - 0{,}5t^2\right)\cos t + t\sin t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

9.4.2.23 $\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 + \cos t), \\ \pi / 2 \le t \le 3\pi / 4. \end{cases}$

9.4.2.24 $\begin{cases} x = 2{,}5 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 2{,}5 \cdot (t - \sin t), \\ \pi / 4 \le t \le 5\pi / 6. \end{cases}$

9.4.2.25 $\begin{cases} x=\cos 0,5t+0,5t\sin 0,5t, \\ y=\sin 0,5t-0,5t\cos 0,5t, \\ 0\le t\le \pi/4. \end{cases}$ **9.4.2.26** $\begin{cases} x=5\cos^2 4t, \\ y=5\sin^2 4t, \\ \pi/24\le t\le \pi/12. \end{cases}$

9.4.2.27 $\begin{cases} x=e^{0,5t}\left(\cos 0,5t-\sin 0,5t\right), \\ y=e^{0,5t}\left(\cos 0,5t+\sin 0,5t\right), \\ 0\le t\le 3\pi. \end{cases}$ **9.4.2.28** $\begin{cases} x=7(1+\cos t), \\ y=7(t+\sin t), \\ \pi/2\le t\le 3\pi/2. \end{cases}$

9.4.2.29 $\begin{cases} x=4\cdot(2\cos t+\cos 2t), \\ y=4\cdot(2\sin t-\sin 2t), \\ 0\le t\le \pi. \end{cases}$ **9.4.2.30** $\begin{cases} x=\cos 5t+5t\sin 5t, \\ y=5\sin t-5t\cos 5t, \\ 0\le t\le \pi/4. \end{cases}$

9.4.3 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

9.4.3.1 $r=3e^{3\varphi/4}, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$ **9.4.3.2** $r=2e^{4\varphi/3}, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

9.4.3.3 $r=\sqrt{2}e^{\varphi}, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$ **9.4.3.4** $r=5e^{5\varphi/12}, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

9.4.3.5 $r=6e^{12\varphi/5}, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$ **9.4.3.6** $r=3e^{3\varphi/12}, 0\le\varphi\le\pi/3.$

9.4.3.7 $r=4e^{4\varphi/3}, 0\le\varphi\le\pi/3.$ **9.4.3.8** $r=\sqrt{2}e^{\varphi}, 0\le\varphi\le\pi/3.$

9.4.3.9 $r=5e^{5\varphi/12}, 0\le\varphi\le\pi/3.$ **9.4.3.10** $r=12e^{12\varphi/5}, 0\le\varphi\le\pi/3.$

9.4.3.11 $r=2\varphi, 0\le\varphi\le 4/3.$ **9.4.3.12** $r=2(1-\cos\varphi), -\pi\le\varphi\le-\dfrac{\pi}{2}.$

9.4.3.13 $r=2\varphi, 0\le\varphi\le 12/5.$ **9.4.3.14** $r=4(1-\sin\varphi), 0\le\varphi\le\pi/6.$

9.4.3.15 $r=3\varphi, 0\le\varphi\le 4/3.$ **9.4.3.16** $r=6(1+\sin\varphi), -\pi/2\le\varphi\le 0.$

9.4.3.17 $r=2\cos\varphi, 0\le\varphi\le\pi/6.$ **9.4.3.18** $r=8(1-\cos\varphi), -2\pi/3\le\varphi\le 0.$

9.4.3.19 $r=2\varphi, 0\le\varphi\le 3/4.$ **9.4.3.20** $r=1-\sin\varphi, -\pi/2\le\varphi\le-\pi/6.$

9.4.3.21 $r=2\varphi, 0\le\varphi\le 5/12.$ **9.4.3.22** $r=3(1+\sin\varphi), -\pi/6\le\varphi\le 0.$

9.4.3.23 $r=4\varphi, 0\le\varphi\le 3/4.$ **9.4.3.24** $r=5(1-\cos\varphi), -\pi/3\le\varphi\le 0.$

9.4.3.25 $r=5\varphi, 0\le\varphi\le 12/5.$ **9.4.3.26** $r=7(1-\sin\varphi), -\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}.$

9.4.3.27 $r=8\cos\varphi, 0\le\varphi\le\pi/4.$ **9.4.3.28** $r=6\cos\varphi, 0\le\varphi\le\pi/3.$

9.4.3.29 $r=2\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi/6.$ **9.4.3.30** $r=8\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi/4.$

10 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ ТЕЛ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Содержание: вычисление объёмов тел, вычисление объёмов тел вращения, вычисление площадей поверхностей.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия
10.1.1 Вычисление объёмов пространственных тел

Пусть задано некоторое пространственное тело, ограниченное поверхностью, и известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной некоторой прямой, например, к оси абсцисс. Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox. Если площадь $S(x)$ поперечного сечения является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$, то объём тела вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (10.1.1.1)$$

Предположим, что пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Ox, заданной на отрезке $[a;b]$ функцией $y=f(x)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(x)=\pi f^2(x)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (10.1.1.2)$$

Если же эта дуга будет вращаться вокруг оси Oy, то объём полученного тела можно вычислить по формуле

$$V_y=2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx. \qquad (10.1.1.3)$$

Пусть пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Oy, заданной на отрезке $[c;d]$ функцией $x=f(y)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(y)=\pi\varphi^2(y)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (10.1.1.4)$$

Если дуга L, заданная параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$ и $t\in[t_1;t_2]$, вращается вокруг оси Ox или Oy, то объёмы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t) dt, \qquad (10.1.1.5)$$

$$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, |y(t)|\, x'(t)\, dt. \qquad (10.1.1.6)$$

Предположим, что криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси. Тогда объём тела вращения находится по формуле

$$V_{OP} = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi. \qquad (10.1.1.7)$$

10.1.2 Вычисление площадей поверхности тел вращения

Рассмотрим дугу L, которая вращается вокруг произвольной оси l. Предположим, что известны расстояние ρ от произвольной точки дуги до оси вращения l и дифференциал дуги dl, которые выражаются через переменную интегрирования, а также пределы интегрирования A и B соответствующих концов дуги L. Тогда площадь поверхности вращения будет выражаться следующим интегралом

$$Q_l = 2\pi \int_{A}^{B} \rho dl. \qquad (10.1.2.1)$$

На основании интеграла (10.1.2.1) приведём формулы площадей Q_x поверхностей вращения вокруг оси Ox, в зависимости от формулы задания дуги.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx. \qquad (10.1.2.2)$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_{a}^{b} y(t) \sqrt{\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2}\, dt. \qquad (10.1.2.3)$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_a^b r(\varphi)\sin\varphi \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi. \qquad (10.1.2.4)$$

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Плоскость равнобедренного треугольника движется перпендикулярно к неподвижному диаметру круга радиуса R. Основание треугольника есть хорда круга, а вершина лежит на прямой, параллельной неподвижному диаметру, на расстоянии H от плоскости круга. Найти объём тела, образованного движением плоскости треугольника от одного конца диаметра до другого.

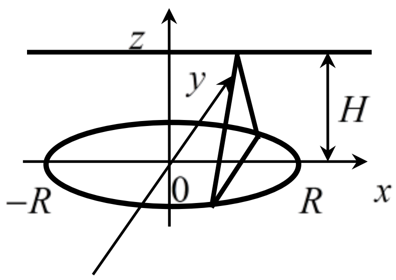


Рисунок 10.2.1.1 – Движение треугольника

Решение. Выберем систему координат так, чтобы центр круга был в начале координат, а неподвижный диаметр расположен на оси Ox (рис. 10.2.1.1). Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть равнобедренный треугольник с основанием $2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ и высотой H. Тогда площадь ортогонального сечения оси Ox равна $S(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\cdot H = H\cdot\sqrt{R^2 - x^2}$.

Найдём объём полученного тела, используя формулу (10.1.1.1).

$$V = H\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2H\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left(Hx\sqrt{R^2 - x^2} + HR^2 \arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

10.2.2 Вычислить объём тела T1, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

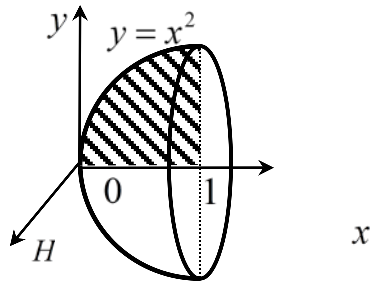


Рисунок 10.2.2.1 – Тело T1

Решение. Находим точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x = 1$: $M(1;0)$ (рис. 10.2.2.1).

Воспользуемся формулой (7.1.3.2).

$$V = \pi\int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}628\,(куб.\,ед).$$

10.2.3 Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямыми $y = 1$, $y = 0$.

Решение. По формуле (10.1.1.4), учитывая, что

$$c = 0,\ d = 1,\ x^2 dy = ydy,$$

получаем значение объёма: $V_y = \pi \int_0^1 y\,dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ (куб. ед.).

10.2.4 Вычислить площадь поверхности $\Pi 1$, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \pi/2$.

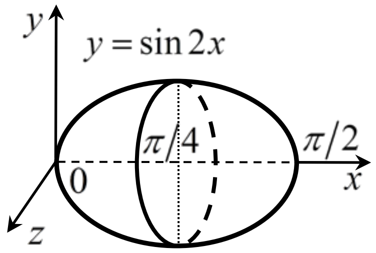


Рисунок 10.2.4.1 – Поверхность $\Pi 1$

Решение. Как видно из рисунка 10.2.4.1 и формулы (10.1.2.2) искомая площадь поверхности вращения

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\,dx =$$

$$= -\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\,d\cos 2x =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 2\cos 2x & x = 0 \to t = 2 \\ d\cos 2x = \dfrac{dt}{2} & x = \pi/2 \to t = -2 \end{bmatrix} = -\frac{\pi}{2} \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left. \left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{\ln\left| t + \sqrt{1+t^2} \right|}{2} \right) \right|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \right) \approx 9{,}29\ (\text{кв. ед}).$$

Для нахождения интеграла $\int \sqrt{1+t^2}\,dt$ воспользовались заменой $t = \operatorname{tg} z$, основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулой интегрирования по частям.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Найти объём клина, отсечённого от прямого кругового цилиндра радиуса R плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом φ к плоскости основания.

10.3.2 На хорде астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, параллельной оси Ox, построен квадрат, сторона которого равна длине хорды и плоскость которого перпендикулярна к плоскости Oxy. Найти объём тела, образованного при движении плоскости квадрата, если определяющая её хорда перемещается по астроиде.

10.3.3 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox, фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 10.3.3.1–10.3.3.2.

10.3.3.1 $2y = x^2,\ y = -x + 3/2$. **10.3.3.2** $y = e^{-2x} - 1,\ y = e^{-x} + 1,\ x = 0$.

10.3.4 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Oy, фигур, ограниченных линиями, указанными в задачах 10.3.4.1–10.3.4.2.

10.3.4.1 $2y = x^2 + 4x + 4,\ y = 2$. **10.3.4.2** $y = a\sin 2t,\ x = a\cos t,\ t = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

10.3.5 Вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox, дуг кривых, которые указаны в задачах 10.3.5.1 – 10.3.5.2.

10.3.5.1 $y = \operatorname{ch} x$ от $x = 0$ до $x = \ln 2$. **10.3.5.2** $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = \ln 2$.

10.3.6 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}\left(x - 12\right)$ между точками её пересечения с осью Ox.

10.3.7 Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = 3\cos t - \cos 3t$, $y = 3\sin t - \sin 3t$, $0 \le t \le \pi/2$, вокруг оси Ox.

10.3.8 Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r = 2\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными графиками функций вокруг заданной оси. В вариантах 1–15 осью вращения является ось абсцисс, а в вариантах 16–30 осью вращения является ось ординат.

10.4.1.1	$xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0.$	**10.4.1.2**	$y^2 = (x+4)^3,\ x = 0.$
10.4.1.3	$y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$	**10.4.1.4**	$y = x^2,\ y = 1,\ x = 2.$
10.4.1.5	$y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}.$	**10.4.1.6**	$x^2 + (y-2)^2 = 1.$
10.4.1.7	$y = x^2, y^2 - x = 0.$	**10.4.1.8**	$y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$
10.4.1.9	$y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$	**10.4.1.10**	$y = xe^x,\ y = 0, x = 1.$
10.4.1.11	$x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$	**10.4.1.12**	$y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$
10.4.1.13	$2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$	**10.4.1.14**	$y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \le x \le \pi.$
10.4.1.15	$y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \ge 0.$	**10.4.1.16**	$y = (x-1)^2, x = 0, x = 2, y = 0.$
10.4.1.17	$y = x^3, y = x.$	**10.4.1.18**	$y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0.$
10.4.1.19	$y = x^3, y = x^2.$	**10.4.1.20**	$y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$
10.4.1.21	$y = (x-1)^2, y = 1.$	**10.4.1.22**	$y = \ln x, x = 2, y = 0.$
10.4.1.23	$y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0{,}5.$	**10.4.1.24**	$y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1.$

10.4.1.25 $y = x^2, x = 2, y = 0.$

10.4.1.26 $x^2/9 + y^2/4 = 1.$

10.4.1.27 $y = x^2, 8x = y^2.$

10.4.1.28 $y = x^3, x = 0, y = 8.$

10.4.1.29 $y = 2 - x^2/2,\ x + y = 2.$

10.4.1.30 $y^2 = 4 - x, x = 0.$

11 МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: вычисление пути, пройденного материальной точкой с непрерывно меняющейся скоростью, работа переменной силы, работа электродвигателя переменной мощности, вычисление силы давления жидкости на пластину, моменты и центры масс плоских кривых, моменты и центры масс плоских фигур.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

11.1.1 Вычисление пути пройденной материальной точкой с непрерывно меняющейся скоростью

Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v = v(t)$ в промежутке времени $[t_0; T]$.

Путь $S = S(t)$, пройденный материальной точкой, выражается формулой

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \qquad (11.1.1.1)$$

11.1.2 Вычисление работы переменной силы

Предположим, что материальная точка движется по прямой под действием переменной силы $\vec{F}(x)$. Работа переменной силы на прямолинейном пути от точки a до точки b вычисляется по формуле

$$A = \int_{a}^{b} F(x)\,dx. \qquad (11.1.2.1)$$

11.1.3 Вычисление работы электродвигателя переменной мощности

Работа электродвигателя переменной мощности $N(t)$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt. \qquad (11.1.3.1)$$

11.1.4 Вычисление силы давления на пластину

Пусть пластина, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость, плотность которой равна ρ. Определим силу давления жидкости на пластину.

Если пластина площадью S находится в горизонтальном положении, то сила давления F жидкости на пластину будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластина, а высотой – глубина h, то есть $F = \rho g h S$.

Если же пластина погружена в жидкость вертикально, то сила давления изменяется с глубиной погружения. Будем учитывать, что по закону Паскаля давление в жидкости передаётся одинаково по всем направлениям.

Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Для нахождения силы давления будем использовать алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённому интегралу.

Сила давления жидкости на пластину вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b \rho g x f(x)\,dx. \qquad (11.1.4.1)$$

11.1.5 Моменты и центры масс плоских кривых

Для вывода формул используется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённому интегралу.

Пусть дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$ и имеет плотность $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x)\ f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx, \qquad (11.1.5.1)$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\ x \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx. \qquad (11.1.5.2)$$

Моменты инерции этой дуги I_x и I_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$I_x = \int_a^b \rho(x)\ f^2(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx, \qquad (11.1.5.3)$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\ x^2 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx. \qquad (11.1.5.4)$$

Координаты центра масс дуги x_c и y_c вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)\ x \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx, \qquad (11.1.5.5)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)\ f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx. \qquad (11.1.5.6)$$

где $m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$ – масса дуги.

Если плотность $\rho = 1$, то

$$y_c = \frac{1}{l}\int_a^b f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx \text{ или } l\cdot 2\pi y_c = 2\pi\int_a^b f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx.$$

Теорема 11.1.5.1 (Гульдена) Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и её не пересекающей, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описываемой её центром масс.

11.1.6 Моменты и центры масс плоских фигур

Для вывода формул используется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённому интегралу.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и имеющую плотность $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты этой фигуры M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)\ f^2(x)\,dx, \qquad M_y = \int_a^b \rho(x)\,x\ f(x)\,dx. \qquad (11.1.6.1)$$

Моменты инерции этой дуги I_x, I_y и I_O относительно координатных осей Ox, Oy и начала координат равны

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)\ f^3(x)\,dx, \qquad I_y = \int_a^b \rho(x)\,x^2\ f(x)\,dx, \qquad (11.1.6.2)$$

$$I_o = I_x + I_y. \qquad (11.1.6.3)$$

Координаты центра масс дуги x_c и y_c вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (11.1.6.4)$$

где $m = \int_a^b \rho(x)\ f(x)\,dx$ – масса пластины.

Если плотность $\rho = 1$, то

$$y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ или } S\cdot 2\pi y_c = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Теорема 11.1.6.1 (Гульдена) Объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси той же плоскости и не пересекающей эту фигуру, равен произведению площади данной фигуры на длину окружности, описываемой её центром масс при указанном вращении.

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 4 + 2t + 3t^2$ (м /с). Найти путь, пройденный телом за три секунды от начала движения.

Решение. Воспользуемся формулой (11.1.2.1)

$$S=\int_0^3\left(4+2t+3t^2\right)dt=\left(4t+t^2+t^3\right)\Big|_0^3=48 \text{ (м)}.$$

11.2.2 Вычислить работу, затраченную на растяжение пружины на 0,1 м, если известно, что для удлинения её на 0,05 м необходимо приложить силу 2 Н.

Решение. По закону Гука $F(x)=k\cdot x$.

Исходя из условия $2=k\cdot 0{,}05$ или $k=40$. Следовательно, $F(x)=40\cdot x$. Вычислим работу переменной силы по формуле (11.1.2.2):

$$A=\int_0^{0,1}40x\,dx=20x^2\Big|_0^{0,1}=0{,}2 \text{ (Дж)}.$$

11.2.3 Вычислить работу и среднюю мощность переменного тока за промежуток времени $[0;2\pi/\omega]$, если сила тока определяется формулой $I=I_0\sin\omega t$, где I_0 – максимальное значение тока; ω – круговая частота; t – время, а сопротивление цепи равно R.

Решение. Мощность тока определим по формуле: $N=I^2R$. Воспользуемся формулой (11.1.3.1). Тогда работа переменного тока равна

$$A=I_0^2R\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\,dt=\frac{I_0^2R}{2}\int_0^{2\pi/\omega}(1-\cos 2\omega t)\,dt=\frac{I_0^2R\pi}{\omega}.$$

Средняя мощность переменного тока равна $N_{cp}=\dfrac{A}{2\pi/\omega}=\dfrac{I_0^2R}{2}$.

11.2.4 Вычислить силу давления жидкости плотности ρ на пластину треугольной формы с основанием a и высотой h, верхнее основание которой расположено на уровне жидкости (рис. 11.2.4.1).

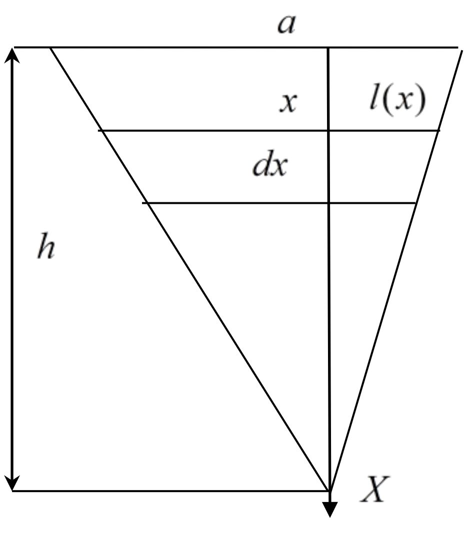


Рисунок 11.2.4.1 – Давление на пластину

Решение. Воспользуемся законом Паскаля и формулой (11.1.4.1).

Сила давления равна

$$F=\int_a^h \rho g x l(x)\,dx$$

Из подобия треугольников:

$$\frac{l(x)}{a}=\frac{h-x}{h} \text{ или } l(x)=\frac{a}{h}(h-x).$$

Откуда,

$$F=\frac{\rho g a}{h}\int_0^h x(h-x)dx=\frac{\rho g a}{h}\left(\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\rho g a h^2}{6}.$$

11.2.5 Найти статический момент цепной линии $y=\operatorname{ch}x$, где $0\le x\le 1$, относительно оси Ox.

Решение: Воспользуемся формулой (11.1.5.1):

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2+\operatorname{sh} 2}{4}.$$

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Скорость точки задаётся формулой $v = \sqrt{1+t^2}$ м /с. Найти путь, пройденной точкой за первые 10 секунд после начала движения. Чему равна средняя скорость за этот промежуток времени?

11.3.2 Скорость движения точки $v = 0{,}1te^{-0{,}001t}$ (м /с). Найти путь, пройденной точкой от начала движения до полной остановки.

11.3.3 Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса a и плотности ρ, который вращается вокруг его центра с угловой скоростью ω?

11.3.4 Какую работу необходимо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли, радиус которой равен R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

11.3.5 Какую работу необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает её на 1 см?

11.3.6 Два электрических заряда $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\cdot 10^{-7}$ Кл и $\varepsilon_1 = \frac{2}{3}\cdot 10^{-7}$ Кл находятся на оси Ox соответственно в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ см. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_3 = 10$ см?

11.3.7 Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус основания равен r, глубина котла h. Котёл заполнен жидкостью с плотностью ρ. Найти работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла?

11.3.8 Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой 10 м, имеющий в основании круг радиуса 5 м.

11.3.9 Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла с радиусом 15 м.

11.3.10 Найти силу давления, который испытывает полукруг радиусом три метра, который погружён вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

11.3.11 Найти силу давления воды на погруженную вертикально в неё пластину, которая имеет форму равнобедренного треугольника с основанием 24 метра и боковыми сторонами, равными 15 метрам, предполагая, что вершина этого треугольника лежит на свободной поверхности жидкости, а основание − параллельно ей.

11.3.12 Вертикальная пластина погружена в жидкость с плотностью $\rho = 1$. Пластина имеет форму трапеции с основаниями 15 и 5 м и высотой 4 м. Найти силу давления жидкости на пластину, если верхнее основание трапеции совпадает с поверхностью жидкости.

11.3.13 Найти давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 3 см и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 9 см.

11.3.14 Вычислить статические моменты относительно осей координат дуги полуокружности с центром в начале координат и радиусом 5 метров.

11.3.15 Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ от $x = -2$ до $x = 2$.

11.3.16 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей координат цепной линии $y = \operatorname{ch} 2x$, если $x \in [0;1]$.

11.3.17 Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$, которая расположена в первой и второй четвертях относительно оси абсцисс.

11.3.18 Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$. Определить статический момент и момент инерции относительно оси абсцисс.

11.3.19 Найти статический момент и момент инерции относительно оси абсцисс первой арки циклоиды $x = 2(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$.

11.3.20 Пользуясь первой теоремой Гульдена, найти центр масс дуги астроиды $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

11.4.1 Используя определенный интеграл, решить следующие задачи.

Задачи 11.4.1.1 – 11.4.1.10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 11.4.1.1). Плотность воды $\rho = 1000\ кг/м^3$, ускорение свободного падения g положить равным $10\ м/с^2$.

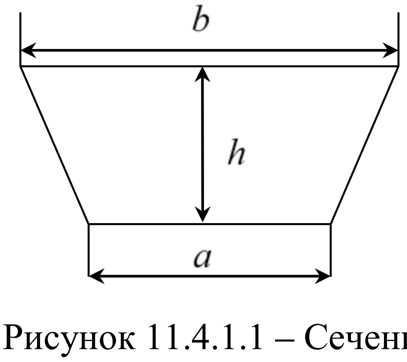


Рисунок 11.4.1.1 – Сечение плотины

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

11.4.1.1 $a = 4{,}5$ м, $b = 6{,}6$ м, $h = 3{,}0$ м. **11.4.1.2** $a = 4{,}8$ м, $b = 7{,}2$ м, $h = 3{,}0$ м.

11.4.1.3 $a = 5{,}1$ м, $b = 7{,}8$ м, $h = 3{,}0$ м. **11.4.1.4** $a = 5{,}4$ м, $b = 8{,}4$ м, $h = 3{,}0$ м.

11.4.1.5 $a = 5{,}7$ м, $b = 9{,}0$ м, $h = 4{,}0$ м. **11.4.1.6** $a = 6{,}0$ м, $b = 9{,}6$ м, $h = 4{,}0$ м.
11.4.1.7 $a = 6{,}3$ м, $b = 10{,}2$ м, $h = 4{,}0$ м. **11.4.1.8** $a = 6{,}6$ м, $b = 10{,}8$ м, $h = 4{,}0$ м.
11.4.1.9 $a = 6{,}9$ м, $b = 11{,}4$ м, $h = 5{,}0$ м. **11.4.1.10** $a = 7{,}2$ м, $b = 12{,}0$ м, $h = 5{,}0$ м.

Задачи 11.4.1.11 – 11.4.1.20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_З = 6380\ км$. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 $м/с^2$.

11.4.1.11 $m = 7{,}0$ т, $H = 200$ км. **11.4.1.12** $m = 7{,}0$ т, $H = 250$ км.
11.4.1.13 $m = 6{,}0$ т, $H = 300$ км. **11.4.1.14** $m = 6{,}0$ т, $H = 350$ км.
11.4.1.15 $m = 5{,}0$ т, $H = 400$ км. **11.4.1.16** $m = 5{,}0$ т, $H = 450$ км.
11.4.1.17 $m = 4{,}0$ т, $H = 500$ км. **11.4.1.18** $m = 4{,}0$ т, $H = 550$ км.
11.4.1.19 $m = 3{,}0$ т, $H = 600$ км. **11.4.1.20** $m = 3{,}0$ т, $H = 650$ км.

Задачи 11.4.1.21 – 11.4.1.30

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением 103,3 кПа. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 11.4.1.2).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = const$, где p – давление, V – объем.

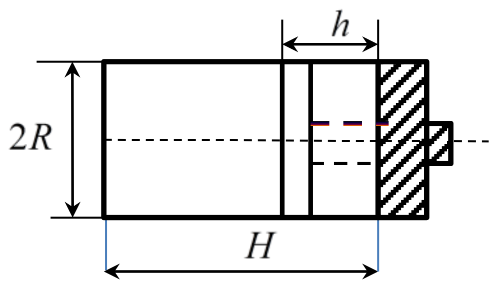


Рисунок 11.4.1.2 – Сжатие газа поршнем

11.4.1.21 $H = 0{,}5$ м, $h = 0{,}4$ м, $R = 0{,}1$ м. **11.4.1.22** $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}3$ м, $R = 0{,}1$ м.
11.4.1.23 $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}2$ м, $R = 0{,}1$ м. **11.4.1.24** $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}7$ м, $R = 0{,}2$ м.
11.4.1.25 $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}6$ м, $R = 0{,}2$ м. **11.4.1.26** $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}4$ м, $R = 0{,}2$ м.
11.4.1.27 $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}4$ м, $R = 0{,}3$ м. **11.4.1.28** $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м.
11.4.1.29 $H = 1{,}6$ м, $h = 0{,}8$ м, $R = 0{,}3$ м. **11.4.1.30** $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}5$ м, $R = 0{,}4$ м.

12 ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: определение двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в двойном интеграле, вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $f(x;y)$ определена в некоторой замкнутой области G.

Разобьем данную область системой пересекающих линий произвольным образом на n элементарных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n$. Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной области называется *диаметром разбиения*: $d_1, d_2, ..., d_i, ..., d_n$. Значение $\lambda_n = \max\limits_i d_i$ называется *мелкостью разбиения*. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), ..., M_i(x_i; y_i), ..., M_n(x_n; y_n)$. Вычисляем значение функции в этих точках: $f(x_1; y_1),\ f(x_2; y_2), ...,\ f(x_i; y_i), ...,\ f(x_n; y_n)$. Составим суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$, которые называются *двухмерными интегральными суммами* функции f в области G.

Определение 12.1.1 *Двойным интегралом* от функции $f(x; y)$ по области G называется предел двухмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iint\limits_G f(x; y) dS \overset{def}{=} \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i . \tag{12.1.1}$$

Теорема 12.1.1 Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области G, то предел двухмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

Так как, определение двойного интеграла конструктивно не отличается от определения определённого интеграла, то свойства двойного интеграла будут аналогичны свойствам определённого интеграла.

В декартовой прямоугольной системе координат область G удобно разбивать на элементарные области прямыми линиями, параллельными осям координат. Полученные при таком разбиении элементарные области, принадлежащие области G, являются прямоугольниками. Следовательно, $dS = dxdy$ и

$$\iint\limits_G f(x; y) dS = \iint\limits_G f(x; y) dxdy . \tag{12.1.2}$$

Определение 12.1.2 Область G называется *стандартной в направлении оси* Oy (оси Ox), если любая прямая, проходящая через данную область параллельно оси Oy (оси Ox), пересекает границу области только в двух точках.

Рассмотрим методы вычисления двойного интеграла по областям, стандартным в направлении координатных осей. Так как практически любую область можно представить в виде объединения стандартных областей, то согласно свойству аддитивности области интегрирования для двойных интегралов, эти методы применимы для вычисления интегралов по любым областям.

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Oy, то есть $G=\{(x;y)|a\le x\le b\wedge y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$. Тогда двойной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам (внутреннее интегрирование ведётся по переменной y, а внешнее – по переменной x):

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (12.1.3)$$

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Ox, то есть $G=\{(x;y)|c\le y\le d\wedge x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$. Тогда двойной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам (внутреннее интегрирование ведётся по переменной x, а внешнее – по переменной y):

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (12.1.4)$$

Пусть переменные x и y связаны с переменными u,v соотношениями $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, где функции $x(u;v)$, $y(u;v)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями, взаимно однозначно отображающими область G плоскости Oxy на область G' плоскости $O'uv$, при этом *якобиан*

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \qquad (12.1.5)$$

сохраняет постоянный знак в области G. Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\iint_{G_1} f(x(u;v);y(u;v))|I|dudv. \qquad (12.1.6)$$

Расстановка пределов интегрирования при переходе к повторным интегралам осуществляется по рассмотренным выше правилам с учётом области интегрирования G'.

Рассмотрим полярную систему координат. Прямоугольные декартовые координаты (x,y) и полярные координаты (r,φ) связаны соотношениями:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r\ge 0,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

Переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = r$)

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_G f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi. \qquad (12.1.7)$$

В двойном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к полярной системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2 + y^2$. В полярной системе координат значение выражения $x^2 + y^2$ равно r^2, что даёт значительное упрощение при вычислении двойного интеграла.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G F(r;\varphi)rdrd\varphi$. Предположим, что область G ограничена линиями:

$$G: \begin{cases} \varphi = \alpha,\ \varphi = \beta, \\ r = r_1(\varphi),\ r = r_2(\varphi). \end{cases}$$

Таким образом, предположим, что область G такова, что любой луч, исходящий из полюса и имеющий общие точки с областью, пересекает границу области только в двух точках. Тогда вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, также как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iint_G F(r;\varphi)\, drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r;\varphi)dr. \qquad (12.1.8)$$

Рассмотрим обобщённые полярные координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi, \quad r \ge 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Переход в двойном интеграле от декартовых координат к обобщённым полярным координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = abr$)

$$\iint_G f(x;y)dxdy = ab\iint_G f(a\,r\cos\varphi; b\,r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi. \qquad (12.1.9)$$

В двойном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой полярной системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. В обобщённой полярной системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ равно r^2, что даёт значительное упрощение при вычислении двойного интеграла.

Вычисление двойного интеграла в обобщённой полярной системе координат, также, как и в полярной системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования G, которая ограничена параболой $y^2 = x$ и прямой $y + x = 2$.

Решение. Изобразим область интегрирования G, предварительно найдя точки пересечения параболы и прямой $x = y^2$. Решим систему

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x = 2 - y. \end{cases} \quad y^2 = 2 - y \text{ или } y^2 + y - 2 = 0.$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

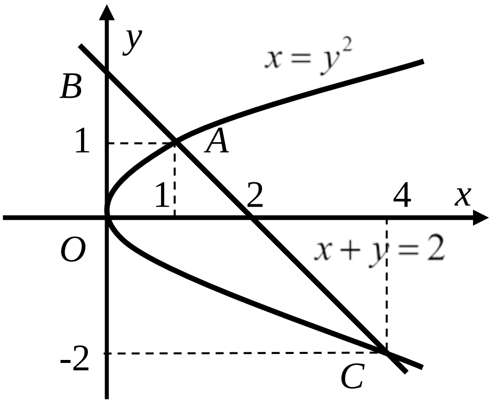


Рисунок 12.2.1 – Фигура *OAC*

Таким образом, получили две точки пересечения параболы $y^2 = x$ и прямой $x = y^2$: $A(1;1)$ и $C(4;-2)$.

Область интегрирования G на рисунке 12.2.1 представляет собой фигуру OAC, которая является стандартной вдоль координатной оси Ox. Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$ путем перехода к повторным интегралам:

$$\iint\limits_G xydxdy = \int\limits_{-2}^{1} y\,dy \int\limits_{y^2}^{2-y} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} y\,x^2 \Big|_{y^2}^{2-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} y\left((2-y)^2 - \left(y^2\right)^2\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1}\left(4y - 4y^2 + y^3 - y^5\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6\right)\Bigg|_{-2}^{1} == \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(8 + \frac{32}{3} + 4 - \frac{32}{3}\right) = -5\frac{5}{8}.$$

12.2.2 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{8xy}{x^2+y^2}dxdy$, где область G ограничена дугой окружности $x^2+y^2=16$ и координатными осями ($x \ge 0$, $y \le 0$).

Решение. Так как область интегрирования представляет собой часть круга, то двойной интеграл проще вычислить в полярных координатах. Согласно формулам (12.1.7) и (12.1.8) имеем:

$$\iint\limits_G \frac{8xy}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_G \frac{8r\cos\varphi \; r\sin\varphi}{r^2} r\,d\varphi\,dr = 4\iint\limits_G r\sin 2\varphi\, d\varphi\, dr = 4\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^4 r\sin 2\varphi\, dr =$$

$$= 2\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi \; r^2\Big|_0^4 d\varphi = 32\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = -16\cos 2\varphi\Big|_{\pi}^{3\pi/2} = -16\cdot(-1)+16\cdot 1 = 32.$$

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Вычислить повторные интегралы, написать уравнения линий, ограничивающие области интегрирования соответствующих двойных интегралов:

а) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_1^{x+1} \frac{y}{x}\,dy$; б) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}\,dy$; в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}\,dy$;

г) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_1^{y^3} \frac{6x}{y^4}\,dx$; д) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{4/x}^{5-x} \frac{x}{y}\,dy$; е) $\int\limits_2^5 dx \int\limits_1^x 4xy\,dy$;

ж) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y^2}} \sqrt[3]{y}\,dx$; з) $\int\limits_1^5 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} xy\,dx$; и) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{x^3} (2x+4yx)dy$.

12.3.2 Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах, к которым сводятся двойные интегралы $\iint\limits_G f(x;y)\,dxdy$ от непрерывной функции $f(x;y)$ в указанных областях G:

а) G ограничена линиями $y^2 = x$, $x = 1$;

б) G ограничена линиями $xy = 6$, $x + y = 7$;

в) G ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $x - y = -3$;

г) G ограничена линиями $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$, $x^2 + y^2 = 9$ $(x \le 0, y \le 0)$;

д) G ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.

12.3.3 Изменить порядок интегрирования в заданных повторных интегралах, предварительно изобразив области интегрирования:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x;y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x;y)\,dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x;y)\,dy$;

в) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x;y)\,dx + \int\limits_{2}^{5} dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x;y)\,dx$;

г) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx$;

д) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x-1}^{4x+6} f(x;y)\,dy + \int\limits_{-1}^{6} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x-1}^{2} f(x;y)\,dy$;

е) $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x;y)\,dy$.

12.3.4 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$, если область G ограничена линиями $y = x^2$ и $y^2 = x$.

12.3.5 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (2x+2y)dxdy$, если область G ограничена линиями $xy = 6$ и $y + x = 7$.

12.3.6 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x+y)dxdy$, если область G ограничена линиями $y = 3x/2$ и $y = 4-(x-1)^2$.

12.3.7 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (1-2xy)dxdy$, если область G ограничена линиями $y^2 = x+2$ и $y - x = 0$.

12.3.8 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{y^3}{x^2}dxdy$, если область G ограничена линиями $y = \frac{x}{3}$, $y = \sqrt{x}$ и $x = 1$. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y.

12.3.9 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x\cos(x+y)dxdy$, если область G ограничена линиями $x = y$, $x = \pi$ и $y = 0$.

12.3.10 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x^2+y)dxdy$, если область G ограничена линиями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ и $xy = 2$ ($x \ge 0$).

12.3.11 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (2x-2y)dxdy$, если область G ограничена прямыми $x-y=2$, $x-y=-1$, $y+2x=3$, $y+2x=1$.

12.3.12 Вычислить повторные интегралы $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}\, r\, dr$.

12.3.13 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G r\sin\varphi dr\, d\varphi$, если область G заключена между линиями $r=2+\cos\varphi$ и $r=1$.

12.3.14 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G r^2\cos\varphi dr\, d\varphi$, если область G представляет собой половину круга радиуса R с центром в точке $C\left(R;\dfrac{\pi}{2}\right)$, расположенного справа от этой точки.

12.3.15 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G 12r^2\sin\varphi dr\, d\varphi$, если область G ограничена полярной осью, линией $r=3+\cos\varphi$ и расположена выше этой оси.

12.3.16 Вычислить повторные интегралы $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dy$.

12.3.17 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \dfrac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если область G ограничена линиями $x^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=16$ ($x\le 0$, $y\ge 0$).

12.3.18 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\big/\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, если область G определена неравенствами $\pi^2/9 \le x^2+y^2 \le 9\pi^2$.

12.3.19 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)dx\,dy$, если область G определена неравенствами $x^2+y^2\ge 25$ и $x^2+y^2\le 36$.

12.3.20 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=32x$.

12.3.21 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \left(x^2-y^2\right)dxdy$, если область G ограничена линиями $x^2+y^2=81$ и $x^2+y^2=100$ ($x\le 0$, $y\ge 0$).

12.3.22 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x+y)dxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=16y$.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Вычислить двойной интеграл по области G, ограниченной указанными линиями. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y. Начертить область интегрирования.

12.4.1.1 $\iint\limits_G \left(x^2y + y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x, x + y = 1, y = 0,25.$

12.4.1.2 $\iint\limits_G \left(x^2 + yx + y^2\right)dxdy, \quad G: y = x^2, x + y = 2.$

12.4.1.3 $\iint\limits_G \left(x^2 - y + y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x^2, x = y^3.$

12.4.1.4 $\iint\limits_G \left(5x^2y - 3y^2x^3\right)dxdy, \quad G: y = x, x + y = 3, y = 1.$

12.4.1.5 $\iint\limits_G \left(x^2 - y^2\right)dxdy, \quad G: y - x^2 = 0, x - y^2 = 0.$

12.4.1.6 $\iint\limits_G \left(2x^3y + 3y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x^2.$

12.4.1.7 $\iint\limits_G \left(4x^3 + 3y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x, x \ge 0.$

12.4.1.8 $\iint\limits_G \left(5x^4 + 2y^3x^2\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x, x \le 0.$

12.4.1.9 $\iint\limits_G (x - y)dxdy, \quad G: y = x^2, y = 1, x = 0,5.$

12.4.1.10 $\iint\limits_G y^2x^2dxdy, \quad G: y^2 = x, x = 1, y = 0,5.$

12.4.1.11 $\iint\limits_G \left(2x^2y - y^2x\right)dxdy, \quad G: y = 2x, x + y = 3, y = 1.$

12.4.1.12 $\iint\limits_G \left(2x^2 - 3yx + 3y^3\right)dxdy, \quad G: y = x^2, 2x + y = 3.$

12.4.1.13 $\iint\limits_G \left(2x^2 - 3y + 4yx\right)dxdy, \quad G: y = x^2, y = 8 - x^2.$

12.4.1.14 $\iint\limits_G \left(4xy - 3y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y = x, x + y = 4, y = 1.$

12.4.1.15 $\iint\limits_G \left(3x^2 + 9y^2\right)dxdy, \quad G: y = x^2 - 4, y = 4 - x^2.$

12.4.1.16 $\iint\limits_G \left(6x^3y + 6y^3x\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y^3 = x, y \le 0.$

12.4.1.17 $\iint\limits_G \left(5x^4 - 6y^2x^3\right)dxdy, \quad G: y = x^5, y = x, x \ge 0.$

12.4.1.18 $\iint\limits_G \left(6x^5+16y^4x^4\right)dxdy, \quad G: y=x^5,\ y=x,\ x\le 0.$

12.4.1.19 $\iint\limits_G 16x^2ydxdy, \quad G: y=x^3,\ y=1,\ x=0.$

12.4.1.20 $\iint\limits_G 12xy^2dxdy, \quad G: y^3=x,\ x=1,\ y=0{,}5.$

12.4.1.21 $\iint\limits_G \left(9x^2y^2-4yx\right)dxdy, \quad G: y=3x,\ x+y=4,\ y=1.$

12.4.1.22 $\iint\limits_G \left(3x^2+4yx+8y^3\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ 3x+y=4.$

12.4.1.23 $\iint\limits_G \left(4x^3-3y^2+9y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ y=18-x^2.$

12.4.1.24 $\iint\limits_G \left(6x^2y-12y^3x^2\right)dxdy, \quad G: y=x,\ x+y=8,\ y=2.$

12.4.1.25 $\iint\limits_G \left(4x^3+12y^3\right)dxdy, \quad G: y=-1+x^2,\ y=1-x^2.$

12.4.1.26 $\iint\limits_G \left(10xy^4+10yx^4\right)dxdy, \quad G: y=x^4,\ y^4=x.$

12.4.1.27 $\iint\limits_G \left(6x^5-20y^3x^4\right)dxdy, \quad G: y=x^6,\ y=x^2,\ x\ge 0.$

12.4.1.28 $\iint\limits_G \left(4x+9yx\right)dxdy, \quad G: y=x^6,\ y=x^2,\ x\le 0.$

12.4.1.29 $\iint\limits_G 36xydxdy, \quad G: y=2x,\ y=x,\ x=4.$

12.4.1.30 $\iint\limits_G (2x+2y)dxdy, \quad G: y^4=x,\ x=16,\ y\le 1.$

12.4.2 Вычислить двойные интегралы. Начертить область интегрирования.

12.4.2.1 $\iint\limits_G \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G: \dfrac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le \dfrac{\pi^2}{9},\ y\le x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.2 $\iint\limits_G \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G: \dfrac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le \dfrac{\pi^2}{4},\ y\ge x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.3 $\iint\limits_G \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G: 1\le x^2+y^2\le e^2,\ y\ge -x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.4.2.4 $\iint\limits_G \arccos\left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad G: \dfrac{3}{4}\le x^2+y^2\le 1,\ y\le -x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.4.2.5 $\iint\limits_G \arcsin\left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad G: \dfrac{1}{4}\le x^2+y^2\le \dfrac{3}{4},\ y\ge x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

12.4.2.6 $\iint\limits_G e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \ln^2 4\le x^2+y^2\le \ln^2 5,\ y\le x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

12.4.2.7 $\iint\limits_G \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \ln^2 5 \le x^2+y^2 \le \ln^2 6,\ y\le -x,\ y\le 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.8 $\iint\limits_G \frac{\arccos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le \frac{1}{2},\ y\ge -x,\ y\le 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.9 $\iint\limits_G \frac{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \frac{1}{2} \le x^2+y^2 \le \frac{3}{4},\ y\le x,\ y\ge -x,\ x\ge 0.$

12.4.2.10 $\iint\limits_G \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G: \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y\ge -x,\ y\ge x,\ y\ge 0.$

12.4.2.11 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G: \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 1,\ y\le -x,\ y\ge x,\ x\le 0.$

12.4.2.12 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ y\le -x,\ y\le x,\ y\le 0.$

12.4.2.13 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y\ge -x,\ y\ge 0.$

12.4.2.14 $\iint\limits_G \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^3\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{16},\ y\le -x,\ x\le 0.$

12.4.2.15 $\iint\limits_G \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^3\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \frac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9},\ y\le x,\ x\ge 0.$

12.4.2.16 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y\le \sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.17 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y\ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.4.2.18 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\ln\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy, \quad G: 9 \le x^2+y^2 \le 16,\ y\ge -\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.4.2.19 $\iint\limits_G \frac{\arccos\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: 16 \le x^2+y^2 \le 81,\ y\le -x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.4.2.20 $\iint\limits_G \frac{\arcsin\frac{1}{8}\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}}{\sqrt[8]{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: 256 \le x^2+y^2 \le 6561,\ y\ge x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

12.4.2.21 $\iint\limits_G \left((x^2+y^2)\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right)dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y\le x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

12.4.2.22 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \cdot \frac{\ln\sqrt{4x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy,\ G: e^2 \le x^2+y^2 \le e^4,\ y \le x,\ y \le 0,\ x \ge 0.$

12.4.2.23 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{y} \cdot \frac{\arccos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy, G: \frac{3}{4} \le x^2+y^2 \le 1,\ y \ge x, y \le 0,\ x \ge 0.$

12.4.2.24 $\iint\limits_G \frac{2\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad G: \frac{1}{2} \le x^2+y^2 \le 1,\ y \le \sqrt{3}\cdot x,\ y \ge -x,\ \ x \ge 0.$

12.4.2.25 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}} dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge \sqrt{3}\cdot x,\ y \ge 0.$

12.4.2.26 $\iint\limits_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy,\ G: \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \le -x,\ y \ge x,\ \ x \le 0.$

12.4.2.27 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad G: \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \le -\sqrt{3}\cdot x,\ y \le x,\ y \le 0.$

12.4.2.28 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x} \cdot \frac{\operatorname{arcctg}\left(2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy, G: 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge 0.$

12.4.2.29 $\iint\limits_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot tg\sqrt{4x^2+4y^2} \right) dxdy,\ G: \frac{\pi^2}{36} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9},\ y \le -\sqrt{3}x,\ x \le 0$

12.4.2.30 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x} \cdot \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^3\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{16},\ y \le \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \ge 0.$

13 ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: определение тройного интеграла, вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в тройном интеграле, вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат.

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена в некоторой замкнутой области Ω.

Разобьем данную область системой пересекающих линий произвольным образом на n элементарных областей с объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной области называется *диаметром разбиения*: $d_1, d_2, ..., d_n$. Значение $\lambda_n = \max\limits_i d_i$ называется *мелкостью разбиения*. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), ..., M_n(x_n; y_n; z_n)$ и вычисляем значение функции в них: $f(x_1; y_1; z_1), f(x_2; y_2; z_2), ..., f(x_n; y_n; z_n)$. Составим суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i$, которые называются *трёхмерными интегральными суммами* функции $f(x; y; z)$ в области Ω.

Определение 13.1.1 *Тройным интегралом* от функции $f(x; y; z)$ по области Ω называется предел трёхмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x; y; z) dV \overset{def}{=} \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i . \tag{13.1.1}$$

Теорема 13.1.1 Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в замкнутой области Ω, то предел трёхмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

Так как определение тройного интеграла конструктивно не отличается от определения определённого интеграла, то свойства тройного интеграла будут аналогичны свойствам определённого интеграла.

В декартовой прямоугольной системе координат область Ω удобно разбивать на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Полученные при таком разбиении элементарные области, принадлежащие области Ω, являются параллелепипедами с объёмами $dV = dxdydz$. Следовательно, тройной интеграл принимает вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x; y; z)\, dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x; y; z)\, dxdydz . \tag{13.1.2}$$

Определение 13.1.2 Область Ω называется *стандартной в направлении оси* Oz (оси Ox, оси Oy), если любая прямая, проходящая через данную область параллельно оси Oz (оси Ox, оси Oy), пересекает границу области только в двух точках.

Рассмотрим методы вычисления тройного интеграла по областям, стандартным в направлении координатных осей. Так как практически любую область можно представить в виде объединения стандартных областей, то согласно свойству аддитивности области интегрирования для тройных интегралов, эти методы применимы для вычисления тройных интегралов по любым областям.

Предположим, что область является стандартной относительно оси Oz. Тогда множество точек заданной области Ω можно записать в виде: $\Omega=\left\{(x;y;z)\middle|(x;y)\in G\wedge z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\right\}$, с учетом того, что проекция пространственной области Ω на плоскость Oxy представляет собой плоскую область G. Предположим, что область G является стандартной относительно оси Oy, то есть $G=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b\wedge y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$. Тогда тройной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)}f(x;y;z)dz. \qquad (13.1.3)$$

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Ox, то есть $G=\left\{(x;y)\middle|c\le y\le d\wedge x_1(y)\le x\le x_2(y)\right\}$. Тогда тройной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)}f(x;y;z)dz. \qquad (13.1.4)$$

Пусть переменные x, y и z связаны с переменными u, v, w соотношениями $x=x(u;v;w)$, $y=y(u;v;w)$, $z=z(u;v;w)$, где функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$ и $z(u;v;w)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями, взаимно однозначно отображающими область Ω пространства $Oxyz$ на область Ω' пространства $O'uvw$, при этом *якобиан*

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix} \qquad (13.1.5)$$

сохраняет постоянный знак в области Ω. Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w))\left|I\right|dudvdw. \qquad (13.1.6)$$

Расстановка пределов интегрирования при переходе к повторным интегралам осуществляется по рассмотренным выше правилам с учётом области интегрирования Ω'.

Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Прямоугольные декартовые координаты (x, y, z) и цилиндрические координаты (r, φ, z) связаны соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим координатам осуществляется по формуле (якобиан $I = r$)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z) r d\varphi dr dz. \qquad (13.1.7)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к цилиндрической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2 + y^2$. В цилиндрической системе координат значение выражения $x^2 + y^2$ равно r^2, что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} F(r;\varphi;z)\, d\varphi dr dz$. Предположим, что область Ω ограничена поверхностями:

$$\Omega: \begin{cases} \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \\ r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi), \\ z = z_1(\varphi; r), z = z_2(\varphi; r). \end{cases}$$

Тогда вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат, также, как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iiint\limits_{\Omega} F(r;\varphi;z)\, d\varphi dr dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{z_1(\varphi;r)}^{z_2(\varphi;r)} F(r;\varphi;z)\, dz. \qquad (13.1.8)$$

Рассмотрим обобщённые цилиндрические координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к обобщённым цилиндрическим координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = abr$)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz = ab\iiint\limits_{\Omega_1} f(ar\cos\varphi;br\sin\varphi;z)rd\varphi drdz\,. \qquad (13.1.9)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой цилиндрической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. В обобщённой цилиндрической системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ равно r^2, что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в обобщённой цилиндрической системе координат, также, как и в цилиндрической системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

Рассмотрим сферическую систему координат. Прямоугольные декартовые координаты (x, y, z) и сферические координаты (φ, ρ, Θ) связаны соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\Theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\Theta, \quad z = \rho\cos\Theta,$$
$$\rho \ge 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \Theta \le \pi.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = \rho^2\sin\Theta$)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega_1} f(\rho\cos\varphi\sin\Theta;\rho\sin\varphi\sin\Theta;\rho\cos\Theta)\rho^2\sin\Theta d\varphi d\rho d\Theta. \qquad (13.1.10)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к сферической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2+y^2+z^2$. В сферической системе координат значение выражения $x^2+y^2+z^2$ равно ρ^2, что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} F(\varphi;\rho;\Theta)\,d\varphi d\rho d\Theta$. Предположим, что область Ω ограничена поверхностями:

$$\Omega:\begin{cases}\varphi=\alpha,\varphi=\beta,\\ \rho=\rho_1(\varphi),\ \rho=\rho_2(\varphi),\\ \Theta=\Theta_1(\varphi;\rho),\ \Theta=\Theta_2(\varphi;\rho).\end{cases}$$

Тогда вычисление тройного интеграла в сферической системе координат, также, как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iiint\limits_{\Omega} F(\varphi;\rho;\Theta)\,d\varphi d\rho d\Theta=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}d\rho\int\limits_{\Theta_1(\varphi;\rho)}^{\Theta_2(\varphi;\rho)}F(\varphi;\rho;\Theta)\,d\Theta. \qquad (13.1.11)$$

Рассмотрим обобщённые сферические координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x=a\rho\cos\varphi\sin\Theta,\quad y=b\rho\sin\varphi\sin\Theta,\quad z=c\rho\cos\Theta,$$
$$\rho\ge 0,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le\Theta\le\pi.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых к обобщённым сферическим координатам осуществляется по формуле (якобиан $I=abc\rho^2\sin\Theta$)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dxdydz=$$
$$=abc\iiint\limits_{\Omega_1} f(a\rho\cos\varphi\sin\Theta;b\rho\sin\varphi\sin\Theta;\rho\cos\Theta)\rho^2\sin\Theta\,d\varphi d\rho d\Theta. \qquad (13.1.12)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой сферической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$. В обобщённой сферической системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ равно ρ^2, что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в обобщённой сферической системе координат, также, как и в сферической системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}(x-y-z)dxdydz$, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования Ω, которая определяется неравенствами $0\le x\le 3, 0\le y\le 1, -2\le z\le 1$.

Решение. Областью интегрирования является прямой параллелепипед, который изображен на рисунке 13.2.1.

$$\iiint\limits_{\Omega}(x-y-z)dxdydz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2}^{1}(x-y-z)dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1\left(xz-yz-\frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}dy=$$

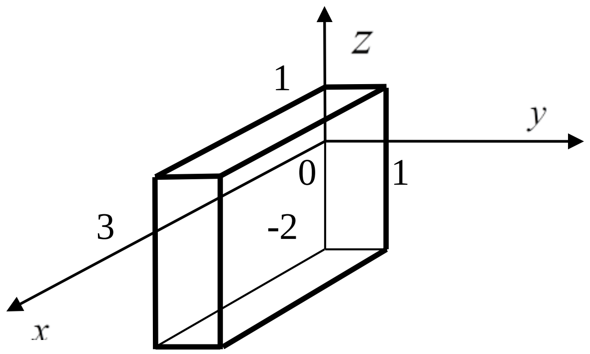


Рисунок 13.2.1 – Параллелепипед

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1\left(x-y-\frac{1}{2}+2x-2y+2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1\left(3x-3y+\frac{3}{2}\right)dy=$$

$$=3\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1\left(x-y+\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=3\int\limits_0^3\left(xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^1 dx=$$

$$=3\int\limits_0^3\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0\right)dx=3\int\limits_0^3 x\,dx=3\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3=3\cdot\left(\frac{9}{2}-0\right)=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}.$$

13.2.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}3ydxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $y=0$, $y=\sqrt{2x-x^2}$, $z=0$, $z=4$.

Решение. С учётом характера области интегрирования Ω вычисление удобно вести в цилиндрической системе координат. Имеем

$$y=\sqrt{2x-x^2}\to x^2+y^2=2x\to r=2\cos\varphi.$$

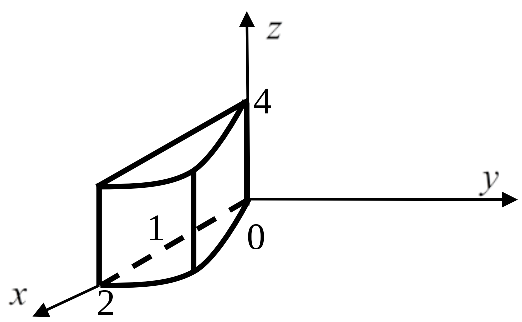


Рисунок 13.2.2 – Полуцилиндр

Следовательно, область Ω задана неравенствами: $0\le z\le 4$, $0\le\varphi\le\pi/2$, $0\le r\le 2\cos\varphi$ (рис. 13.2.2).

$$\iiint\limits_{\Omega}3ydxdydz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}dr\int\limits_0^4 3r\sin\varphi\, r dz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}3\sin\varphi\, r^2\, z\Big|_0^4 dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}12\sin\varphi\, r^2 dr=\int\limits_0^{\pi/2}4\sin\varphi\, r^3\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}32\sin\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}32\sin\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi=-8\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/2}=-8\cdot\left(\cos^4\frac{\pi}{2}-\cos^4 0\right)=8.$$

13.2.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} 16\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}\,dxdydz$, если область интегрирования Ω определяется неравенствами: $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

Решение. С учётом характера области интегрирования Ω вычисление удобно вести в сферической системе координат. Область Ω представляет собой полушар, расположенный выше плоскости Oxy, то есть сферические координаты φ, ρ и Θ изменяются в области Ω следующим образом: $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\rho\leq 2$, $0\leq\Theta\leq\pi/2$.

$$\iiint\limits_{\Omega} 16\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}\,dx\,dy\,dz = 16\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \rho^5\rho^2 \sin\Theta\, d\Theta =$$

$$= -16\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^7 \cos\Theta\Big|_0^{\pi/2}\, d\rho = 16\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^7\, d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \rho^8\Big|_0^2\, d\varphi = 512\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 512\varphi\Big|_0^{2\pi} = 1024\pi .$$

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Вычислить повторные интегралы $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} zdz$.

13.3.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2zdxdydz$, если область Ω определяется неравенствами: $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq x$, $0\leq z\leq xy$.

13.3.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область Ω ограничена поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

13.3.4 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$, если область Ω ограничена гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x+y=1$, $z=0$ ($z\geq 0$).

13.3.5 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,dxdydz$, если область Ω ограничена цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$.

13.3.6 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$, если область Ω определяется неравенствами: $0\leq x\leq 1/2$, $x\leq y\leq 2x$, $0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}$.

13.3.7 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=-1$, $z=0$.

13.3.8 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}x^2y^2dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

13.3.9 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2-y^2\right)dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z^2=x^2+y^2$.

13.3.10 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $y=x^2+z^2$, $y=1$.

13.3.11 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=1$.

13.3.12 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}x\,y\,dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $z=x^2/4+y^2/9$, $z=2-x^2/4-y^2/9$.

13.3.13 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $6z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=27$.

13.3.14 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\left(2x^2+2y^2+2z^2\right)dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностью $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$.

13.3.15 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,dxdydz$, если область Ω ограничена поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=1$.

13.3.16 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2/4+y^2/9+z^2/25\right)dxdydz$, если область Ω ограничена эллипсоидом $x^2/4+y^2/9+z^2/25=1$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Вычислить тройной интеграл.

13.4.1.1 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2-5xy+4yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 3, 0\le z\le 2.$

13.4.1.2 $\iiint\limits_{\Omega}\left(4xz-2xy+4yz\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 2, 1\le y\le 4, 0\le z\le 3.$

13.4.1.3 $\iiint\limits_{\Omega}\left(2y^2-5xz+z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 1\le x\le 3, 2\le y\le 4, 0\le z\le 2.$

13.4.1.4 $\iiint\limits_{\Omega}\left(4x^2-6y+24xyz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -2\le x\le 2, 0\le y\le 3, 1\le z\le 4.$

13.4.1.5 $\iiint\limits_{\Omega}\left(24x^2y-36xy^2+4yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 4, -2\le y\le 1, 1\le z\le 3.$

13.4.1.6 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6zx^2-4y^3+9y^2z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 4, 0\le y\le 4, 0\le z\le 4.$

13.4.1.7 $\iiint\limits_{\Omega}\left(4y^3-24x^2z+3z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -1\le x\le 1, -2\le y\le 1, 0\le z\le 3.$

13.4.1.8 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6z-4x+4z\right)dxdydz,\quad \Omega: -3\le x\le 3, x^2-1\le y\le 1, -2\le z\le 2.$

13.4.1.9 $\iiint\limits_{\Omega}\left(9x^2-12y^2+9z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -1\le x\le 0, 0\le y\le 1, 0\le z\le 2.$

13.4.1.10 $\iiint\limits_{\Omega}\left(8x-6xz+6yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -1\le x\le 3, -1\le y\le 0, 0\le z\le 4.$

13.4.1.11 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3zx^2-4xy^2+3yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 1, -1\le y\le 0, 0\le z\le 5.$

13.4.1.12 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18y^2-48x+48yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 4, 2\le y\le 3, -1\le z\le 4.$

13.4.1.13 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3x-5y+4z\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 2, -2\le y\le 2-x, 0\le z\le 4.$

13.4.1.14 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18yx^2-2x+4yz\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, -1\le z\le 5.$

13.4.1.15 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6xy^2-3x^2+36yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -1\le x\le 1, -1\le y\le 0, 0\le z\le 3.$

13.4.1.16 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18x^2-4xy^2+3yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 3, 0\le y\le 3, 1\le z\le 2.$

13.4.1.17 $\iiint\limits_{\Omega}\left(8z-4xy+6y^2z\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 4, 1\le y\le 3, 0\le z\le 2.$

13.4.1.18 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2-24xzy+z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -2\le x\le 1, 1\le y\le 4, 0\le z\le 2.$

13.4.1.19 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6x^2-6xy+48xyz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -3\le x\le 1, -1\le y\le 1, 1\le z\le 4.$

13.4.1.20 $\iiint\limits_{\Omega}\left(9x^2y^2-6xy^2+3z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 1, -2\le y\le 22, 0\le z\le 3.$

13.4.1.21 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6z-24y^3+18y^2z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0\le x\le 5, 0\le y\le 5, 0\le z\le 3.$

13.4.1.22 $\iiint\limits_{\Omega}\left(9y^2-9x^2+6xz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -1\le x\le 0, 0\le y\le 1, -2\le z\le 2.$

13.4.1.23 $\iiint\limits_{\Omega}\left(zx^2 - xyz\right)dxdydz,\quad \Omega: -1 \le x \le 3, -1 \le y \le 1, -2 \le z \le 4.$

13.4.1.24 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2 - 9y^2 + 6z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -2 \le x \le 0, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2.$

13.4.1.25 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2x - 6yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -2 \le x \le 1, -2 \le y \le 0, -2 \le z \le 3.$

13.4.1.26 $\iiint\limits_{\Omega}\left(4zx - 4xy + 4z\right)dxdydz,\quad \Omega: 0 \le x \le 5, -3 \le y \le 1, 0 \le z \le 2.$

13.4.1.27 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2x - 8xyz + 6yz^2\right)dxdydz,\quad \Omega: 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 2 \le z \le 3.$

13.4.1.28 $\iiint\limits_{\Omega}\left(2x - 3y + 4z\right)dxdydz,\quad \Omega: 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 3.$

13.4.1.29 $\iiint\limits_{\Omega}\left(8yx - 4xz + 24yz\right)dxdydz,\quad \Omega: -2 \le x \le 0, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 1.$

13.4.1.30 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2 - 8xyz + 3z^2\right)dxdydz,\quad \Omega: -2 \le x \le 2, -4 \le y \le 0, 0 \le z \le 1.$

13.4.2 Вычислить тройной интеграл. Начертить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy.

13.4.2.1 $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,\quad \Omega: z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 3, y \le \sqrt{3}\cdot x, y \ge 0, x \ge 0.$

13.4.2.2 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ y \le -x, y \le x, y \le 0, z \ge 0.$

13.4.2.3 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{z}\,dxdydz,\quad \Omega: z = 1, z = 4, 1 \le x^2 + y^2 \le 9, y \ge x, y \ge 0, x \ge 0.$

13.4.2.4 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ y \ge -x, y \ge 0, z \ge 0.$

13.4.2.5 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz,\quad \Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \ge 0, x \le 0.$

13.4.2.6 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \Omega: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \le -x, x \le 0, z \ge 0.$

13.4.2.7 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{yzdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad \Omega: z = 4x^2 + 4y^2, z = 16, y \le -\sqrt{3}\cdot x, y \ge 0, x \le 0.$

13.4.2.8 $\iiint\limits_{\Omega} x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz,\quad \Omega: 16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25, y \le x, x \ge 0, z \le 0.$

13.4.2.9 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{xydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad \Omega: z = 9x^2 + 9y^2, z = 81, y \ge x, y \le 0, x \le 0.$

13.4.2.10 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz, \Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, y \le \frac{x}{\sqrt{3}}, y \ge 0, x \ge 0, z \le 0.$

13.4.2.11 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xdxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}, \quad \Omega: z+x=6,\, x^2+y^2=6x,\; z\ge 0,\, y\le 0.$

13.4.2.12 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \Omega: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9, y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y\ge 0, x\ge 0, z\le 0.$

13.4.2.13 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{ydxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}, \quad \Omega: z+y=8,\, x^2+y^2=8y,\; z\ge 0,\, x\le 0.$

13.4.2.14 $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=1,\, z^2=x^2+y^2,\, x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0.$

13.4.2.15 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz, \quad \Omega: z+x=10,\, x^2+y^2=10x,\; z\ge 0,\, y\le 0.$

13.4.2.16 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=50,\, z^2=x^2+y^2,\, x\le 0,\, y\le 0,\, z\le 0.$

13.4.2.17 $\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz, \quad \Omega: z=-\sqrt{x^2+y^2},\, z=-\sqrt{1-x^2-y^2},\, y\le \sqrt{3}\cdot x,\, y\le 0,\, x\le 0.$

13.4.2.18 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=98,\, z=-\sqrt{x^2+y^2},\, x\le 0,\, y\le 0.$

13.4.2.19 $\iiint\limits_{\Omega} 3xyz^2dxdydz, \quad \Omega: -2\le z\le 2,\, 25\le x^2+y^2\le 36,\, y\le -x,\, y\le 0,\, x\ge 0.$

13.4.2.20 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}, \quad \Omega: 49\le x^2+y^2+z^2\le 64,\, y\le -x,\, y\ge 0,\, x\le 0,\, z\ge 0.$

13.4.2.21 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xdxdydz}{x^2+y^2}, \quad \Omega: z=x^2+y^2,\, z=8-x^2-y^2,\, y\ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\, y\le 0,\, x\ge 0.$

13.4.2.22 $\iiint\limits_{\Omega} 4xydxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=32, z^2=x^2+y^2, x\le 0, y\ge 0, z\le 0.$

13.4.2.23 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{ydxdydz}{x^2+y^2}, \quad \Omega: z=x^2+y^2-50,\, z=-x^2-y^2,\, y\le \sqrt{3}x,\, y\ge -\sqrt{3}x,\, x\ge 0.$

13.4.2.24 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \Omega: 64\le x^2+y^2+z^2\le 81,\, y\ge x,\, y\le 0,\, x\le 0,\, z\ge 0.$

13.4.2.25 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Omega: z=-x^2-y^2,\, z=-1,\, y\ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\, y\ge \frac{x}{\sqrt{3}},\, y\ge 0.$

13.4.2.26 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z^2dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \Omega: 81\le x^2+y^2+z^2\le 100, y\le x,\, y\le 0,\, x\le 0,\, z\le 0.$

13.4.2.27 $\iiint\limits_{\Omega} 5xyz^4dxdydz, \quad \Omega: -3\le z\le -1,\, 36\le x^2+y^2\le 49,\, y\le -x,\, y\ge x,\, x\le 0.$

13.4.2.28 $\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=72,\, z=\sqrt{x^2+y^2},\, x\le 0,\, y\le 0.$

13.4.2.29 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz,\quad \Omega: z=-2\sqrt{x^2+y^2},\ z=-2\sqrt{8-x^2-y^2},\ y\le -x,\ y\le x,\ y\le 0.$

13.4.2.30 $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=8, z^2=x^2+y^2, x\ge 0, y\le 0, z\le 0.$

14 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Содержание: геометрические и механические приложения двойного интеграла, геометрические и механические приложения тройного интеграла.

14.1 Теоретический материал по теме практического занятия

14.1.1 Механико-геометрические приложения двойного интеграла

Площадь плоской фигуры: $S=\iint\limits_{G} dxdy$.

Объём цилиндроида: $V=\iint\limits_{G} f(x;y)dxdy$.

Площадь поверхности: $S=\iint\limits_{G}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$.

Масса плоской пластины с плотностью $\mu(x;y)$: $m=\iint\limits_{G}\mu(x;y)dxdy$.

Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x=\iint\limits_{G} y\mu(x;y)dxdy,\ M_y=\iint\limits_{G} x\mu(x;y)dxdy.$$

Координаты центра масс пластины:

$$x_c=M_y/m,\ y_c=M_x/m.$$

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x=\iint\limits_{G} y^2\mu(x;y)dxdy,\ I_y=\iint\limits_{G} x^2\mu(x;y)dxdy,\ I_0=\iint\limits_{G}\left(x^2+y^2\right)\mu(x;y)dxdy.$$

14.1.2 Механико-геометрические приложения тройного интеграла

Объём тела: $V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$.

Масса тела с плотностью $\mu(x;y;z)$: $m=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x;y;z)dxdydz$.

Координаты центра масс тела: $x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}x\mu(x;y;z)dxdydz$,

$y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}y\mu(x;y;z)dxdydz$, $z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}z\mu(x;y;z)dxdydz$.

Моменты инерции относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{Oxy}=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mu(x;y;z)dxdydz;\qquad I_{Oxz}=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mu(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_{Oyz}=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mu(x;y;z)dxdydz;\qquad I_x=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\mu(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\mu(x;y;z)dxdydz;\qquad I_z=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mu(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_0=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mu(x;y;z)dxdydz.$$

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, которая ограничена линиями, заданными в декартовой системе координат: $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$ и $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Сделать чертеж области, ограниченной заданными линиями.

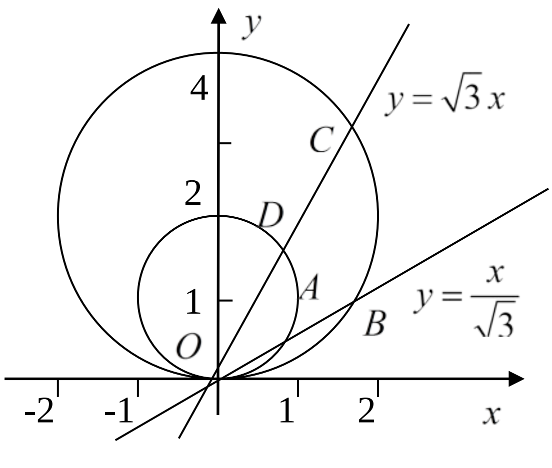


Рисунок 14.2.1 – Окружности

Решение. После выделения полного квадрата, относительно переменной y, уравнение $y^2-2y+x^2=0$ принимает вид $x^2+(y-1)^2=1$, которое задает окружность с центром в точке $C_1(0;1)$ и радиусом $R_1=1$. Аналогично уравнение $y^2-4y+x^2=0$ преобразовывается к виду $x^2+(y-2)^2=4$ – окружность с центром в точке $C_2(0;2)$ и радиусом $R_2=2$. Уравнения $y=\sqrt{3}x$ и $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ задают прямые, проходящие через начало координат. Изобразим фигуру G, которая ограничена заданными кривыми, в декартовой системе координат (на рис. 14.2.1 область G представляет собой фигуру $ABCD$).

Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Тогда уравнения окружностей принимают вид $r = 2\sin\varphi$ и $r = 4\sin\varphi$, а уравнения прямых $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}$ или $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Вычислим площадь фигуры, заданной в полярной системе координат. Вычисление двойного интеграла проведем путем перехода к повторному интегрированию.

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right) d\varphi = 6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 3\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

14.2.2 Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела Т1, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 3y^2$, $y = x$, $y = 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость Oxy.

Решение. Данное тело Т1 ограничено эллиптическим параболоидом $z = x^2 + 3y^2$ и плоскостями $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$. На рисунке 14.2.2 изображено заданное тело, ограниченное указанными поверхностям (область *$OABCD$ пространства $Oxyz$*), и его проекция на плоскость Oxy (область *OAB плоскости Oxy*). Найдём объем заданного тела с помощью двойного интеграла.

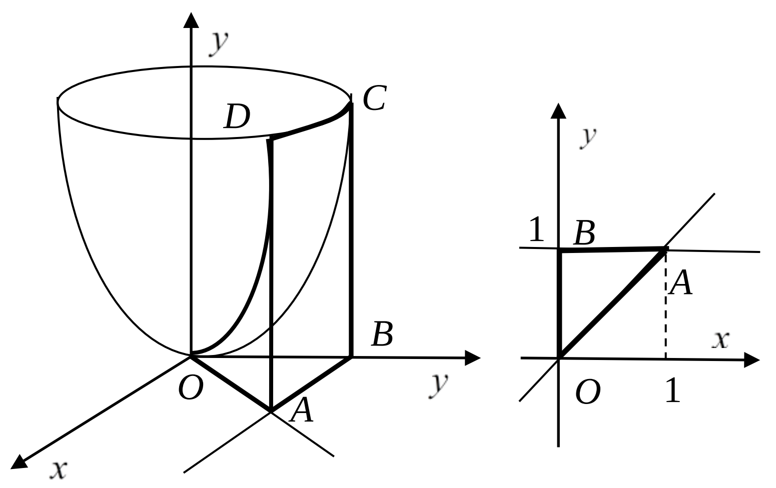


Рисунок 14.2.2 – Тело Т1 и его проекция на плоскость

$$V=\iint_G\left(x^2+3y^2\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1\left(x^2+3y^2\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+y^3\right)\Big|_x^1 dx=\int_0^1\left(x^2+1-x^3-x^3\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+1-2x^3\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}-0=\frac{5}{6}.$$

14.2.3 Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела Т2, ограниченного поверхностями $z=x^2,\ y=x,\ y=2,\ z\geq 0$. Выполнить чертёж тела Т2.

Решение. Данное тело Т2 ограничено параболическим цилиндром $z=x^2$ и плоскостями $y=x$, $y=2$, $z=0$. На рисунке 14.2.3 изображено заданное тело, ограниченное указанными поверхностям (область *OABC пространства* $Oxyz$), и его проекция на плоскость Oxy (область *OAB плоскости* Oxy).

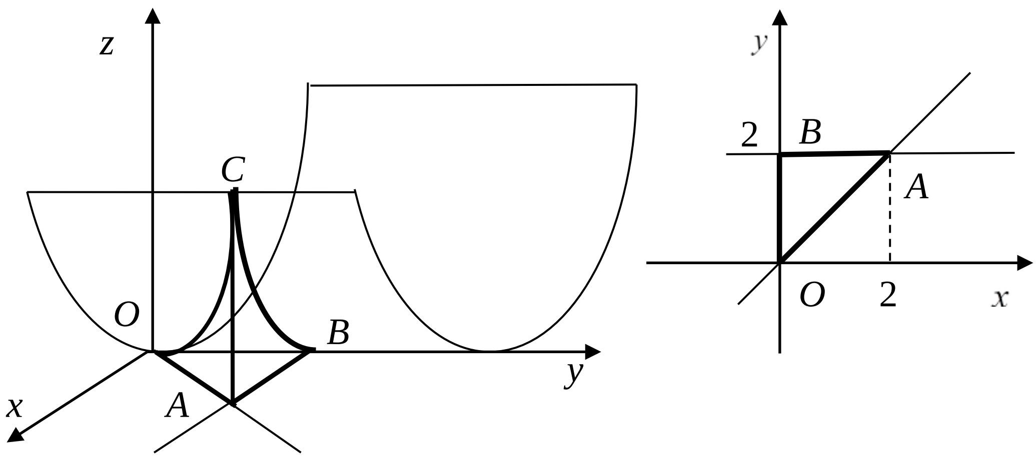


Рисунок 14.2.3 – Тело Т2 и его проекция на плоскость

Найдём объем заданного тела с помощью тройного интеграла.

$$V=\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^2 dx\int_x^2 dy\int_0^{x^2} dz=\int_0^2 dx\int_x^2 z\Big|_0^{x^2} dy=\int_0^2 dx\int_x^2 x^2dy=\int_0^2 x^2y\Big|_x^2 dx=$$

$$=\int_0^2\left(2x^2-x^3\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}.$$

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

14.3.1.1 $y=x$, $y=x^2$.

14.3.1.2 $y=x^2+1$, $x-y+3=0$.

14.3.1.3 $y=x^2+4x$, $y=x+4$.

14.3.1.4 $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$.

14.3.1.5 $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$.

14.3.1.6 $xy=1$, $y=x^2$, $y=2$, $y=1$.

14.3.1.7 $r = 5\sin 2\varphi$. **14.3.1.8** $r = 6(1+\cos\varphi)$.

14.3.1.9 $\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(4x^2+y^2\right)$. **14.3.1.10** $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4x^4$.

14.3.2 С помощью двойного интеграла вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями.

14.3.2.1 $z = x,\ y = 4,\ x = \sqrt{25-y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

14.3.2.2 $z = 2-y,\ y = x^2,\ z = 0$.

14.3.2.3 $z = 1+x^2+y^2,\ x = 4,\ y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

14.3.2.4 $z = x^2+y^2,\ y = 2x,\ y = 1,\ y = 6-x$.

14.3.2.5 $z = 10+x+y,\ x^2+y^2 = 4,\ z = 0$.

14.3.2.6 $z = 12-3x-4y,\ x^2/4+y^2 = 1,\ z = 0$.

14.3.3 Вычислить площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2 = 4x$.

14.3.4 Вычислить массу неоднородной пластины G, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = \mu(x;y)$.

14.3.4.1 $y^2 = x,\ y = x^2,\ \mu = 3-x-y$. **14.3.4.2** $y = \sqrt{x},\ y = x,\ \mu = 2x+2y$.

14.3.5 Вычислить статический момент однородной пластины, ограниченной линиями $x^2+y^2+4y = 0,\ y \le x,\ y \le -x$, относительно координатных осей.

14.3.6 Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ x = y^2$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = xy$.

14.3.7 Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ y = 1$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = x^2y$.

14.3.8 С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями.

14.3.8.1 $x = y^2,\ x+z = 1,\ z = 0$.

14.3.8.2 $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 2-x^2-y^2$.

14.3.8.3 $x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z^2 = x^2+y^2$.

14.3.8.4 $z = x^2,\ 2y+3x = 12,\ y = 0,\ z = 0$.

14.3.8.5 $z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 4x,\ x^2+y^2 = 6x,\ z = 0,\ y \ge 0$.

14.3.8.6 $z = 16-x-y,\ x^2+y^2 = 9,\ z = 1$.

14.3.9 Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x+y+z = 1$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 1/(1+x+y+z)^4$.

14.3.10 Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x = y^2+z^2,\ y^2+z^2 = 9,\ x = 0$.

14.3.11 Вычислить момент инерции относительно координатных осей, координатных плоскостей и начала координат однородного тела, ограниченного плоскостями $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если его поверхностная плотность $\mu=x$.

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры G, ограниченной указанными линиями. Изобразить в системе координат Oxy область интегрирования G.

14.4.1.1 $G:\ y=x^2,\ y=2-x^2$.

14.4.1.2 $G:\ y=x^2-1,\ y=1-x^2$.

14.4.1.3 $G:\ y=x^2+8x,\ y=-x^2$.

14.4.1.4 $G:\ y=\dfrac{3}{4-x^2},\ y=x^2$.

14.4.1.5 $G:\ y=5\big/\left(x^2-9\right),\ y=x^2-5$.

14.4.1.6 $G:\ y=\dfrac{3}{x^2-4},\ y=x^2-2$.

14.4.1.7 $G:\ y=\sqrt{x^3},\ y=3x$.

14.4.1.8 $G:\ y=-\sqrt{x^3},\ y=-x^3$.

14.4.1.9 $G:\ y=\sqrt{x^3},\ y=x^3$.

14.4.1.10 $G:\ y=\dfrac{10}{x^2},\ y=8-x^2$.

14.4.1.11 $G:\ y=\dfrac{8}{x^3},\ y=9-x^3$.

14.4.1.12 $G:\ y=\dfrac{4}{x^2},\ y=5-x^2$.

14.4.1.13 $G:\ y=x^2-6,\ y=-x$.

14.4.1.14 $G:\ y=x^2-x,\ y=4x$.

14.4.1.15 $G:\ y=x^2-x,\ y=2x+2$.

14.4.1.16 $G:\ y=x^2,\ y=8-x^2$.

14.4.1.17 $G:\ y=x^2-1,\ y=x-x^2$.

14.4.1.18 $G:\ y=x^2-4x,\ y=-x^2$.

14.4.1.19 $G:\ y=90\big/\left(x^2+1\right),\ y=x^2$.

14.4.1.20 $G:\ .\,y=\dfrac{32}{x^2+4},\ y=x^2$.

14.4.1.21 $G:\ y=2\big/\left(x^2+1\right),\ y=x^2$.

14.4.1.22 $G:\ y=\sqrt{x},\ y=x-2$.

14.4.1.23 $G:\ y=-\sqrt{x},\ y=-x^2$.

14.4.1.24 $G:\ y=\sqrt{x},\ y=x$.

14.4.1.25 $G:\ y=-\dfrac{2}{x},\ y=3+x$.

14.4.1.26 $G:\ y=\dfrac{6}{x},\ y+x=-5$.

14.4.1.27 $G:\ y=\dfrac{2}{x},\ y=3-x$.

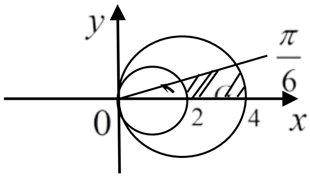
14.4.1.28 $G:\ y=x^2,\ y=2-x$.

14.4.1.29 $G:\ y=x^2+4x,\ y=x$.

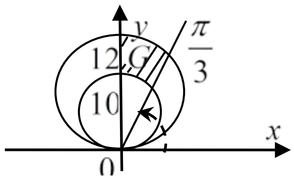
14.4.1.30 $G:\ y=x^2+4x,\ y=x$.

14.4.2 Вычислить площадь заштрихованной плоской фигуры G, ограниченной дугами окружностей со смещёнными центрами относительно начала координат и двумя лучами, выходящими из начала системы координат Oxy. Записать уравнения линий, которые ограничивают область G, в декартовой и полярной системе координат, если полюс лежит в начале координат Oxy, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс.

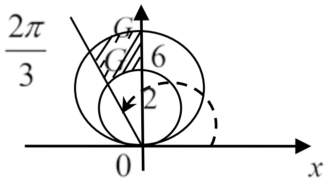
14.4.2.1



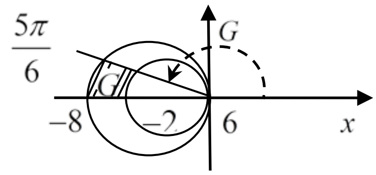
14.4.2.2



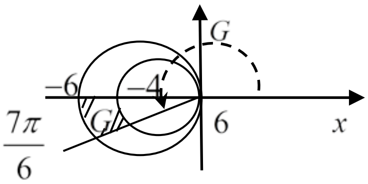
14.4.2.3



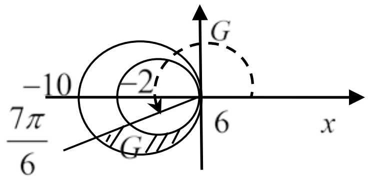
14.4.2.4



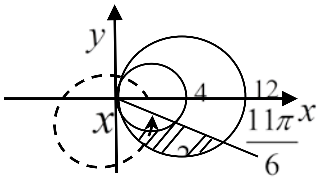
14.4.2.5



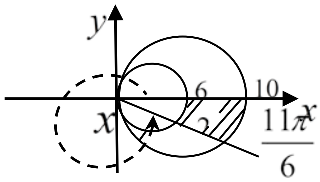
14.4.2.6



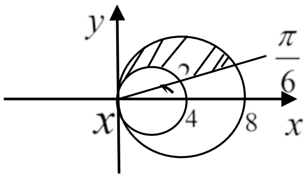
14.4.2.7



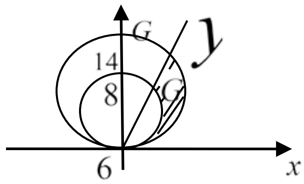
14.4.2.8



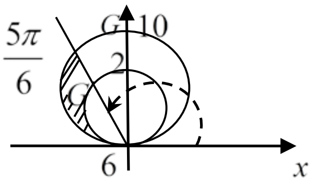
14.4.2.9



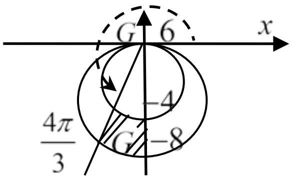
14.4.2.10



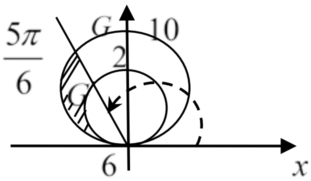
14.4.2.11



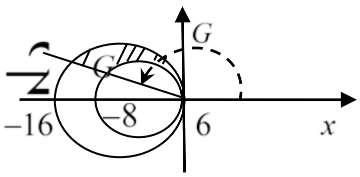
14.4.2.12



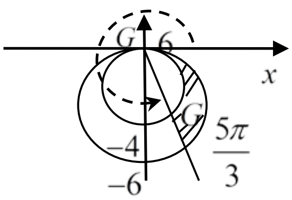
14.4.2.13



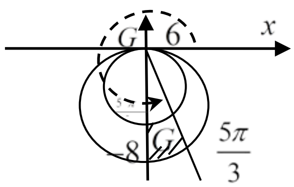
14.4.2.14

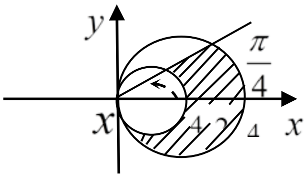


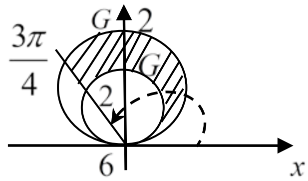
14.4.2.15

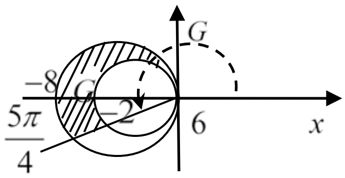


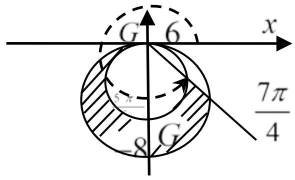
14.4.2.16

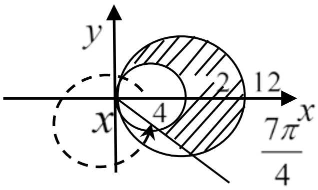


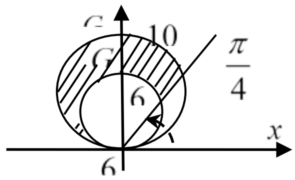
14.4.2.17 

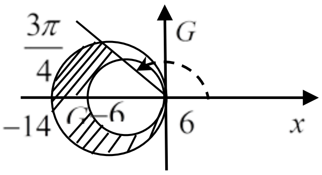
14.4.2.18 

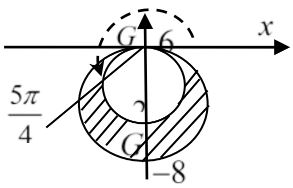
14.4.2.19 

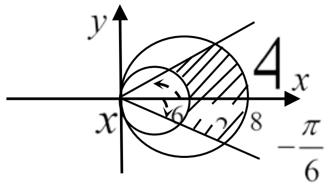
14.4.2.20 

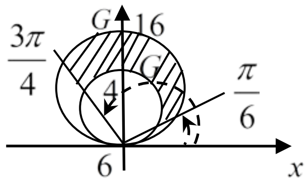
14.4.2.21 

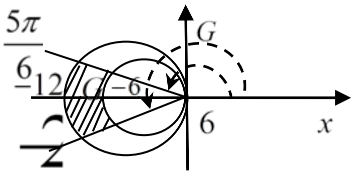
14.4.2.22 

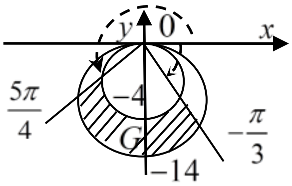
14.4.2.23 

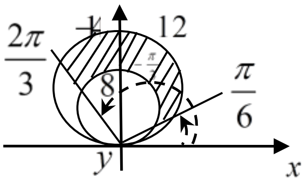
14.4.2.24 

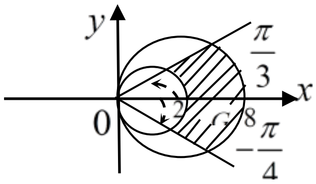
14.4.2.25 

14.4.2.26 

14.4.2.27 

14.4.2.28 

14.4.2.29 

14.4.2.30 

14.4.3 С помощью двойного интеграла вычислить объём тела Ω. Построить область Ω и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy.

14.4.3.1 $\Omega: z = x^2,\ x + y \le 1,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.3.2 $\Omega: z = y^2,\ x + 2y \le 4,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.3.3 $\Omega: z = x^2 + y^2,\ x + 4y \le 8,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.3.4 $\Omega: z=\sqrt{y},\ x+6y\le 12,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.5 $\Omega: z=\sqrt{x},\ x+7y\le 14,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.6 $\Omega: z=4-x^2-y^2,\ x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.7 $\Omega: z=2+x^2+y^2,\ x\le 2,\ y\le x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.8 $\Omega: z=5+x^2+y^2,\ x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.9 $\Omega: z=8-x^2-y^2,\ x\ge y,\ x\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.10 $\Omega: x=y^2,\ x=4,\ x+z=4, y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.11 $\Omega: y=x^2,\ y=16,\ y+z=16, x\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.12 $\Omega: x+y+z=2,\ y=x^2,\ z\ge 0.$

14.4.3.13 $\Omega: x+3y+z=6,\ x=3y^2,\ z\ge 0.$

14.4.3.14 $\Omega: z=x,\ y=x^3,\ y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.15 $\Omega: x+y+z=2,\ y\ge x^2,\ y\le x^3,\ z\ge 0.$

14.4.3.16 $\Omega: z=x^2,\ x+y\le 2,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.17 $\Omega: z=y^2,\ x+3y\le 6,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.18 $\Omega: z=x^2+y^2,\ x+5y\le 10,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.19 $\Omega: z=\sqrt{y},\ x+2y\le 4,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.20 $\Omega: z=\sqrt{x},\ x+4y\le 8,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$ $\Omega: z=\sqrt{x},\ x+4y\le 8,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.21 $\Omega: z=9-x^2-y^2,\ x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.22 $\Omega: z=16-x^2-y^2,\ y\ge x,\ y\le 4,\ x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.23 $\Omega: z=25-x^2-y^2,\ y\ge x,\ y\le 5,\ x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.24 $\Omega: z=36-x^2-y^2,\ y\ge x,\ y\le 6,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0.$

14.4.3.25 $\Omega: x=y^2,\ x=9,\ x+z=9, y\le 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.26 $\Omega: y=x^2,\ y=25,\ y+z=25, x\le 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.27 $\Omega: 4x+y+z=6,\ y=2x^2,\ z\ge 0.$

14.4.3.28 $\Omega: x+8y+z=12,\ x=4y^2,\ z\ge 0.$

14.4.3.29 $\Omega: z=y,\ x=y^3,\ x=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.3.30 $\Omega: x+y+z=3,\ 4y\ge x^2, 8y\le x^3,\ z\ge 0.$

14.4.4 С помощью тройного интеграла вычислить объём тела Ω. Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на соответствующую координатную плоскость.

14.4.4.1 $\Omega: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ z^2\ge 3x^2+3y^2,\ y\le x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

14.4.4.2 $\Omega: x=12\sqrt{y^2+z^2},\ x=26-\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2\le -4y,\ z\ge 0.$

14.4.4.3 $\Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ y^2 \ge 3x^2 + 3z^2,\ x \le z,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.4.4 $\Omega: y = -3x^2 - 3z^2,\ z = 3x^2 + 3z^2 - 54,\ x^2 + z^2 \le 6x,\ z \le 0.$

14.4.4.5 $\Omega: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,\ x^2 \ge 3y^2 + 3z^2,\ z \ge y,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.6 $\Omega: z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \le -4x,\ y \ge 0.$

14.4.4.7 $\Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z^2 \le 3x^2 + 3y^2,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.4.8 $\Omega: z = -x^2 - y^2,\ z = x^2 + y^2 - 18,\ x^2 + y^2 \le 6y,\ x \le 0.$

14.4.4.9 $\Omega: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ z^2 \le 3x^2 + 3y^2,\ y \ge -x,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

14.4.4.10 $\Omega: x = -6\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 6\sqrt{y^2 + z^2} - 72,\ y^2 + z^2 \le 12z,\ y \ge 0.$

14.4.4.11 $\Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y^2 \le 3x^2 + 3z^2,\ x \ge z,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

14.4.4.12 $\Omega: y = -5x^2 - 5z^2,\ z = 5x^2 + 5z^2 - 250,\ x^2 + z^2 \le -10x,\ z \ge 0.$

14.4.4.13 $\Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ x^2 \le 3y^2 + 3z^2,\ z \le y,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.14 $\Omega: z = -3\sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2} - 12,\ x^2 + y^2 \le -6y,\ x \ge 0.$

14.4.4.15 $\Omega: 16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25,\ z^2 \ge 3x^2 + 3y^2,\ y \le -x,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

14.4.4.16 $\Omega: z = x^2 + y^2,\ z = 32 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le -8x,\ y \le 0.$

14.4.4.17 $\Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25,\ y^2 \le 3x^2 + 3z^2,\ x \ge -z,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.18 $\Omega: x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2},\ y^2 + z^2 \le 2y,\ z \le 0.$

14.4.4.19 $\Omega: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,\ x^2 \le 3y^2 + 3z^2,\ z \le -y,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

14.4.4.20 $\Omega: y = 4x^2 + 4z^2,\ z = 128 - 4x^2 - 4z^2,\ x^2 + z^2 \le -8z,\ x \le 0.$

14.4.4.21 $\Omega: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ z^2 \ge 3x^2 + 3y^2,\ y \ge x,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

14.4.4.22 $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \le 2x,\ y \le 0.$

14.4.4.23 $\Omega: 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,\ z^2 \le 3x^2 + 3y^2,\ y \le x,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

14.4.4.24 $\Omega: z = x^2 + y^2,\ z = 8 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 4x,\ y \ge 0.$

14.4.4.25 $\Omega: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ y^2 \ge 3x^2 + 3z^2,\ x \le -z,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.26 $\Omega: y = 2x^2 + 2z^2,\ z = 16 - 2x^2 - 2z^2,\ x^2 + z^2 \le 4z,\ x \ge 0.$

14.4.4.27 $\Omega: 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ z^2 \le 3x^2 + 3y^2,\ y \le -x,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.28 $\Omega: z = -4\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 8\sqrt{x^2 + y^2} - 72,\ x^2 + y^2 \le 12y,\ x \ge 0.$

14.4.4.29 $\Omega: 64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,\ z^2 \ge 3x^2 + 3y^2,\ y \ge -x,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

14.4.4.30 $\Omega: z = -x^2 - y^2,\ z = x^2 + y^2 - 50,\ x^2 + y^2 \le -10y,\ x \ge 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич, Л. А. Математический анализ. Последовательности, функции, интегралы. Практикум : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. – Минск : Вышэйшая школа, 2021. – 471 с.

2. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие: в 4 ч. Ч. 3 / Н. С. Березкина, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики, Кафедра фундаментальной и прикладной математики ; под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – 371 с.

3. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие: в 4 ч. Ч. 4 / Н. С. Березкина, С. А. Минюк, Е. А. Наумович, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики. – Минск : РИВШ, 2020. – 357 с.

4. Жевняк, Р. М., Карпук А. А. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 2. – 221 с.

5. Жевняк, Р. М., Карпук А. А. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 4. – 221 с.

6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для вузов : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Высшая школа, 1981. – Т. 2. – 584 с.

7. Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 98 с.

8. Математика. Кратные интегралы. Элементы теории поля. Ряды : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2021. – 107 с.

9. Ровба, Е. А. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 ч. / Е. А. Ровба, Н. С. Березкина ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы : под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – Ч. 2. – 386 с.

10. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие: в 4-х частях. Ч. 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 396 с.

11. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие: в 4-х ч. Ч. 3 : Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 367 с.

Приложение А

Таблица А1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C'=0$, где $C=Const$;	2)	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, где $a>0,\ a\neq 1$;	4)	$(e^x)'=e^x$
5)	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$, $a>0,\ a\neq 1,\ x>0$;	6)	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, где $x>0$;
7)	$(\sin x)'=\cos x$;	8)	$(\cos x)'=-\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi k,\ k\in Z$;
11)	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x\rvert<1$;	12)	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x\rvert<1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, где $x\neq 0$.

Таблица А2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$;	2)	$\int\dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$;
3)	$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $a>0,\ \ a\neq 1,\ x>0$;	4)	$\int e^x dx=e^x+C$;
5)	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$;	6)	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$;
7)	$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$;	8)	$\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$;
9)	$\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert+C$;	10)	$\int\dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$;
11)	$\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C\ \ a\neq 0$;	12)	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C,\ \lvert x\rvert<\lvert a\rvert$;
13)	$\int\dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert+C$;	14)	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$;
15)	$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$;	16)	$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$;
17)	$\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C$;	18)	$\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C$, где $x\neq 0$.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практикум

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович

Редактор *Р.А. Никифорова*
Корректор *А.С. Прокопюк*
Компьютерная верстка *А.В. Коваленко*

Подписано к печати 27.11.2024. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Усл. печ. листов 6,9.
Уч.-изд. листов 8,3. Тираж 80. Заказ 246.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.