

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

**Высшая математика (Математика).**  
**Предел и непрерывность функций. Дифференциальное**  
**исчисление функции одной переменной. Интегральное**  
**исчисление функции одной переменной.**

Практикум для студентов первого курса специальностей  
6-05-0723-02 «Технологии и проектирование одежды и обуви»,  
6-05-0723-01 «Технологии и проектирование текстильных изделий»,  
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»

Витебск  
2024

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

**Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник**

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии»  
УО «ВГТУ», протокол № 10 от 17.05.2024.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским  
советом УО «ВГТУ», протокол № 9 от 30.05.2024.

**Высшая математика (Математика). Предел и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Интегральное исчисление функции одной переменной :** практикум для студентов / сост. Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник. – Витебск : УО «ВГТУ», 2024. – 73 с.

Издание содержит методические материалы по темам «Предел и непрерывность функций», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Интегральное исчисление функции одной переменной» дисциплин «Высшая математика» и «Математика» и предназначено для студентов первого курса специальностей 6-05-0723-02 «Технологии и проектирование одежды и обуви», 6-05-0723-01 «Технологии и проектирование текстильных изделий», 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества». В каждом разделе практикума приведены краткие теоретические сведения, подробно разобранные практические примеры, приведены задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Практикум предназначен для эффективной подготовки студентов к практическим занятиям, к промежуточному контролю знаний и экзамену.

**УДК 517 (076.1) (075.8)**

© УО «ВГТУ», 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ.....                                                                    | 4  |
| 1.1 Предел функции .....                                                                                 | 4  |
| 1.2 Первый и второй замечательные пределы.....                                                           | 11 |
| 1.3 Односторонние пределы. Непрерывность и точки разрыва функции .....                                   | 13 |
| 1.4 Асимптоты графика функции .....                                                                      | 16 |
| 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....                                              | 19 |
| 2.1 Определение производной. Основные правила и формулы дифференцирования.....                           | 19 |
| 2.2 Дифференциал функции. Производные высших порядков .....                                              | 24 |
| 2.3 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование ..... | 26 |
| 2.4 Правило Лопиталю .....                                                                               | 30 |
| 2.5 Исследование функции на монотонность и экстремум .....                                               | 31 |
| 2.6 Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке .....                                            | 34 |
| 2.7 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции .....                                         | 35 |
| 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ....                                                 | 37 |
| 3.1 Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.....          | 37 |
| 3.2 Интегрирование методом поднесения под знак дифференциала и замены переменной.....                    | 41 |
| 3.3 Интегрирование по частям .....                                                                       | 44 |
| 3.4 Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен .....                                       | 46 |
| 3.5 Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на простейшие дроби .....                 | 50 |
| 3.6 Интегрирование тригонометрических выражений.....                                                     | 55 |
| 3.7 Интегрирование иррациональных функций с помощью дробно-линейной подстановки.....                     | 59 |
| 3.8 Определенный интеграл, его свойства и вычисление .....                                               | 62 |
| 3.9 Геометрические приложения определенных интегралов .....                                              | 67 |
| Литература .....                                                                                         | 72 |

# 1 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

## 1.1 Предел функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

Число  $a$  называется **пределом функции**  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  или при  $x$  стремящемся к  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , зависящее от выбора  $\varepsilon$ , что для всех  $x$ , принадлежащих проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , все значения функции будут попадать в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

Используя логические символы, данное определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Функция  $y = f(x)$  называется **бесконечно большой** при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Функция  $y = f(x)$  называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

**Теорема 1.** Если  $y = f(x)$  – бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$  ( $f(x) \neq 0$ ), то  $1/f(x)$  – бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$  и наоборот:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Практическое вычисление пределов основывается на следующей теореме.

**Теорема 2.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют пределы в точке  $x_0$ , то есть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

В теореме 2 пункты 2) и 3) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Воспользовавшись теоремами 2, 1 и свойствами бесконечно малых и бесконечно больших функций, можно записать следующие равенства:

$$1) C \cdot 0 = 0; \quad 2) \frac{C}{0} = \infty \quad (C \neq 0); \quad 3) C \pm 0 = C; \quad 4) \frac{0}{C} = 0 \quad (C \neq 0);$$

$$5) \frac{C}{\infty} = 0; \quad 6) \frac{\infty}{C} = \infty \quad (C \neq 0); \quad 7) C \pm \infty = \infty; \quad 8) \infty + \infty = \infty;$$

$$9) 0^n = 0; \quad 10) C \cdot \infty = \infty, \quad (C \neq 0); \quad 11) \infty^n = \infty,$$

где  $C$  – const,  $n$  – натуральное конечное число, а символы 0 и  $\infty$  следует понимать как неограниченно близкое приближение к нулю и удаление в бесконечность соответственно.

При нахождении предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

когда  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно малые функции (бесконечно большие функции) при  $x \rightarrow x_0$  принято говорить, что отношение  $f(x)/g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  представляет собой **неопределенность вида**  $0/0$  ( $\infty/\infty$ ). Аналогично вводятся неопределенности вида

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0,$$

которые встречаются при нахождении соответственно пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}.$$

Отыскание предела в таких случаях называют **раскрытием неопределенностей**.

Кроме того, будем пользоваться тем фактом, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0),$$

которое можно понимать так: вычисление любого предела нужно начинать с непосредственной подстановки предельного значения, и, если нет неопределенностей, то записать ответ.

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ +\infty, & a > 1, \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

**Пример 1.** Найти пределы функций:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{6x^2 + x + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 3x^4 - x + 2}{7x^6 + 2x^3 - 3x^2 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 - 5}{x^2 + 4x + 9}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 7x} - 2x}.$$

**Решение.** Непосредственная подстановка в исходные выражения предельного значения аргумента приводит во всех случаях к неопределенности вида  $\infty/\infty$ , для раскрытия которой разделим числитель и знаменатель дроби на  $x$  в старшей степени.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{6x^2 + x + 4} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x^2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}{6 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \\ &= \frac{1 + \frac{7}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{6 + \frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0 - 0}{6 + 0 + 0} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 3x^4 - x + 2}{7x^6 + 2x^3 - 3x^2 - 1} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x^6}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^5}{x^6} + \frac{3x^4}{x^6} - \frac{x}{x^6} + \frac{2}{x^6}}{\frac{7x^6}{x^6} + \frac{2x^3}{x^6} - \frac{3x^2}{x^6} - \frac{1}{x^6}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^6}}{7 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^6}} = \frac{\frac{4}{\infty} + \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{7 + \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 0 - 0 + 0}{7 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{7} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 - 5}{x^2 + 4x + 9} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x^3}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{9}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3}} = \\ &= \frac{2 - \frac{1}{\infty} - \frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty} + \frac{9}{\infty}} = \frac{2 - 0 - 0}{0 + 0 + 0} = \frac{2}{0} = \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 7x} - 2x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3 + 7x}}{x} - \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3 + 7x}}{\sqrt[4]{x^4}} - 2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3+7x}{x^4}} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3}{x^4} + \frac{7x}{x^4}} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} - 2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{\infty}} + \frac{1}{\infty}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\infty} + \frac{7}{\infty}} - 2} = \\
&= \frac{\sqrt{1+0} + 0}{\sqrt[4]{0+0} - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти пределы функций:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 2}{x^3 - 4x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x+5} - 2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x-5} - 2}$ .

**Решение.** Непосредственная подстановка в данные выражения предельных значений аргумента приводит во всех случаях к неопределенности вида  $0/0$ , для раскрытия которой надо в числителе и знаменателе получить множитель  $(x - x_0)$ , где  $x_0$  – предельное значение, чтобы впоследствии этот множитель сократить.

а) В числителе и знаменателе надо получить множитель  $(x - 1)$ . Чтобы получить этот множитель в числителе, можно, например, воспользоваться формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Имеем:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ,  $D = 16 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

В знаменателе воспользуемся формулой сокращенного умножения:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тогда:  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ .

Таким образом, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3};$$

б) В числителе и знаменателе надо получить множитель  $(x + 2)$ .

Многочлен в числителе  $x^3 - x^2 - 5x + 2$  при  $x = -2$  обращается в нуль, следовательно, делится без остатка на  $(x + 2)$ . Тогда:

$$x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(x^2 - 3x + 1).$$

В последнем равенстве множитель  $(x^2 - 3x + 1)$  получен делением многочлена  $(x^3 - x^2 - 5x + 2)$  на  $(x + 2)$  «уголком».

В знаменателе вынесем общий множитель  $x$  за скобку, затем к выражению в скобке применим формулу сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Тогда:  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$ .

Таким образом, получим:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 2}{x^3 - 4x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 3x + 1)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-2)} = \frac{11}{8};$$

в) В числителе и знаменателе надо получить множитель  $(x+1)$ . Для этого умножим числитель, а, значит, и знаменатель (для сохранения знака равенства) на выражение, сопряженное к знаменателю, то есть на  $\sqrt{x+5} + 2$ .

В числителе же многочлен  $2x^2 + 3x + 1$  при  $x = -1$  обращается в нуль, следовательно, делится без остатка на  $x+1$ . Тогда

$$2x^2 + 3x + 1 = (x+1)(2x+1).$$

Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x+5} - 2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}{(\sqrt{x+5})^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}{x+5-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x+1)(\sqrt{x+5} + 2) = -4; \end{aligned}$$

г) В числителе и знаменателе надо получить множитель  $(x-3)$ . Для этого умножим числитель и знаменатель на выражения, к ним сопряженные.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x-5} - 2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - \sqrt{2x+3})(3 + \sqrt{2x+3})(\sqrt{3x-5} + 2)}{(\sqrt{3x-5} - 2)(\sqrt{3x-5} + 2)(3 + \sqrt{2x+3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(9 - (\sqrt{2x+3})^2)(\sqrt{3x-5} + 2)}{((\sqrt{3x-5})^2 - 4)(3 + \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(9 - 2x - 3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(3x - 5 - 4)(3 + \sqrt{2x+3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6 - 2x)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(3x - 9)(3 + \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(x-3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3(x-3)(3 + \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(\sqrt{3x-5} + 2)}{3(3 + \sqrt{2x+3})} = \\ &= \frac{-8}{18} = -\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{2x-7} \right)^{5x+1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{6x-1}{4x+5} \right)^{3-7x}.$$

**Решение.** Воспользуемся пунктом 6) теоремы 2 и свойствами показательной функции.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{2x-7} \right)^{5x+1} = \left[ \left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)^{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{x}{2x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{2x} - \frac{7}{x}} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{7}{x}} \right)^{5x+1} =$$

$$= \left( \frac{1 + \frac{3}{+\infty}}{2 - \frac{7}{+\infty}} \right)^{+\infty} = \left( \frac{1+0}{2-0} \right)^{+\infty} = \left( \frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{6x-1}{4x+5} \right)^{3-7x} &= \left[ \left( \frac{-\infty}{-\infty} \right)^{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\frac{6x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{5}{x}} \right)^{3-7x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{6 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{5}{x}} \right)^{3-7x} = \\ &= \left( \frac{6 - \frac{1}{-\infty}}{4 + \frac{5}{-\infty}} \right)^{+\infty} = \left( \frac{6-0}{4+0} \right)^{+\infty} = \left( \frac{6}{4} \right)^{+\infty} = \left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

В задачах 1–15 найти указанные пределы.

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3 + 7x^2 + 4}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{6x^4 + x^3 - 3x - 1}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 2x^4 - x + 3}{9x^3 - 5x - 4}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{x^2 + 5x - 24}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x^3 - 64}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 10x + 9}{2 - \sqrt{2x + 6}}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x + 6} - 4}{3 - \sqrt{2x - 1}}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x - 2}{2x + 4} \right)^{5x+1}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{7x - 1}{8x - 2} \right)^{5-2x}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 - 5}}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^4 (x + 3)^2}{x^6 + 7x^5 + 2}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 3} - 1}{\sqrt{9x^2 - 1}}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 3}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ .

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти пределы.

- 1.1 а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 2}{3x^4 + 2x - 8}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 2x - 1}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 9}{x^3 - 9x}$ ;
- г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8x + 9} - 3}{x^3 + 6x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 5}}{\sqrt{x + 6} - 2}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 7}{8x - 1} \right)^{7-3x}$ .
- 1.2 а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 2x - 7}{x^3 + 3x^2 + 4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 3x^2 - 7x - 15}{x^2 - 5x}$ ;
- г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x + 5} - 3}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 16} - 4}{\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x}}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{9x - 2}{5x + 3} \right)^{2x+1}$ .

|                                                                                |                                                                               |                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1.3 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 9x^2 - 3}{8x^3 + 3x + 10};$    | б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x - 1};$                   | в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8};$          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x} - 2}{2x^2 - 10x};$                 | д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{14-x} - \sqrt{x+6}};$ | е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x-5}{2x+3} \right)^{4x+7}.$ |
| 1.4 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^3 - 6x + 5};$      | б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 12};$              | в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 3x^2 - 10x + 3}{x^3 - 27};$        |
| г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2};$              | д) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x+2} - 4}{\sqrt{3x+4} - 5};$          | е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x-3}{4x-1} \right)^{1-2x}.$ |
| 1.5 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 9}{x^5 - 7x^4 + x};$   | б) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 13x - 7}{3x^2 + 22x + 7};$           | в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 11x - 2}{x^4 - 8x};$         |
| г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 2x - 3};$              | д) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{14-x}}{\sqrt{x-1} - 2};$  | е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{10x+1}{7x-5} \right)^{4-x}.$ |
| 1.6 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 2x}{8x^3 + 3x + 7}.$     | б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 6x + 8};$              | в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9};$          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 - 3x}{\sqrt{9x+25} - 5};$                | д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5} - 2};$ | е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-6}{5x+8} \right)^{4x+1}.$  |
| 1.7 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^2 - 3}{7x^5 + 2x^3 + 4};$   | б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x^2 - 19x - 4}{x^2 - 4x};$                  | в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^3 + 1};$           |
| г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{x^2 - 3x - 10};$              | д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x-14} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} - 2};$ | е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{7x+2}{4x+1} \right)^{2-3x}.$ |
| 1.8 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 + 3x^2 - 4}{x^9 + 6x^5 + x};$   | б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 6x - 1}{x^2 - 4x + 3};$               | в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^3 + 8};$          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{10x^2 - 29x - 3}{\sqrt{2x+10} - 4};$          | д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{\sqrt{7x+9} - \sqrt{x+9}};$ | е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-4}{8x+9} \right)^{5x-7}.$  |
| 1.9 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4 + x + 1}{9x^4 + x^2 - 7};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 7x - 15}{x^2 - x - 20};$              | в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 5x^2 - 7x + 6}{x^3 - 36x};$         |
| г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{1-8x} - 3};$            | д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}};$  | е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{5x-2} \right)^{6x+7}.$ |
| 1.10 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 5x^3 - x}{x^4 + 9x^2 - 2};$  | б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{3x^2 - 20x - 7};$              | в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 7x^2 + x - 6}{x^4 - 8x};$          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x^2 - 1};$                   | д) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - 1}{4 - \sqrt{6-2x}};$          | е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x+2}{x+9} \right)^{x-8}.$   |

## 1.2 Первый и второй замечательные пределы

Пусть  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , а  $\beta(x)$  – бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty.$$

**Первым замечательным пределом** называют предел вида:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

который используют при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции в случае наличия неопределенности вида  $0/0$ .

**Вторым замечательным пределом** называется предел вида

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\alpha(x)} = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)} = e,$$

где  $e$  – иррациональное число, причем  $e \approx 2,72$ .

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенности вида  $1^\infty$ .

**Пример 1.** Найти пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+7}\right)^{9x-1}.$$

**Решение.**

а) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида  $0/0$ , для раскрытия которой воспользуемся формулами тригонометрии, теоремой 2 и первым замечательным пределом.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 3x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \frac{1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow}{1 - \cos 8x = 2 \sin^2 4x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 4x}{\sin^2 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \right)^2 = 2 \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} \right)^2 = 2 \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \left( \frac{4}{3} \right)^2 \cdot \left( \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{16}{9} \cdot \left( \frac{1}{1} \right)^2 = \frac{32}{9}; \end{aligned}$$

б) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида  $1^\infty$ , для раскрытия которой воспользуемся теоремой 2 и вторым замечательным пределом.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-3}{4x+7} \right)^{8x-1} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4x-3}{4x+7} - 1 \right)^{8x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4x-3-4x-7}{4x+7} \right)^{8x-1} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-11}{4x+7} \right)^{8x-1} = \left[ \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{4x+7}{-11}} \right)^{\frac{4x-7}{-11} \cdot \frac{-11}{4x-7} \cdot (8x-1)} = \\
& = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{4x+7}{-11}} \right)^{\frac{4x-7}{-11}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11 \cdot (8x-1)}{4x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-88x+11}{4x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-88+\frac{11}{x}}{4-\frac{7}{x}}} = e^{\frac{-88+\frac{11}{\infty}}{4-\frac{7}{\infty}}} = \\
& = e^{\frac{-88+0}{4-0}} = e^{\frac{-88}{4}} = e^{-22}.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

В задачах 1–9 найти указанные пределы.

$$\begin{aligned}
1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 8x}{\sin^2 2x}. & \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos^3 8x}{4x^2}. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin 2x}. \\
4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \cdot \sin 2x}{\sin^2 x}. & 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+2}{5x+6} \right)^{3-7x}. & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+9}{x+2} \right)^{8x+1}. \\
7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+7}{x^2-1} \right)^{x+1}. & 8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-2x}{x^2-4x+2} \right)^x. & 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2-2}{3x^2+1} \right)^{5x^2+4}.
\end{aligned}$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти указанные пределы.

$$\begin{aligned}
1.1 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+6}{x+4} \right)^{3x+2}. \\
1.2 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{\sin^2 2x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+2} \right)^{7x-5}. \\
1.3 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x \cdot \cos 6x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+2}{5x-3} \right)^{4-7x}. \\
1.4 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{\sin^2 4x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+7}{2x-1} \right)^{3x-2}. \\
1.5 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+5}{4x+7} \right)^{2-3x}.
\end{aligned}$$

$$1.6 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{8x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+8} \right)^{7x-5}.$$

$$1.7 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x + \sin 2x}{10x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-5}{3x+4} \right)^{9x+1}.$$

$$1.8 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x \cdot \cos 4x}{\sin 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+7}{6x-5} \right)^{4-5x}.$$

$$1.9 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x \cdot \cos 9x}{\sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-6}{x+3} \right)^{8x+5}.$$

$$1.10 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x+1}{9x+5} \right)^{3x+7}.$$

### 1.3 Односторонние пределы. Непрерывность и точки разрыва функции

В определении предела функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  считается, что  $x$  стремится к  $x_0$  любым способом: оставаясь меньшим, чем  $x_0$  (слева от  $x_0$ ), большим, чем  $x_0$  (справа от  $x_0$ ), или колеблясь около точки  $x_0$ .

Встречаются случаи, когда способ приближения аргумента к предельному значению существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят в рассмотрение следующие понятия.

Если  $x < x_0$  и  $x \rightarrow x_0$ , то пишут:  $x \rightarrow x_0 - 0$ ; аналогично, если  $x > x_0$  и  $x \rightarrow x_0$ , то пишут:  $x \rightarrow x_0 + 0$ . При этом числа

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

называются соответственно **пределом слева** функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и **пределом справа** функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если эти пределы существуют. Пределы слева и справа называются **односторонними**.

Для существования предела функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке  $x_0$  существовали и были равны.

Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной на интервале**  $(a; b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Свойства непрерывных функций.**

1. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

2. Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

3. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ .

Точку  $x_0$  называют **точкой разрыва** функции  $y = f(x)$ , если нарушено хотя бы одно из требований:

1) односторонние пределы  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$  существуют;

2)  $f(x_0 - 0) \neq \infty$  и  $f(x_0 + 0) \neq \infty$ , т. е. оба односторонних предела конечны;

3)  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Приведем **классификацию точек разрыва**.

Если нарушены условия 1) или 2), то есть если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка  $x_0$  называется **точкой разрыва второго рода**. При нарушении условия 3), то есть в случае, если оба односторонних предела конечны, но не равны, то точка  $x_0$  называется **точкой разрыва первого рода (точкой конечного скачка)**; **скачок** в этом случае вычисляют по формуле  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ . При нарушении условия 4), то есть когда оба односторонних предела конечны и равны друг другу, но не равны значению функции в этой точке (значение функции в этой точке может не существовать), то точка  $x_0$  называется **точкой устранимого разрыва**.

**Пример 1.** Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \leq 1, \\ \sqrt{x + 3}, & x > 1. \end{cases}$$

**Решение.** Функция  $y = f(x)$  непрерывна на интервалах  $(-\infty; 1)$  и  $(1; +\infty)$ , так как на каждом из этих интервалов формулы, задающие функцию, определяют элементарные непрерывные функции. Следовательно, если и существует точка разрыва, то она может быть лишь в точке  $x = 1$ , в которой меняется аналитическое выражение функции  $f(x)$ . Найдем односторонние пределы:

$$f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (5x - 1) = 4,$$

$$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x + 3} = 2.$$

Так как  $f(1-0)$  и  $f(1+0)$  конечны, причем  $f(1-0) \neq f(1+0)$ , то в точке  $x=1$  исходная функция имеет точку разрыва первого рода (точку конечного скачка); скачок функции равен  $f(1+0) - f(1-0) = 2 - 4 = -2$ .

**Пример 2.** Исследовать на непрерывность функцию:

$$f(x) = 2^{\frac{x+1}{x-5}} + 3.$$

**Решение.** Функция  $f(x)$  является элементарной, следовательно, непрерывной в каждой точке области определения, то есть при всех  $x \in (\infty; 5) \cup (5; +\infty)$  (свойство 1. непрерывных функций). Значит,  $x=5$  является точкой разрыва данной функции. Выясним характер разрыва, для чего найдем односторонние пределы в этой точке:

$$f(5-0) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \left( 2^{\frac{x+1}{x-5}} + 3 \right) = 2^{\frac{5-0+1}{5-0-5}} + 3 = 2^{\frac{6}{-0}} + 3 = 2^{-\infty} + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$f(5+0) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \left( 2^{\frac{x+1}{x-5}} + 3 \right) = 2^{\frac{5+0+1}{5+0-5}} + 3 = 2^{\frac{6}{+0}} + 3 = 2^{+\infty} + 3 = +\infty + 3 = +\infty.$$

Так как правосторонний предел в точке  $x=5$  равен бесконечности, то в данной точке функция терпит разрыв второго рода.

### Задания для решения на практическом занятии

В задачах 1-8 исследовать функцию на непрерывность. В случае наличия точек разрыва, указать их характер. В задачах 1-2 построить схематичный график функции.

$$1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x < 1, \\ 3-x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & 1 < x \leq 4, \\ 2x-1, & x > 4. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x < -1, \\ 2x^2, & x \geq -1. \end{cases}$$

$$4. f(x) = 7^{\frac{x}{4-x}} - 2.$$

$$5. f(x) = 3^{\frac{4}{x}} + \frac{3x+2}{2-x}.$$

$$6. f(x) = \frac{4^x}{x+3}.$$

$$7. f(x) = \frac{x+5}{6^x-1}.$$

$$8. f(x) = \frac{1}{5+3^{1/(x+2)}}.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать указанные функции на непрерывность. В случае наличия точек разрыва, определить их характер. В пункте а) построить схематичный график функции.

$$1.1 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1, \\ x^2 + 2, & x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 3^{\frac{2x+3}{x+4}} - x.$$

$$1.2 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 0, \\ \sqrt{x} + 2, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5 - 2^{\frac{x-2}{x^2}}.$$

$$1.3 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq -1, \\ 3x + 2, & x > -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{4^{1/x}}{x+2}.$$

$$1.4 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 4, \\ \sqrt{x}, & x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{5^x - 1}{5^{1/(x+1)} + 3}.$$

$$1.5 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq -2, \\ 3 - x, & x > -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 4^{\frac{2}{x}} + \frac{x+5}{x-1}.$$

$$1.6 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 9^{\frac{2-x}{2+x}} - x^2.$$

$$1.7 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 2, \\ -x^2, & x > 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 3^{\frac{5}{4-x}} + \frac{1}{x}.$$

$$1.8 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ 4x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x+5}{2^{x/(x-1)} + 4}.$$

$$1.9 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq -2, \\ 3 - x, & x > -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5^{\frac{x^2}{1-x}} + 7.$$

$$1.10 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 4 + x, & x \leq 1, \\ 2\sqrt{x}, & x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{8^x + 1}{x^2}.$$

## 1.4 Асимптоты графика функции

Прямая  $L$  называется **асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если расстояние от точки  $M(x; y)$  кривой до прямой  $L$  стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от точки  $O(0; 0)$  (то есть при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Для нахождения асимптот пользуются следующими утверждениями.

**Утверждение 1.** Прямая  $x = x_0$  является **вертикальной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

Пусть функция  $y = f(x)$  является элементарной и  $D(y)$  – ее область определения. Рассмотрим некоторые случаи:

1) если  $D(y) = \{(-\infty; +\infty) \text{ или } [a; +\infty) \text{ или } (-\infty; b] \text{ или } [a; b]\}$ , то вертикальных асимптот нет;

2) если  $D(y) = (-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2) \cup \dots \cup (x_n; +\infty)$ , то вертикальными асимптотами могут быть только прямые  $x = x_i, i = \overline{1, n}$ , причем только в том случае, если  $\lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x) = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x) = \infty$ ;

3) если  $D(y) = (a; +\infty)$ , то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая  $x = a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = \infty$ ;

4) если  $D(y) = (-\infty; b)$ , то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая  $x = b$ , если  $\lim_{x \rightarrow b - 0} f(x) = \infty$ ;

**Утверждение 2. Невертикальные асимптоты** кривой  $y = f(x)$ , если они существуют, имеют уравнения  $y = kx + b$ , где величины  $k$  и  $b$  определяются формулами:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

причем в обеих формулах  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ . В случае, если  $k \neq 0$  получаем **наклонную асимптоту**, а при  $k = 0$  – **горизонтальную асимптоту**.

Следует отметить, что если в утверждении 2 хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то невертикальных асимптот нет.

**Пример 1.** Найти асимптоты к графику функции:

$$\text{а) } y = \frac{5 - x^2}{x + 2}; \quad \text{б) } y = \frac{x}{\sqrt{3 - x}}.$$

**Решение.**

а) Поскольку функция элементарна и  $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ , то вертикальной асимптотой может быть только прямая  $x = -2$ . Чтобы это выяснить, найдем односторонние пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2 - 0} \frac{5 - x^2}{x + 2} &= \frac{5 - (-2 - 0)^2}{-2 - 0 + 2} = \frac{5 - 4}{-0} = \frac{1}{-0} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2 + 0} \frac{5 - x^2}{x + 2} &= \frac{5 - (-2 - 0)^2}{-2 + 0 + 2} = \frac{5 - 4}{+0} = \frac{1}{+0} = +\infty. \end{aligned}$$

Поскольку односторонние пределы равны бесконечности, то  $x = -2$  – вертикальная асимптота.

Определим, существуют ли невертикальные асимптоты. Воспользуемся формулами из утверждения 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x^2}{(x+2) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x^2}{x^2 + 2x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{x^2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1 = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5 - x^2}{x + 2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x^2 + x^2 + 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{x + 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 = b.$$

Подставляя найденные значения  $k = -1$  и  $b = 2$  в формулу  $y = kx + b$ , получим уравнение наклонной асимптоты:  $y = -x + 2$ .

б) Найдем область определения функции  $y = \frac{x}{\sqrt{3-x}}$ :

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D(y) = (-\infty; 3).$$

Поскольку  $D(y) = (-\infty; 3)$ , то вертикальной асимптотой может быть лишь прямая  $x = 3$ . Чтобы это выяснить, надо найти только  $f(3-0)$ , так как правее точки  $x = 3$  функция не определена:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x}{\sqrt{3-x}} = \frac{3-0}{\sqrt{3-(3-0)}} = \frac{3}{\sqrt{3-3+0}} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Поскольку односторонний предел равен бесконечности, то  $x = 3$  — вертикальная асимптота.

Выясним вопрос о существовании невертикальных асимптот. Поскольку  $D(y) = (-\infty; 3)$ , то воспользоваться формулами из утверждения 2 можно только при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{3-x} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0 = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{3-x}} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{3-x}} = \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{:x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{3-x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} \left( \frac{3}{x} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{-0 \cdot (-0-1)}} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Поскольку последний предел равен бесконечности, то невертикальных асимптот нет.

### Задания для решения на практическом занятии

В задачах 1–6 найти асимптоты к графику функции.

$$1. y = \frac{4x-5}{7-x}.$$

$$2. y = \frac{5x+1}{x^2-1}.$$

$$3. y = \frac{x^3-8}{4-x^2}.$$

$$4. y = \frac{x-4}{\sqrt{x+3}}.$$

$$5. y = \frac{1-x^2}{\sqrt{5-x}}.$$

$$6. y = \frac{3x+4}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти асимптоты к графику функции

$$1.1 \text{ а) } y = \frac{5x+1}{x-2}; \text{ б) } y = \frac{2-3x}{\sqrt{x+4}}.$$

$$1.2 \text{ а) } y = \frac{3-x^3}{2x-6}; \text{ б) } y = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}.$$

$$1.3 \text{ а) } y = \frac{x^2+6}{4-x}; \text{ б) } y = \frac{8-x}{\sqrt{x+2}}.$$

$$1.4 \text{ а) } y = \frac{x^2-1}{x-2}; \text{ б) } y = \frac{2x^2+1}{\sqrt{3-x}}.$$

$$1.5 \text{ а) } y = \frac{x^2+1}{x^3}; \text{ б) } y = \frac{7x-2}{\sqrt{4-x}}.$$

$$1.6 \text{ а) } y = \frac{x^3-9}{2x+10}; \text{ б) } y = \frac{x-7}{\sqrt{x+7}}.$$

$$1.7 \text{ а) } y = \frac{x}{1-x^2}; \text{ б) } y = \frac{2-x}{\sqrt{x-3}}.$$

$$1.8 \text{ а) } y = \frac{6x-3}{x}; \text{ б) } y = \frac{x^2-9}{\sqrt{9-x}}.$$

$$1.9 \text{ а) } y = \frac{x^2+3}{x^2-4}; \text{ б) } y = \frac{9x+4}{\sqrt{x}}.$$

$$1.10 \text{ а) } y = \frac{x}{x^3+1}; \text{ б) } y = \frac{5-2x}{\sqrt{x+3}}.$$

## 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 2.1 Определение производной. Основные правила и формулы дифференцирования

**Производной функции**  $y = f(x)$ , определенной на некотором промежутке  $X$ , называется предел отношения ее приращения  $\Delta y$  к соответствующему приращению аргумента  $\Delta x$  независимой переменной при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Производная обозначается  $y'$ ,  $f'(x)$  или  $\frac{dy}{dx}$ .

Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка  $X$ , называется **дифференцируемой** на этом промежутке; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

**Пример 1.** Найти производную функции  $f(x) = x$ .

**Решение.** Найдем приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Тогда по определению производной имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Поскольку  $f(x)=x$ , то  $f'(x)=x'=1$  или

$$x' = 1,$$

то есть производная независимого аргумента равна единице.

Нахождение производной непосредственно по определению иногда довольно затруднительно. Поэтому на практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

### Правила дифференцирования

Если функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то функции  $u \pm v$ ,  $C \cdot u$  ( $C = \text{const}$ ),  $u \cdot v$  и  $\frac{u}{v}$  ( $v \neq 0$ ) дифференцируемы в этой точке, причем:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (C \cdot u)' = C \cdot u'; \quad 3) (u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad 4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

### Производная сложной функции

Пусть  $y = f(u)$  и  $u = u(x)$ , тогда  $y = f(u(x))$  – сложная функция с промежуточным аргументом  $u$  и независимым аргументом  $x$ .

**Теорема.** Если функция  $u = u(x)$  имеет производную  $u'_x$  в точке  $x$ , а функция  $y = f(u)$  имеет производную  $y'_u$  в соответствующей точке  $u = u(x)$ , то сложная функция  $y = f(u(x))$  имеет производную  $y'_x$  (или  $y'$ ) в точке  $x$ , которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

### Формулы дифференцирования основных элементарных функций от промежуточного аргумента $u = u(x)$

$$\begin{array}{lll} 1. (C)' = 0; & 2. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; & 3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \\ 4. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; & 5. (e^u)' = e^u \cdot u'; & 6. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'; \\ 7. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'; & 8. (\sin u)' = \cos u \cdot u'; & 9. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \\ 10. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'; & 11. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'; & 12. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'; \end{array}$$

$$13. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'; \quad 14.$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; \quad 15.$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

**Пример 2.** Найти производные функций

$$\text{а) } y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \frac{7}{x^5} + 4; \quad \text{б) } y = x^3 \cdot \sin x; \quad \text{в) } y = \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}.$$

**Решение.** Для нахождения производных будем пользоваться правилами дифференцирования, формулами дифференцирования и тем фактом, что производная независимого аргумента равна единице, то есть  $x' = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \left( 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \frac{7}{x^5} + 4 \right)' = \left( 5x^4 - 3x^{\frac{3}{7}} + 7x^{-5} + 4 \right)' = \left[ \begin{array}{l} (u \pm v)' = u' \pm v', \\ (C \cdot u)' = C \cdot u' \end{array} \right] = \\ &= 5 \cdot (x^4)' - 3 \cdot \left( x^{\frac{3}{7}} \right)' + 7 \cdot (x^{-5})' + (4)' = \left[ \begin{array}{l} (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \\ c' = 0 \end{array} \right] = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot x^3 - 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot x^{-\frac{4}{7}} + 7 \cdot (-5) \cdot x^{-6} + 0 = 20x^3 - \frac{9}{7} \cdot x^{-\frac{4}{7}} - 35x^{-6} = \\ &= 20x^3 - \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} - \frac{35}{x^6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= (x^3 \cdot \sin x)' = [(uv)' = u'v + uv'] = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = \\ &= \left[ \begin{array}{l} (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \\ (\sin u)' = \cos u \cdot u' \end{array} \right] = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= \left( \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} \right)' = \left[ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right] = \frac{(x^4 + 1)' \cdot (x^4 - 1) - (x^4 + 1) \cdot (x^4 - 1)'}{(x^4 - 1)^2} = \\ &= \frac{(4x^3 + 0) \cdot (x^4 - 1) - (x^4 + 1) \cdot (4x^3 - 0)}{(x^4 - 1)^2} = \frac{4x^7 - 4x^3 - 4x^7 - 4x^3}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-8x^3}{(x^4 - 1)^2}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти производные функций

$$\text{а) } y = \sin(2x - 1); \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^2 x; \quad \text{в) } y = \arcsin(\ln \sqrt{x}).$$

**Решение.** Для нахождения производной воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и формулами дифференцирования.

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \left( \sin(\underbrace{2x - 1}_u) \right)' = [(\sin u)' = \cos u \cdot u'] = \cos(2x - 1) \cdot (2x - 1)' = \cos(2x - 1) \cdot 2 = \\ &= 2 \cos(2x - 1); \end{aligned}$$

$$\text{б) } y' = (\operatorname{tg}^2 x)' = \left( \underbrace{(\operatorname{tg} x)^2}_u \right)' = [(u^2)' = 2u \cdot u'] = 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= \left( \arcsin(\underbrace{\ln \sqrt{x}}_u) \right)' = \left[ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \right] = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln \sqrt{x})^2}} \cdot (\ln \sqrt{x})'_u = \\ &= \left[ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \right] = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln \sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln \sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{1-(\ln \sqrt{x})^2}}. \end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

#### 1. Продифференцировать заданные функции.

$$1.1 \ y = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2. \quad 1.2 \ y = -7x^2 + 11x^3 - 2x^5 + 3. \quad 1.3 \ y = 2x^3 + \frac{5}{x^2} - 4 \cdot \sqrt[3]{x}.$$

$$1.4 \ y = \frac{11}{\sqrt{x}} + 5x - \frac{12}{x^5}. \quad 1.5 \ y = 2 \cdot \sqrt[4]{x^3} - 6x^7 + \frac{3}{x^2}. \quad 1.6 \ y = (3x^2 + 4x - 1) \cdot \cos x.$$

$$1.7 \ y = (5x^4 - 6x + e^x) \cdot \ln x. \quad 1.8 \ y = (2 \arccos x - x^3) \cdot 4^x. \quad 1.9 \ y = (\operatorname{ctg} x - 2 \ln x) \cdot (5x^2 + 3).$$

$$1.10 \ y = \frac{6x - 4x^2}{2x^3 - 5}. \quad 1.11 \ y = \frac{5x^4 - 4}{3x^2 + x}. \quad 1.12 \ y = \frac{3e^x + 2 \operatorname{ctg} x}{7 \log_6 x + 4}.$$

#### 2. Продифференцировать заданные функции.

$$2.1 \ y = \cos x^4. \quad 2.2 \ y = \cos^4 x. \quad 2.3 \ y = \log_4 (3x^2 - x + 5).$$

$$2.4 \ y = \sqrt[3]{\arccos x}. \quad 2.5 \ y = 3^{\operatorname{arctg} x}. \quad 2.6 \ y = \operatorname{ctg} \sqrt{2x^6 + 9}.$$

$$2.7 \ y = \cos(9x + 2) - \ln(2x^3 - 4). \quad 2.8 \ y = \operatorname{tg}(4 - 5x) - \arcsin \frac{x}{2} - e^{\cos x}.$$

$$2.9 \ y = (9x + 2)^5 \cdot 6^{\sqrt{x}}. \quad 2.10 \ y = \cos(2^x) \cdot \operatorname{arctg}(\ln x).$$

$$2.11 \ y = \frac{\sqrt{x^3 + 12x + 4}}{\operatorname{tg}(4x - 9)}. \quad 2.12 \ y = \frac{(2x + 5)^3}{\ln(3x - 4x^2)}.$$

$$2.13 \ y = e^{\arcsin(7x-1)} \cdot \ln(\operatorname{ctg} 3x). \quad 2.14 \ y = \frac{\log_9^4(3x + 6)}{\cos \sqrt{3x^2 + 1}}.$$

### Задания для самостоятельного решения

#### 1. Продифференцировать заданные функции.

$$1.1 \ \text{а) } y = 5x^4 + \frac{5}{x} - 6 \cdot \sqrt[4]{x} + 2x - 3; \quad \text{б) } y = 5^{6x+1} - \operatorname{arctg} \frac{x}{5} - \sin x^4;$$

$$\begin{array}{ll}
\text{в) } y = \log_2(x^2 - 3) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}; & \text{г) } y = \frac{(4 - 5x^3)^2}{\arcsin(7x)} \\
1.2 \text{ а) } y = 8x - \frac{2}{x^3} + 3 \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - x^3; & \text{б) } y = \operatorname{ctg}^5 x - \log_6(7x - 1) + \sin \sqrt{x}; \\
\text{в) } y = \operatorname{arctg}(\ln x) \cdot 5^{\cos x}; & \text{г) } y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}{(4x^3 + x - 1)^2} \\
1.3 \text{ а) } y = 2x^5 + \frac{3}{x^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{x^2} - x - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}; & \text{б) } y = \arccos^2 x - \sin(5x^6) + \operatorname{ctg}(\ln x); \\
\text{в) } y = \ln(x^5 + 4) \cdot \arcsin \sqrt{x}; & \text{г) } y = \frac{(6x^2 + x - 1)^3}{\sqrt{\cos(3x)}} \\
1.4 \text{ а) } y = 7x^3 - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 8 \cdot \sqrt[4]{x^3} + \frac{x}{3} - \frac{3}{x}; & \text{б) } y = \cos \sqrt{x} - e^{\operatorname{tg} x} + (2 - 3x + 7x^2)^5; \\
\text{в) } y = \log_2(9x - 1) \cdot \arcsin^5 x; & \text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{\sin 6x}}{\ln(\arccos x)} \\
1.5 \text{ а) } y = \sqrt{x^3} + \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} + 5x^4 - \frac{x}{6} - \frac{4}{x^5}; & \text{б) } y = \sqrt{\log_3 x} - 7^{\ln x} + (2x^6 + 3x - 4)^3; \\
\text{в) } y = \arcsin(4x^2) \cdot \cos^7 x; & \text{г) } y = \frac{\sin(\ln 4x)}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \\
1.6 \text{ а) } y = 2x^4 - \frac{10}{\sqrt[5]{x^2}} + \sqrt{x^5} + \frac{x}{2} - \frac{7}{x}; & \text{б) } y = \arcsin \sqrt{x} - 4^{\cos x} + (3x^4 + 5)^7; \\
\text{в) } y = \log_3^4 x \cdot \operatorname{arctg}(8x); & \text{г) } y = \frac{\sin \sqrt[5]{10x}}{\arccos(\ln x)} \\
1.7 \text{ а) } y = \frac{7}{x^7} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 4 \cdot \sqrt[4]{x} + \frac{x}{3} - 5x^4; & \text{б) } y = \sqrt{\log_6 x} + \operatorname{tg}^3 x + \arcsin(4x^2 - 1); \\
\text{в) } y = 5^{\cos x} \cdot (3x^2 - x + 4)^6; & \text{г) } y = \frac{\ln(\operatorname{arctg} 4x)}{\sin(2x - 7)} \\
1.8 \text{ а) } y = x^2 - \frac{16}{\sqrt[8]{x^3}} + 4 \cdot \sqrt{x^5} + \frac{x}{5} - \frac{5}{x}; & \text{б) } y = \sin \sqrt{x} - 8^{\log_3 x} + (2x^4 + 5x - 1)^3; \\
\text{в) } y = \cos x^6 \cdot \operatorname{arctg}(\ln x); & \text{г) } y = \frac{\sin^2(3x)}{\arcsin(x^3)} \\
1.9 \text{ а) } y = 5x^3 + \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}} - 6 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{x}{2} - \frac{2}{x^2}; & \text{б) } y = \log_3(\cos x) - 2^{\sqrt{x}} + \arcsin^4 x; \\
\text{в) } y = (3x^4 - x + 1)^2 \cdot \sin(2x); & \text{г) } y = \frac{\operatorname{arctg}(\ln 4x)}{\sqrt{\cos x}}
\end{array}$$

$$1.10 \text{ а) } y = 5x^3 + \frac{14}{\sqrt[7]{x}} - \sqrt[4]{x^5} - 8x + \frac{2}{x^4}; \quad \text{б) } y = \sin(\log_4 x) - \sqrt{\operatorname{tg} x} + \arccos^2 x;$$

$$\text{в) } y = (2x^5 + x^2 - 6)^3 \cdot \sin \frac{x}{3}; \quad \text{г) } y = \frac{\cos x^2}{\operatorname{arctg} \sqrt{\ln x}}.$$

## 2.2 Дифференциал функции. Производные высших порядков

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x$  производную  $f'(x) \neq 0$ .

**Дифференциалом функции**  $y = f(x)$  **в точке**  $x$  называется произведение производной функции  $f'(x)$  на приращение  $\Delta x$  независимой переменной и обозначается  $dy$  (или  $df(x)$ ):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (2.2)$$

Если формулу (2.2) применить к самому аргументу  $x$ , т. е. к функции  $y = f(x) = x$ , то, учитывая, что  $x' = 1$ , получим

$$dx = \Delta x. \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3) следует, что дифференциал независимого аргумента равен приращению аргумента.

Таким образом, учитывая равенство (2.3), формулу (2.2) можно записать в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (2.4)$$

**Пример 1.** Найти дифференциал функции  $y = 9x^5 - \cos(3x - 2)$ .

**Решение.** Найдем производную функции:

$$y' = (9x^5 - \cos(3x - 2))' = (9x^5)' - (\cos(3x - 2))' = 45x^4 - \sin(3x - 2) \cdot 3 = 45x^4 - 3 \sin(3x - 2).$$

Тогда согласно формуле (2.4) имеем:

$$dy = f'(x) \cdot dx = (45x^4 - 3 \sin(3x - 2))dx \text{ или } dy = (45x^4 - 3 \sin(3x - 2))dx.$$

Производная  $y' = f'(x)$  функции  $y = f(x)$  также является функцией от  $x$  и называется **производной первого порядка**.

Если  $\exists (f'(x))'$ , то она называется производной **второго порядка** и обозначается  $y''$  (или  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$ ,  $y''_{xx}$ ).

По аналогии,

$$y''' = (y'')' - \text{производная } \textbf{третьего порядка},$$

.....

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' - \text{производная } \textbf{n-го порядка}.$$

Производные порядка выше первого называются производными **высших порядков**.

**Пример 2.** Для функции  $y = x^2 \ln x$  вычислить  $y'''(2)$ .

**Решение.** Сначала найдем производную третьего порядка:

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$$

$$y'' = (2x \ln x + x)' = (2x \ln x)' + x' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3,$$

$$y''' = (2 \ln x + 3)' = (2 \ln x)' + 3' = 2 \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{2}{x}.$$

Вычислим значение найденной производной в указанной точке:

$$y'''(2) = \frac{2}{2} = 1.$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций.

1.1  $y = (3x+1) \cdot \operatorname{tg}^3 x$ .

1.2  $y = \sqrt[4]{\operatorname{arctg} x} + (\arccos 2x)^2$ .

1.3  $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x^2 - 3} + \ln(\cos 3x)$ .

1.4  $y = 5^{2x^3 - 7x} \cdot \sqrt{8x + 7}$ .

1.5  $y = \frac{(7x^3 - 2x + 1)^4}{\sin(2x + 1)}$ .

1.6  $y = \frac{e^{\cos 4x}}{\log_2(5x - 11)}$ .

2. Для данной функции  $y$  найти указанную производную.

2.1  $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ . Найти  $y''$ .

2.2  $y = 2\sqrt{4 - 3x}$ . Найти  $y^{\text{IV}}$ .

2.3  $y = \ln(3x + 1)$ . Найти  $y^{\text{IV}}$ .

2.4  $y = \cos^2 5x$ . Найти  $y'''$ .

2.5  $y = \ln(\sin x)$ . Найти  $y'''$ .

2.6  $y = (1 + 9x^2) \cdot \operatorname{arctg} 3x$ . Найти  $y''$ .

3. Для данной функции  $y$  и аргумента  $x_0$  вычислить  $y'''(x_0)$ .

3.1  $y = \sin 7x$ ,  $x_0 = \pi$ .

3.2  $y = \ln(2+x)$ ,  $x_0 = 3$ .

3.3  $y = (3x-1)^4$ ,  $x_0 = 1$ .

3.4  $y = x \cdot \sin x$ ,  $x_0 = \pi/2$ .

3.5  $y = \ln(x^2 - 6)$ ,  $x_0 = 3$ .

3.6  $y = 4^{x^2}$ ,  $x_0 = 1$ .

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций.

1.1  $y = \cos \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}(2x^3)$ .

1.2  $y = 6^{\operatorname{tg} x} + \arcsin^3 2x$ .

1.3  $y = (5x^4 - 3)^7 + \log_3(\operatorname{tg} x)$ .

1.4  $y = e^{\sin 7x} \cdot \sqrt{5x^2 + 4}$ .

1.5  $y = \cos(\log_2 x) \cdot \sqrt[5]{\operatorname{ctg} x}$ .

1.6  $y = \sin^5 3x \cdot \ln(3x^2 - 4)$ .

1.7  $y = \log_2(3x^6 - 1) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .

1.8  $y = 5^{\arcsin x} \cdot (8x^6 + 3)^4$ .

1.9  $y = \frac{3x^7 - 2x + 4}{\cos^5 x}$ .

1.10  $y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{(3x^4 + x - 1)^7}$ .

2. Для данной функции  $y$  и аргумента  $x_0$  вычислить  $y'''(x_0)$ .

2.1  $y = \sin^2 2x$ ,  $x_0 = \pi/4$ .

2.2  $y = \operatorname{arctg} 4x$ ,  $x_0 = 1/4$ .

2.3  $y = e^{2x} \cdot \cos x$ ,  $x_0 = 0$ .

2.4  $y = x^2 \cdot e^{5x}$ ,  $x_0 = 0$ .

2.5  $y = x^2 \cdot \sin 6x$ ,  $x_0 = \pi/12$ .

2.6  $y = \ln(x^2 - 4)$ ,  $x_0 = 3$ .

2.7  $y = \ln^3 2x$ ,  $x_0 = 1/2$ .

2.8  $y = (3x - 2)^5$ ,  $x_0 = 1$ .

2.9  $y = x^5 \cdot \ln x$ ,  $x_0 = 1$ .

2.10  $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 1$ .

### 2.3 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

Пусть функция задана **неявно** в виде  $F(x, y) = 0$ . Для вычисления производной функции  $y = y(x)$  следует обе части тождества  $F(x, y) = 0$  продифференцировать по  $x$ , рассматривая левую часть как сложную функцию  $x$ , а затем полученное уравнение разрешить относительно  $y'_x$ .

Вторую производную от неявной функции получим, дифференцируя  $y'_x$  по переменной  $x$ , помня при этом, что  $y$  есть функция от  $x$ . Из полученного равенства выражаем  $y''_{xx}$ , предварительно подставив ранее найденное  $y'_x$ .

**Пример 1.** Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  для функции, заданной неявно  $x^2 + y^2 = \cos y$ .

**Решение.** Продифференцируем обе части тождества, считая  $y(x)$  сложной функцией:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)'_x &= (\cos y)', \\ 2x + 2y \cdot y'_x &= -\sin y \cdot y'_x.\end{aligned}$$

Перенесем в правую часть выражения, не содержащие множитель  $y'_x$  и, вынеся за скобки, выразим его значение:

$$\begin{aligned}2yy'_x + \sin y \cdot y'_x &= -2x, \\ y'_x \cdot (2y + \sin y) &= -2x, \\ y'_x &= \frac{-2x}{2y + \sin y}.\end{aligned}$$

Для нахождения второй производной продифференцируем полученное равенство по переменной  $x$ :

$$\begin{aligned}y''_{xx} &= \left( \frac{-2x}{2y + \sin y} \right)'_x = \frac{(-2x)'_x \cdot (2y + \sin y) - (-2x) \cdot (2y + \sin y)'_x}{(2y + \sin y)^2} = \\ &= \frac{-2 \cdot (2y + \sin y) + 2x \cdot (2y'_x + \cos y \cdot y'_x)}{(2y + \sin y)^2} = \frac{-2 \cdot (2y + \sin y) + 2x \cdot y'_x \cdot (2 + \cos y)}{(2y + \sin y)^2},\end{aligned}$$

$$y''_{xx} = \frac{-2 \cdot (2y + \sin y) + 2x \cdot y'_x \cdot (2 + \cos y)}{(2y + \sin y)^2}.$$

Осталось подставить в полученное равенство выражение для  $y'_x$ :

$$y''_{xx} = \frac{-2 \cdot (2y + \sin y) + 2x \cdot \frac{-2x}{2y + \sin y} \cdot (2 + \cos y)}{(2y + \sin y)^2},$$

$$y''_{xx} = \frac{-2 \cdot (2y + \sin y)^2 - 4x^2 \cdot (2 + \cos y)}{(2y + \sin y)^3}.$$

Пусть функция  $y = f(x)$  задана **параметрически** в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in D, \end{cases}$$

где  $t$  – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Для нахождения первой производной функции, заданной параметрически, используют формулу:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (2.5)$$

Тогда вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (2.6)$$

**Пример 2.** Найти первую и вторую производные параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1, \quad t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

**Решение.** Для нахождения первой производной воспользуемся формулой (2.5):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2 - 1)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{2t}{\frac{1}{t}} = 2t^2.$$

Окончательно первую производную запишем как функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} y'_x = 2t^2, \\ x = \ln t, \quad t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Вторую производную найдем по формуле (2.6):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(2t^2)'_t}{1/t} = 4t \cdot t = 4t^2.$$

Следовательно, вторая производная имеет вид:

$$\begin{cases} y''_{xx} = 4t^2, \\ x = \ln t, \quad t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Дифференцирование многих функций значительно упрощается после их предварительного логарифмирования; нахождение производной функции в этом случае называют **логарифмическим дифференцированием**.

Если требуется найти производную  $y'$  функции  $y = f(x)$  с помощью логарифмического дифференцирования, то необходимо выполнить следующие действия:

1) прологарифмировать обе части уравнения (по основанию  $e$ ):

$$\ln y = \ln f(x);$$

2) продифференцировать обе части полученного равенства, где  $\ln y$  есть сложная функция от  $x$ :

$$(\ln y)' = (\ln f(x))',$$

$$\frac{1}{y} y' = (\ln f(x))';$$

3) определить  $y'$ , умножив обе части последнего равенства на  $y$ , и заменить  $y$  его выражением через  $x$ :

$$y' = y \cdot (\ln f(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной показательной-степенной функции вида  $y = f(x)^{g(x)}$ .

**Пример 3.** Найти производную функции  $y = (x^2 - 4x)^{\cos x}$ .

**Решение.** Прологарифмировав обе части равенства, получим:

$$\ln y = \ln(x^2 - 4x)^{\cos x}.$$

Используя свойство логарифмической функции  $\ln a^b = b \cdot \ln a$ , имеем:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(x^2 - 4x).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y} y' = (\cos x)' \cdot \ln(x^2 - 4x) + \cos x \cdot (\ln(x^2 - 4x))',$$

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln(x^2 - 4x) + \cos x \cdot \frac{1}{x^2 - 4x} \cdot (2x - 4).$$

Умножив обе части полученного равенства на  $y$  и, далее заменив  $y$  его выражением через  $x$ , окончательно получим:

$$y' = y \cdot \left( -\sin x \cdot \ln(x^2 - 4x) + \cos x \cdot \frac{2x - 4}{x^2 - 4x} \right),$$

$$y' = (x^2 - 4x)^{\cos x} \cdot \left( -\sin x \cdot \ln(x^2 - 4x) + \cos x \cdot \frac{2x - 4}{x^2 - 4x} \right).$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  для функции, заданной неявно.

1.1  $y = 5x + 4 \operatorname{arctg} y$ .

1.2  $\operatorname{tg} y = 4x - 6y$ .

1.3  $\sin y = xy^2 - 6$ .

1.4  $x^3 - y^2 = \arccos 3x + \operatorname{tg} y$ .

2. Найти первую и вторую производные параметрически заданной функции.

2.1  $\begin{cases} x = e^{-4t}, \\ y = e^{5t}. \end{cases}$

2.2  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[3]{t^8}. \end{cases}$

2.3  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} x, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

2.4  $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

3. Найти первую производную функции, используя логарифмическое дифференцирование.

3.1  $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3-5x}}$ .

3.2  $y = (\ln(8x))^{\arccos 3x}$ .

3.3  $y = (\arccos x)^{\ln(2-9x^2)}$ .

3.4  $y = (\log_2(x^3 - 1))^{\cos 9x}$ .

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  для функции, заданной неявно.

1.1  $y = 8x + \operatorname{arctg} y$ .

1.2  $y^2 - 2x = \cos y$ .

1.3  $\operatorname{tg} y = 2x^5 + 3y$ .

1.4  $y = e^y + 5x$ .

1.5  $\sin y = x^2 y + 7$ .

1.6  $4y = 5 + xy^3$ .

1.7  $xy = \operatorname{ctg} y$ .

1.8  $x^2 y - y^2 = 3x$ .

1.9  $x^2 + 2 \sin y = 7y$ .

1.10  $4x + y^2 = \sin y$ .

2. Найти первую и вторую производные параметрически заданной функции.

2.1  $\begin{cases} x = 7 \cos 3t, \\ y = 5 \sin 3t. \end{cases}$

2.2  $\begin{cases} x = 4t^2 - 2, \\ y = 4t^3. \end{cases}$

2.3  $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2.4  $\begin{cases} x = 6t - 3t^2, \\ y = 2t^3 + 1. \end{cases}$

2.5  $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

2.6  $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

$$2.7 \begin{cases} x = \ln t / t, \\ y = t \cdot \ln t. \end{cases}$$

$$2.9 \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

$$2.8 \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$2.10 \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

3. Найти первую производную функции, используя логарифмическое дифференцирование.

$$3.1 y = (x^2 + 3x)^{\operatorname{arctg} 5x}.$$

$$3.2 y = (\sin x)^{\log_2(5x^2 - 3x)}.$$

$$3.3 y = (\operatorname{tg}(2x))^{\sqrt{3-5x}}.$$

$$3.4 y = (\arcsin x)^{\sqrt[3]{6x+5}}.$$

$$3.5 y = (7x^4 - 2x + 4)^{\operatorname{ctg} 6x}.$$

$$3.6 y = (\operatorname{arcctg} x)^{\ln(8x^3 - 5)}.$$

$$3.7 y = (\log_4 x)^{\sqrt{\cos x}}.$$

$$3.8 y = (\cos x)^{\arcsin(3x^4 - x + 1)}.$$

$$3.9 y = (6x^2 + 3x + 7)^{\sqrt[5]{\sin x}}.$$

$$3.10 y = (\operatorname{ctg} x)^{\arccos \sqrt{x}}.$$

## 2.4 Правило Лопиталья

Правило Лопиталья применяют при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей вида  $0/0$  и  $\infty/\infty$ .

**Теорема 1 (Лопиталья).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  и  $g'(x) \neq 0$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  или

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , то есть частное  $\frac{f(x)}{g(x)}$  представляет собой

неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ,

при условии, что существует предел отношения производных.

**Замечание.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = 0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = \infty$ ,  $g''(x) \neq 0$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

и т. д. Перед повторным применением правила Лопиталья рекомендуется произвести все допустимые упрощения.

**Пример 1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ , используя правило Лопиталья.

**Решение.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\ln \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

$$\begin{array}{lll}1.1 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}. & 1.2 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x^2 - 4x + 1}. & 1.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}. \\ 1.4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}. & 1.5 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}. & 1.6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}. \\ 1.7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}. & 1.8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.\end{array}$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

$$\begin{array}{lll}1.1 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}. & 1.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}. & 1.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}. \\ 1.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}. & 1.5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x}}{x^3}. & 1.6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}. \\ 1.7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg} 7x)}{\ln(\operatorname{tg} 2x)}. & 1.8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}. & 1.9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x+3}}. \\ 1.10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x^2 + 4}{2x^5 - 4x + 6}.\end{array}$$

## 2.5 Исследование функции на монотонность и экстремум

Функция  $f(x)$  называется **возрастающей** на  $(a; b)$ , если для  $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$   $x_1 < x_2$   $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функция  $f(x)$  называется **убывающей** на  $(a; b)$ , если для  $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$   $x_1 < x_2$   $f(x_1) > f(x_2)$ .

Возрастающие или убывающие на интервале  $(a; b)$  функции называются **монотонными**.

**Теорема 2 (достаточное условие монотонности функции).** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и дифференцируема на промежутке  $(a; b)$ .

1. Если  $f'(x) < 0$  на промежутке  $(a; b)$ , то эта функция убывает на  $(a; b)$ .

2. Если  $f'(x) > 0$  на промежутке  $(a; b)$ , то эта функция возрастает на  $(a; b)$ .

Точки  $x_0$ , в которых  $f'(x_0) = 0$ , называются **стационарными**.

**Критическими точками** функции  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$  являются точки, в которых производная существует и равна нулю, и точки, где она не существует.

Значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **максимумом**, если оно является наибольшим по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от  $x_0$ .

Значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **минимумом**, если оно является наименьшим по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от  $x_0$ . Максимумы и минимумы функции называют **экстремумами**.

**Теорема 3 (необходимое условие экстремума).** Если дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум, то  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема 4 (достаточное условие экстремума).** Пусть функция  $f(x)$  определена и дифференцируема на интервале  $(a; b)$  за исключением быть может точки  $x_0 \in (a; b)$ . Если при переходе слева направо через т.  $x_0$ :

1)  $f'(x)$  меняет свой знак с плюса на минус, то при  $x = x_0$  функция имеет максимум;

2)  $f'(x)$  меняет свой знак с минуса на плюс, то при  $x = x_0$  функция имеет минимум;

3)  $f'(x)$  не меняет свой знак, то при  $x = x_0$  экстремума нет.

**План исследования функции  $f(x)$  на монотонность и экстремум**

1. Найти область определения функции  $y = f(x)$ .

2. Найти первую производную функции  $f'(x)$ .

3. Найти критические точки, для этого:

а) находим действительные корни уравнения  $f'(x) = 0$ ;

б) находим значения  $x$ , при которых производная  $f'(x)$  терпит разрыв.

4. Отмечаем полученные точки на оси  $Ox$ , исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки.

5. Применяя теорему 2, указываем интервалы возрастания и убывания функции. Применяя теорему 4, указываем точки экстремума и находим значения функции в этих точках.

**Пример 1.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7.$$

**Решение.**

1. Функция определена на  $R$ .

$$2. y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3).$$

3. Производная  $y' = 0$  при  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 3$ . Эти точки разбивают область определения функции на интервалы  $(-\infty, -1)$ ;  $(-1, 3)$ ;  $(3, +\infty)$ .

4. Отмечаем полученные точки на оси  $Ox$ , исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки (рис. 1).

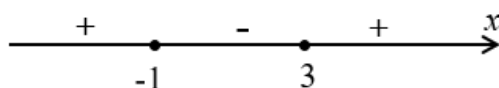


Рисунок 1 – Знаки производной на промежутках

5. Так как  $y' > 0$  на интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(3, +\infty)$ , то функция возрастает на этих интервалах. Так как  $y' < 0$  на интервале  $(-1, 3)$ , то функция убывает на этом интервале.

Поскольку  $y'$  меняет свой знак с плюса на минус при переходе через  $x_1 = -1$ , то эта точка является точкой максимума функции. Так как  $y'$  меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_2 = 3$ , то эта точка является точкой минимума. Найдем значения функции в этих точках:

$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 7 = 12,$$

$$y_{\min} = y(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 7 = -20.$$

**Задания для решения на практическом занятии**

1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функций.

$$1.1 \ y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1. \quad 1.2 \ y = x^4 - 2x^2 + 2. \quad 1.3 \ y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3.$$

$$1.4 \ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}. \quad 1.5 \ y = \ln(1 - x^2). \quad 1.6 \ y = x + \frac{1}{x}.$$

$$1.7 \ y = \frac{x}{1 + x^2}. \quad 1.8 \ y = x + \sqrt{1 - x}.$$

**Задания для самостоятельного решения**

1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функций.

$$1.1 \ y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}. \quad 1.2 \ y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}. \quad 1.3 \ y = \frac{x}{9 - x}.$$

$$1.4 \ y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}. \quad 1.5 \ y = x - \ln(x^2 + 1). \quad 1.6 \ y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$1.7 \quad y = \frac{5x}{4 - x^2}.$$

$$1.8 \quad y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$1.9 \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$1.10 \quad y = \frac{x^3}{x^4 - 1}.$$

## 2.6 Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

**Наибольшим значением** функции называется самое большое, а **наименьшим значением** – самое меньшее из всех ее значений, принимаемых на отрезке  $[a; b]$ .

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений. Эти значения функция может принимать либо во внутренней точке  $x_0$  отрезка  $[a; b]$ , либо на границе отрезка, т. е. при  $x = a$  или  $x = b$ . Если  $x_0 \in (a; b)$ , то точку  $x_0$  нужно искать среди критических точек функции.

**План нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке  $[a; b]$ .**

1. Найти критические точки функции  $f(x)$ , принадлежащие отрезку  $[a; b]$ .
2. Вычислить значения функции  $f(x)$  в этих точках и на концах отрезка  $[a; b]$ .
3. Выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.

**Замечание.** Если функция  $y = f(x)$  не имеет критических точек на отрезке  $[a; b]$ , то это означает, что на этом отрезке функция монотонно возрастает либо убывает. Следовательно, свое наименьшее значение она принимает на одном из концов, а наибольшее – на другом.

**Пример 1.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$  на отрезке  $[0; 4]$ .

**Решение.**

1. Найдем критические точки функции, принадлежащие отрезку  $[0; 4]$ :

$$y' = (x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4)' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = 9,$$

$$x_1 = -1 \notin [0; 4],$$

$$x_2 = 2 \in [0; 4]$$

2. Вычислим значения функции в точке  $x = 2$  и на концах отрезка:

$$y(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 8 - 6 - 12 + 4 = -6,$$

$$y(0) = 4,$$

$$y(4) = 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 = 64 - 24 - 24 + 4 = 20.$$

3. Выберем среди этих значений наибольшее и наименьшее:

$$y_{\text{наиб}} = 20 = y(4), \quad y_{\text{наим}} = -6 = y(2).$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках.

$$1.1 \quad y = -3x^4 + 6x^2 - 1, \quad [-2; 2]$$

$$1.2 \quad y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1, \quad [-1; 5]$$

$$1.3 \quad y = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0; 4]$$

$$1.4 \quad y = \frac{3x}{x^2 + 1}, \quad [0; 5]$$

$$1.5 \quad y = (3-x) \cdot e^{-x}, \quad [0; 5]$$

$$1.6 \quad y = \ln(x^2 + 6x + 10) \cdot e^{-x}, \quad [-5; 0]$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках.

$$1.1 \quad y = \ln(x^2 - 4x + 8), \quad [0; 4]$$

$$1.2 \quad y = (x+2) \cdot e^{1-x}, \quad [-2; 2]$$

$$1.3 \quad y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, \quad [-1; 1]$$

$$1.4 \quad y = \frac{x^3 + 4}{x^2}, \quad [1; 2]$$

$$1.5 \quad y = 4 - e^{-x^2}, \quad [0; 1]$$

$$1.6 \quad y = e^{4x-x^2}, \quad [1; 3]$$

$$1.7 \quad y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [-3; 1]$$

$$1.8 \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2, \quad [-1; 2]$$

$$1.9 \quad y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 1, \quad [5; 10]$$

$$1.10 \quad y = \frac{x}{9-x^2}, \quad [-2; 2]$$

## 2.7 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции

График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется **выпуклым** на интервале  $(a; b)$ , если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале; если же ниже, то – **вогнутым** на интервале  $(a; b)$ .

Точка  $x_0 \in D(y)$  называется **точкой перегиба** функции  $y = f(x)$ , если в этой точке выпуклость функции сменяется вогнутостью или наоборот.

**Теорема 5 (достаточное условие выпуклости, вогнутости).** Если функция  $y = f(x)$  на интервале  $(a; b)$  дважды непрерывно дифференцируема и

$f''(x) < 0$  для  $\forall x \in (a, b)$ , то график функции в этом интервале выпуклый; если же  $f''(x) > 0$  для  $\forall x \in (a, b)$ , то график функции в этом интервале вогнутый.

**Теорема 6 (необходимое условие существования точки перегиба).** Если функция  $y = f(x)$  имеет непрерывную в точке  $x_0$  производную  $f''(x)$  и  $x_0$  – точка перегиба, то  $f''(x_0) = 0$ .

**Теорема 7 (достаточное условие существования точки перегиба).** Если  $x_0$  – критическая точка второго рода для функции  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in D(y)$  и при переходе через эту точку вторая производная  $f''(x)$  меняет знак, то точка  $x_0$  является точкой перегиба.

### План исследования функции на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба

1. Найти область определения  $D(y)$  функции  $y = f(x)$ .
2. Найти критические точки второго порядка функции  $y = f(x)$ , для этого:
  - а) находим действительные корни уравнения  $f''(x) = 0$ ;
  - б) находим значения  $x$ , при которых вторая производная  $f''(x)$  не существует.
3. Отметить полученные точки на оси  $Ox$ , определить знак второй производной слева и справа от каждой критической точки.
4. Применяя теоремы 5 и 7, указываем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

**Пример.** Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции  $y = x^3 - 12x^2 + 4x + 10$ .

**Решение.**

1. Область определения функции:  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

2. Найдем критические точки второго порядка функции:

$$y' = (x^3 - 12x^2 + 4x + 10)' = 3x^2 - 24x + 4,$$

$$y'' = (3x^2 - 24x + 4)' = 6x - 24,$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in D(y).$$

3. Отметить точку  $x = 4$  на оси  $Ox$  и определим знак второй производной слева и справа от этой точки (рис. 2).

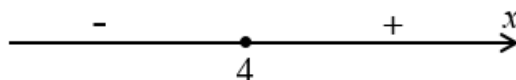


Рисунок 2 – Знаки второй производной на промежутках

4. При  $x \in (-\infty; 4)$   $y'' < 0 \Rightarrow$  график функции выпуклый; при  $x \in (4; +\infty)$   $y'' > 0 \Rightarrow$  график функции вогнутый. Так как

$$f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 10 = 16 \cdot (4 - 12 + 1) + 10 = 16 \cdot (-7) + 10 = -102,$$

то  $(4; -102)$  – точка перегиба.

### Задания для решения на практическом занятии

1. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

$$1.1 \ y = 3x^5 - 5x^4 + 4. \quad 1.2 \ y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9. \quad 1.3 \ y = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

$$1.4 \ y = \frac{1}{(x+1)^3}. \quad 1.5 \ y = 1 - \ln(x^2 - 4). \quad 1.6 \ y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

$$1.1 \ y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}. \quad 1.2 \ y = e^{2x-x^2}. \quad 1.3 \ y = x \cdot \ln^2 x.$$

$$1.4 \ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}. \quad 1.5 \ y = \frac{x^4}{x^3 - 1}. \quad 1.6 \ y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

$$1.7 \ y = \ln(9 - x^2). \quad 1.8 \ y = \ln(25 - x^2). \quad 1.9 \ y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$1.10 \ y = \frac{5x}{4 - x^2}.$$

## 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 3.1 Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Интегральное исчисление решает задачу, обратную дифференциальному исчислению: по известной производной некоторой функции восстановить саму функцию.

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** функции  $f(x)$ , заданной на некотором множестве  $X$ , если для  $\forall x \in X$  выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция  $F(x) = \frac{x^4}{4}$  является первообразной для функции

$$f(x) = x^3, \quad \text{так как} \quad F'(x) = \left( \frac{x^4}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x). \quad \text{Очевидно, что}$$

первообразными будут также любые функции  $\Phi(x) = \frac{x^4}{4} + C$ , где  $C - const$ ,

$$\text{поскольку } \Phi'(x) = \left( \frac{x^4}{4} + C \right)' = \left( \frac{x^4}{4} \right)' + C' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x).$$

Таким образом, если  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  – две первообразные одной и той же функции  $f(x)$ , то  $\Phi(x) = F(x) + C$ .

Множество  $F(x) + C$  всех первообразных функции  $f(x)$  на множестве  $X$  называется **неопределенным интегралом** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) функция  $f(x)$  называется **подынтегральной функцией**,  $f(x)dx$  – **подынтегральным выражением**,  $x$  – **переменной интегрирования**.

Нахождение первообразной для данной функции  $f(x)$  называется **интегрированием** функции  $f(x)$ .

**Теорема 1.** Для всякой непрерывной на интервале  $X$  функции  $f(x)$  существует на этом интервале первообразная, а, значит, и неопределенный интеграл.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, зависящих от одного параметра  $C$ , которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси  $Oy$ .

### Основные свойства неопределенного интеграла

$$1) \left( \int f(x)dx \right)' = f(x);$$

$$2) \int f'(x)dx = f(x) + C;$$

$$3) \int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx, \quad C - const;$$

$$4) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$5) \text{ если } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C \text{ для}$$

$$\forall k, b \in R, k \neq 0;$$

$$6) \text{ если } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(u)du = F(u) + C, \text{ где } u = \varphi(x) - \text{ произвольная функция, имеющая непрерывную производную.}$$

### Таблица основных неопределенных интегралов

$$1) \int dx = x + C;$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x + C, \\ -\operatorname{arc} \cos x + C; \end{cases}$$

$$12) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} x + C, \\ -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsin} x + C, \\ -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcc} \cos x + C; \end{cases}$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Одним из методов интегрирования неопределенного интеграла является **метод непосредственного интегрирования**. Этот метод основан на применении таблицы основных неопределенных интегралов и свойств неопределенного интеграла.

**Пример 1.** Найти неопределенный интеграл  $\int \left( 6x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 4x + 1 \right) dx$ .

**Решение.** Воспользуемся свойствами 4), 3) неопределенного интеграла и формулами 1), 2) и 3) таблицы интегралов.

$$\begin{aligned} \int \left( 6x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 4x + 1 \right) dx &= \int 6x^2 dx + \int 3 \cdot \frac{1}{x^2} dx - 5 \int \frac{1}{x} dx - \int 4x dx + \int dx = \\ &= \left[ \frac{1}{x^2} = x^{-2} \right] = 6 \cdot \int x^2 dx + 3 \cdot \int x^{-2} dx - 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx - 4 \cdot \int x dx + \int dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \\ &- 5 \cdot \ln |x| - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = 2x^3 - \frac{3}{x} - 5 \ln |x| - 2x^2 + x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти неопределенный интеграл

$$\int \left( 7\sqrt{x^5} - \frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}} \right) dx.$$

**Решение.** Воспользуемся свойствами 4), 3) неопределенного интеграла и формулой 2) таблицы интегралов.

$$\begin{aligned} \int \left( 7\sqrt{x^5} - \frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}} \right) dx &= \int 7 \cdot \sqrt{x^5} dx - \int 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt[3]{x^2} dx - \int 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx = \\ &= \left[ \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-\frac{4}{5}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7 \cdot \int x^{\frac{5}{2}} dx - 6 \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx - 2 \cdot \int x^{-\frac{4}{5}} dx = 7 \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 6 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = \\
&= 2 \cdot x^{\frac{7}{2}} - 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 10 \cdot x^{\frac{1}{5}} + C = 2\sqrt{x^7} - 12\sqrt{x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[5]{x} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти неопределенный интеграл

$$\int \left( 3^x - 4 \cos x + \frac{5}{9+x^2} - \frac{2}{x^2-9} \right) dx.$$

**Решение.** Воспользуемся свойствами 4), 3) неопределенного интеграла и формулами 4), 7), 12) и 15) таблицы интегралов.

$$\begin{aligned}
&\int \left( 3^x - 4 \cos x + \frac{5}{9+x^2} - \frac{2}{x^2-9} \right) dx = \int 3^x dx - 4 \int \cos x dx + 5 \int \frac{dx}{3^2+x^2} - 2 \int \frac{2}{x^2-3^2} = \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} - 4 \sin x + 5 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} - 4 \sin x + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1  $\int (3x^4 - 5x^2 + 7x - 2) dx.$

1.2  $\int (11x^3 - 2x^5 - x + 3) dx;$

1.3  $\int \left( \frac{x^3}{2} + \frac{5}{x^2} - 4 \cdot \sqrt[3]{x} \right) dx.$

1.4  $\int \left( \frac{11}{\sqrt{x}} + 5x - \frac{12}{x^5} \right) dx.$

1.5  $\int \left( 2 \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \right) dx.$

1.6  $\int \left( 12x^5 - \frac{3}{\sqrt[7]{x^8}} + 3 \cdot \sqrt[5]{x^3} \right) dx.$

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1  $\int \left( \sin x - 6^x + \frac{2}{1-x^2} \right) dx.$

2.2  $\int \left( \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{5}{x} - 4\sqrt{x} \right) dx.$

2.3  $\int \left( \frac{7}{x^2+3} - \frac{6}{\sqrt{x^2+3}} + e^x \right) dx.$

2.4  $\int \left( \frac{8}{\sqrt{1-x^2}} - 9x^4 + \frac{3}{1+x^2} \right) dx.$

2.5  $\int \left( \frac{3}{\sin^2 x} - 4 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^2-16} \right) dx.$

2.6  $\int \left( -\frac{12}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{5-x^2}} + 7^x \right) dx.$

3. Найти неопределенные интегралы.

3.1  $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x^5 + x^4}{x^5} dx.$

3.2  $\int \frac{6 \cdot 5^x + 7 \cdot 4^x}{5^x} dx.$

$$3.3 \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx.$$

$$3.4 \int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx.$$

$$3.5 \int \left( \frac{3-x}{x} \right)^2 dx.$$

$$3.6 \int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

$$1.1 \int \left( \frac{2}{x^4} - 3 \cdot \sqrt[5]{x^7} + 4x^2 - x + 3 \right) dx.$$

$$1.2 \int \left( 8 \cdot \sqrt[12]{x} + 3x - \frac{2}{x^9} - \frac{6}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx.$$

$$1.3 \int \left( 5x^7 - \frac{6}{\sqrt{x^3}} + \frac{4}{x^2} - x + 9 \right) dx.$$

$$1.4 \int \left( 3x^{11} - \frac{2}{\sqrt{x^7}} - \frac{8}{x^4} - 8x + 2 \right) dx.$$

$$1.5 \int \left( 16x^2 - \frac{3}{\sqrt[8]{x^3}} - \frac{1}{x^7} + \sqrt{x} - 2x \right) dx.$$

$$1.6 \int \left( \frac{x^6}{2} + 4\sqrt[3]{x} + \frac{14}{x^6} - 4x + 1 \right) dx.$$

$$1.7 \int \left( \frac{x^7}{2} - \frac{6}{\sqrt{x^7}} + \frac{4}{x^7} - 5x + 1 \right) dx.$$

$$1.8 \int \left( 5x^4 - \frac{2}{\sqrt[7]{x^2}} - 9\sqrt{x^9} + \frac{x}{2} + 7 \right) dx.$$

$$1.9 \int \left( 6x^2 - \frac{7}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{x^9} + \sqrt{x^3} - x \right) dx.$$

$$1.10 \int \left( \frac{x^2}{2} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x^7} - 10x + 2 \right) dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы.

$$2.1 \int \left( \frac{3}{\sin^2 x} - 4^x + \frac{5}{x^2 - 6} + \frac{3}{\sqrt{6 - x^2}} \right) dx.$$

$$2.2 \int \left( \frac{10}{x} + \frac{3}{4 + x^2} + 5 \sin x - \frac{4}{\sqrt{x^2 - 7}} \right) dx.$$

$$2.3 \int \left( 8^x + \frac{2}{\sqrt{5 - x^2}} + \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx.$$

$$2.4 \int \left( \cos x + \frac{9}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{3}{x} - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx.$$

$$2.5 \int \left( \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{6}{x^2 - 4} + \frac{3}{\sqrt{7 - x^2}} + e^x \right) dx.$$

$$2.6 \int \left( 5^x + \frac{3}{7 + x^2} + \frac{5}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx.$$

$$2.7 \int \left( \frac{8}{x} + \frac{2}{16 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx.$$

$$2.8 \int \left( \sin x + \frac{9}{x^2 + 1} + e^x - \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \right) dx.$$

$$2.9 \int \left( \frac{10}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} + \frac{5}{\sqrt{x^2 - 6}} + \frac{3}{x^2 - 6} \right) dx.$$

$$2.10 \int \left( 2^x + \frac{7}{x^2 - 4} + \frac{5}{x} - \frac{8}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx.$$

### 3.2 Интегрирование методом поднесения под знак дифференциала и замены переменной

На практике часто встречаются интегралы вида:

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx,$$

или интегралы, которые сводятся к такому виду. Подведем в этом интеграле множитель  $\phi'(x)$  под знак дифференциала:  $\phi'(x) = d(\phi(x))$ , а затем произведем подстановку  $\phi(x) = t$ . В результате получим формулу подстановки в неопределенном интеграле:

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int f(\phi(x)) d(\phi(x)) = [\phi(x) = t] = \int f(t) dt + C. \quad (3.2)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению интеграла  $\int f(t) dt$ , который либо уже табличный, либо легко сводится к табличному, и обратной подстановке  $t = \phi(x)$ .

**Пример 1.** Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \sin 2x dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{9x-4}; \text{ в) } \int \frac{x^2}{\sqrt{4x^3+1}} dx; \text{ г) } \int \frac{\ln^5 x}{x} dx; \text{ д) } \int \sin^4 3x \cdot \cos 3x dx.$$

**Решение.**

$$\text{а) } \int \sin 2x dx = \left[ dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x) \right] = \int \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 2x \cdot d(2x) = [2x = t] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos t + C = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{9x-4} = \left[ dx = \frac{1}{9} \cdot d(9x-4) \right] = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{d(9x-4)}{9x-4} = [9x-4 = t] = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{9} \ln|9x-4| + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2}{\sqrt{4x^3+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x^3+1}} \cdot x^2 dx = \left[ x^2 dx = \frac{1}{12} \cdot d(4x^3+1) \right] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \int (4x^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(4x^3+1) = [4x^3+1 = t] = \frac{1}{12} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{t} + C = \frac{1}{6} \sqrt{4x^3+1} + C;$$

$$\text{г) } \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \ln^5 x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[ \frac{1}{x} dx = d(\ln x) \right] = \int (\ln x)^5 \cdot d(\ln x) = [\ln x = t] = \int t^5 dt =$$

$$= \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C;$$

$$\text{д) } \int \sin^4 3x \cdot \cos 3x dx = \left[ \cos 3x dx = \frac{1}{3} \cdot d(\sin 3x) \right] = \frac{1}{3} \cdot \int (\sin 3x)^4 \cdot d(\sin 3x) =$$

$$= [\sin 3x = t] = \frac{1}{3} \cdot \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{15} \sin^5 3x + C.$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

|                                      |                                 |                                |
|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 1.1 $\int \frac{dx}{5+6x}$           | 1.2 $\int (5x-7)^4 dx$          | 1.3 $\int \frac{dx}{(2+3x)^5}$ |
| 1.4 $\int \sqrt[3]{2-9x} dx$         | 1.5 $\int \cos 6x dx$           | 1.6 $\int \sin(2-5x) dx$       |
| 1.7 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+7}}$ | 1.8 $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$ | 1.9 $\int 4^{3x-2} dx$         |

2. Найти неопределенные интегралы.

|                                         |                                            |                                    |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------|
| 2.1 $\int 5x \cdot (7x^2 - 1)^3 dx$     | 2.2 $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{3x^5 + 4} dx$ | 2.3 $\int \frac{x^2}{8x^3 - 3} dx$ |
| 2.4 $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$ | 2.5 $\int x^3 \cdot \sin(2x^4 + 5) dx$     | 2.3 $\int x^2 \cdot 6^{x^3} dx$    |

3. Найти неопределенные интегралы.

|                                                                |                                                              |                                                 |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 3.1 $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$         | 3.2 $\int \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$     | 3.3 $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}$ |
| 3.4 $\int \frac{2^{\operatorname{arcsin} x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | 3.5 $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$ | 3.6 $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$           |

4. Найти неопределенные интегралы.

|                                                  |                                                                 |                                                           |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 4.1 $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{\sin 3x + 4}}$ | 4.2 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 4x} dx}{\sin^2 4x}$ | 4.3 $\int \frac{\operatorname{arccotg}^3 7x dx}{1+49x^2}$ |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

|                                            |                                                               |                                                         |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1.1 а) $\int \sqrt[3]{(5x-1)^2} dx$ ;      | б) $\int \frac{xdx}{7x^2-8}$ ;                                | в) $\int \cos 5x dx$ ;                                  |
| г) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x} dx}{x}$ ; | д) $\int \frac{\operatorname{arcsin}^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; | е) $\int \sqrt{\cos 3x} \sin 3x dx$ .                   |
| 1.2 а) $\int \sqrt[4]{3x+2} dx$ ;          | б) $\int x^2 \cdot (2x^3+9)^4 dx$ ;                           | в) $\int \sin 7x dx$ ;                                  |
| г) $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx$ ;     | д) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$ ;    | е) $\int \frac{\operatorname{tg}^4 2x dx}{\cos^2 2x}$ . |
| 1.3 а) $\int \frac{dx}{7-8x}$ ;            | б) $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{3x^4+7} dx$ ;                     | в) $\int e^{2x+1} dx$ ;                                 |

|                                                                   |                                                            |                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| г) $\int \frac{\arcsin^2 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$                 | д) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x \cos^2 x}}.$  | е) $\int \frac{\ln^6(7x+2) \, dx}{7x+2}.$                          |
| 1.4 а) $\int \frac{dx}{(3x+4)^5};$                                | б) $\int x^4 \cdot \sqrt[7]{(2x^5-9)^2} \, dx;$            | в) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x};$                                    |
| г) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}};$ | д) $\int \sin^3 x \cos x dx;$                              | е) $\int \frac{dx}{\ln(6x+1)(6x+1)}.$                              |
| 1.5 а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-1)^5}};$                      | б) $\int \frac{x^5 dx}{1-3x^6};$                           | в) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x};$                                   |
| г) $\int \frac{dx}{\ln^2 x \cdot x};$                             | д) $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$            | е) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x} \, dx}{1+4x^2}.$        |
| 1.6 а) $\int (1-7x)^5 \, dx;$                                     | б) $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt[4]{(5x^7+2)^3}};$             | в) $\int 6^{3-2x} \, dx;$                                          |
| г) $\int \frac{\operatorname{ctg}^7 x \, dx}{\sin^2 x};$          | д) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\ln^2 x \cdot x}};$            | е) $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos 5x} \, dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$       |
| 1.7 а) $\int \sqrt[5]{(8x+3)^4} \, dx;$                           | б) $\int \frac{x^7 dx}{(3x^8-2)^2};$                       | в) $\int \frac{dx}{1+9x^2};$                                       |
| г) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}};$                     | д) $\int \frac{\arccos^3 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$          | е) $\int e^{c \sin 3x} \cos 3x dx.$                                |
| 1.8 а) $\int \frac{dx}{10x+7};$                                   | б) $\int x^8 \cdot \sqrt[6]{3x^9+4} \, dx;$                | в) $\int \sin(7-5x) \, dx;$                                        |
| г) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x} dx}{x};$                           | д) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)};$ | е) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} 3x \cdot \sin^2 3x}}.$ |
| 1.9 а) $\int \sqrt{(9x+5)^3} \, dx;$                              | б) $\int \frac{x^2 dx}{7-5x^3};$                           | в) $\int \cos(4x+5) \, dx;$                                        |
| г) $\int \frac{5^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$                  | д) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x};$                      | е) $\int \frac{dx}{(1-2x)\sqrt[3]{\ln^2(1-2x)}}.$                  |
| 1.10 а) $\int (4x-5)^3 \, dx;$                                    | б) $\int \frac{x dx}{(4x^2+9)^5};$                         | в) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-5x)};$                                 |
| г) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};$                             | д) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2 x} dx}{x};$                  | е) $\int \frac{\operatorname{tg}^7 9x \, dx}{\cos^2 9x}.$          |

### 3.3 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (3.3)$$

где  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции. Формула (3.3) называется **формулой интегрирования по частям**. Применять ее целесообразно тогда, когда подынтегральное выражение можно разбить на два множителя  $u$  и  $dv$  так, чтобы интегрирование выражений  $dv$  и  $v du$  являлось задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения  $u dv$ . Иногда формулу (3.3) приходится применять несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям. Пусть  $P_n(x)$  – многочлен степени  $n$  и  $k, b \in R, k \neq 0$ .

### 1. Интегралы вида

$$\int P_n(x) \cdot \sin(kx + b) dx, \int P_n(x) \cdot \cos(kx + b) dx, \int P_n(x) \cdot e^{kx+b} dx, \int P_n(x) \cdot a^{kx+b} dx.$$

В этом случае  $u = P_n(x)$ , а за  $dv$  возьмем  $\sin(kx + b), \cos(kx + b), e^{kx+b}$  и  $a^{kx+b}$  соответственно. Причем формулу интегрирования по частям (3.3) придется применять столько раз, какова степень многочлена  $P_n(x)$ .

### 2. Интегралы вида

$$\int P_n(x) \cdot \ln(kx + b) dx, \int P_n(x) \cdot \arcsin(kx + b) dx, \int P_n(x) \cdot \arccos(kx + b) dx, \\ \int P_n(x) \cdot \arctg(kx + b) dx, \int P_n(x) \cdot \text{arcctg}(kx + b) dx.$$

В этом случае за  $u$  берут  $\ln(kx + b), \arcsin(kx + b), \arccos(kx + b), \arctg(kx + b)$  или  $\text{arcctg}(kx + b)$  соответственно, а  $dv = P_n(x) dx$ .

**Пример 1.** Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int (2x^2 + 1) \cdot e^{3x} dx; \text{ б) } \int (9x^2 - 4) \cdot \ln 5x dx.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (2x^2 + 1) \cdot e^{3x} dx &= \left[ \begin{array}{l} u = 2x^2 + 1 \Rightarrow du = d(2x^2 + 1) = (2x^2 + 1)' dx = 4x dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \end{array} \right] = \\ &= (2x^2 + 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 4x dx = \frac{1}{3} \cdot (2x^2 + 1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \int x \cdot e^{3x} dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \cdot (2x^2 + 1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2x^2 + 1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \right) + C = \\ &= \frac{1}{3} (2x^2 + 1) e^{3x} - \frac{4}{9} x e^{3x} + \frac{4}{27} e^{3x} + C; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int (9x^2 - 4) \cdot \ln 5x dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln 5x \Rightarrow du = d(\ln 5x) = (\ln 5x)' dx = \frac{5}{5x} dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = (9x^2 - 4) dx \Rightarrow v = \int (9x^2 - 4) dx = 3x^3 - 4x \end{array} \right] =$$

$$= \ln 5x \cdot (3x^3 - 4x) - \int (3x^3 - 4x) \cdot \frac{1}{x} dx = (3x^3 - 4x) \ln 5x - \int (3x^2 - 4) dx =$$

$$= (3x^3 - 4x) \ln 5x - x^3 + 4x + C.$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

$$1.1 \int (10x + 1) \cdot \sin 5x dx. \quad 1.2 \int (2 - 7x) \cdot e^{4x} dx. \quad 1.3 \int (2x + 5) \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$1.4 \int (6x - 7) \cdot \cos(4x + 6) dx. \quad 1.5 \int (6x^2 - x + 5) \cdot \sin 2x dx. \quad 1.6 \int (x^2 + x) \cdot 3^x dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы.

$$2.1 \int (12x^3 + 3x^2 - 1) \ln 3x dx. \quad 2.2 \int \operatorname{arctg} 4x dx. \quad 2.3 \int \arccos 7x dx.$$

$$2.4 \int \ln \frac{x}{2} dx. \quad 2.5 \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx. \quad 2.6 \int \arcsin \frac{x}{6} dx.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

$$1.1 \int (5x^2 + 7) \cdot \sin 2x dx. \quad 1.2 \int (4x^2 - 5x) \cdot e^{3x} dx. \quad 1.3 \int (2x^2 - 3) \cdot \cos 4x dx.$$

$$1.4 \int (6x^2 - x) \cdot \cos 5x dx. \quad 1.5 \int (3x^2 + 5) \cdot 2^x dx. \quad 1.6 \int (7x^2 - 5) \cdot e^{-3x} dx.$$

$$1.7 \int (6 - 2x^2) \cdot 3^x dx. \quad 1.8 \int (x^2 + 9x) \cdot \sin \frac{x}{6} dx. \quad 1.9 \int (4x^2 + x) \cdot \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$1.10 \int (18x^2 + 9) \cdot \sin 9x dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы.

$$2.1 \int (14x^6 + 8x^3) \ln 2x dx. \quad 2.2 \int (10x^4 - 6x^2) \ln 3x dx. \quad 2.3 \int (6x^5 - 2x) \ln 4x dx.$$

$$2.4 \int (6x^2 + 4x) \ln 6x dx. \quad 2.5 \int (8x^3 - 5) \ln 7x dx. \quad 2.6 \int (12x + 9) \ln 8x dx.$$

$$2.7 \int (16x^7 - x) \ln 5x dx. \quad 2.8 \int (18x^8 + 5) \ln 3x dx. \quad 2.9 \int (x^9 - 8x^3) \ln x dx.$$

$$2.10 \int (5x^3 + 8x) \ln 6x dx.$$

## 3.4 Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (3.4)$$

С помощью выделения полного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

и последующей замены  $t = x + \frac{b}{2a}$  интеграл  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$  в зависимости от знака выражения  $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$  приводится к одному из интегралов вида:

$$\int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \cdot \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + C, \quad \int \frac{dt}{k^2 + t^2} = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C;$$

а интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  сводится к интегралу:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm k^2} \right| + C,$$

если  $a > 0$ , и к интегралу:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{k} + C,$$

если  $a < 0$ .

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \quad (3.5)$$

где  $A \neq 0$ .

В числителях подынтегральных дробей надо выделить выражение:

$$2ax + b = (ax^2 + bx + c)',$$

а в знаменателях – полный квадрат. После этого интеграл  $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$  представляют в виде суммы двух интегралов, первый из которых сводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C,$$

а второй – к интегралу  $\int \frac{dt}{t^2 - k^2}$  или  $\int \frac{dt}{k^2 + t^2}$ .

Интеграл  $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$  также представляют в виде суммы двух интегралов, первый из которых сводится к интегралу:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C,$$

а второй – к интегралу  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$  или  $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$ .

**Пример 1.** Найти неопределенные интегралы:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}}.$$

**Решение.**

$$\text{a) } \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} = I,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left[ dx = d\left(x - \frac{3}{4}\right) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{3}{4}\right)}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left[ t = x - \frac{3}{4} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \ln \left| \frac{x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \right| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{2x-2}{2x-1} \right| + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} = I,$$

$$3 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 3) = -((x-1)^2 - 1 - 3) = -((x-1)^2 - 4) = 2^2 - (x-1)^2,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} = [dx = d(x-1)] = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} = [x-1 = t] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

**Пример 2.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx$ .

**Решение.** Получим в числителе производную квадратного трехчлена и далее, воспользовавшись свойствами неопределенного интеграла, представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx &= \left[ (x^2 + 6x + 2)' = 2x + 6 \right] = 3 \cdot \int \frac{x + \frac{4}{3}}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 6 - 6 + \frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+6-\frac{10}{3}}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \frac{3}{2} \int \left( \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+2}} - \frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{x^2+6x+2}} \right) dx = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx - \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} = I.
\end{aligned}$$

Вычислим каждый из интегралов по отдельности:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} &= \left[ (2x+6)dx = d(x^2+6x+2) \right] = \int \frac{d(x^2+6x+2)}{\sqrt{x^2+6x+2}} = [x^2+6x+2=t] = \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+6x+2} + C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} &= \left[ x^2+6x+2 = (x+3)^2 - 9 + 2 = (x+3)^2 - 7, \right. \\
&\quad \left. dx = d(x+3) \right] = \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2 - 7}} = \\
&= [x+3=t] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-7}} = \ln|t + \sqrt{t^2-7}| + C = \ln|x+3 + \sqrt{(x+3)^2-7}| + C = \\
&= \ln|x+3 + \sqrt{x^2+6x+2}| + C.
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+6x+2} - 5 \ln|x+3 + \sqrt{x^2+6x+2}| + C = \\
&= 3\sqrt{x^2+6x+2} - 5 \ln|x+3 + \sqrt{x^2+6x+2}| + C.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1  $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}.$

1.2  $\int \frac{dx}{4x^2-16x+2}.$

1.3  $\int \frac{dx}{\sqrt{4+10x-x^2}}$

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-8x+4}} dx.$

2.2  $\int \frac{x}{2x^2+6x+8} dx.$

2.3  $\int \frac{2x+7}{\sqrt{4-2x-2x^2}} dx.$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 а)  $\int \frac{dx}{3x^2-3x-12};$

б)  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{7-4x-x^2}} dx.$

$$1.2 \text{ a) } \int \frac{dx}{5x^2 + 15x + 3};$$

$$1.3 \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 2x + 8}};$$

$$1.4 \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - 3x^2}};$$

$$1.5 \text{ a) } \int \frac{dx}{6x^2 - 3x + 12};$$

$$1.6 \text{ a) } \int \frac{dx}{2x^2 + 7x + 1};$$

$$1.7 \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 4x^2}};$$

$$1.8 \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x - 3x^2}};$$

$$1.9 \text{ a) } \int \frac{dx}{3x^2 + x + 9};$$

$$1.10 \text{ a) } \int \frac{dx}{2x^2 - 10x + 5};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 - x + 3}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{3x + 1}{2x^2 + 8x - 5} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{6x - 5}{4x^2 - 8x + 3} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{5x - 4}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{5x + 2}{3x^2 + 12x - 6} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{3x - 1}{2x^2 + 8x + 10} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{6x + 3}{\sqrt{2x^2 - 10x + 3}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{3x - 7}{\sqrt{1 + 16x - x^2}} dx.$$

### 3.5 Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на простейшие дроби

**Рациональной дробью** называется дробь вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – многочлены.

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена  $P(x)$  числителя ниже степени многочлена  $Q(x)$  знаменателя, в противном случае дробь называется **неправильной**.

**Простейшей дробью** называется правильная дробь одного из следующих типов :

$$1) \frac{A}{x - a};$$

$$2) \frac{A}{(x - a)^n} \text{ где } n \geq 2, n \in N;$$

3)  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ , где  $p^2-4q < 0$ , т. е. квадратный трехчлен  $x^2+px+q$  не

имеет действительных корней;

4)  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$ , где  $m \geq 2$ ,  $m \in N$  и квадратный трехчлен  $x^2+px+q$  не

имеет действительных корней.

Во всех случаях  $A, B, p, q$  – действительные числа.

Перед интегрированием рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  необходимо

выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть и представить эту дробь в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где  $M(x)$  – многочлен,  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^s \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \dots,$$

где квадратичные множители не имеют действительных корней.

3. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \\ & + \dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{C_lx+D_l}{(x^2+px+q)^l} + \dots \end{aligned}$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты  $A_i, B_i, C_i, D_i, \dots$ . Для этого привести правую часть последнего равенства к общему знаменателю. В результате получим тождество, в котором равны знаменатели:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}, \quad (3.6)$$

где  $S(x)$  – многочлен с неопределенными коэффициентами.

Поскольку в тождестве (3.6) равны знаменатели, значит, должны быть тождественно равны и числители:

$$R(x) = S(x). \quad (3.7)$$

Далее применяем один из методов.

**Метод приравнивания коэффициентов.** Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$  в левой и правой частях тождества (3.7) и решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

**Метод частных значений.** Придать переменной  $x$  в тождестве (3.7) поочередно столько конкретных числовых значений, сколько неизвестных коэффициентов и решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Заметим, что иногда полезно комбинировать оба метода вычисления коэффициентов.

Таким образом, интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

**Пример 1.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{5x^2 - 13x + 20}{x^3 - 3x^2 + 4x} dx$ .

**Решение.** Под знаком интеграла правильная рациональная дробь, разложим ее знаменатель на множители:

$$\int \frac{5x^2 - 13x + 20}{x^3 - 3x^2 + 4x} dx = \int \frac{5x^2 - 13x + 20}{x \cdot (x^2 - 3x + 4)} dx = I.$$

Представим полученную правильную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{5x^2 - 13x + 20}{x \cdot (x^2 - 3x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 3x + 4} = \frac{A \cdot (x^2 - 3x + 4) + (Bx + C) \cdot x}{x \cdot (x^2 - 3x + 4)} \Rightarrow$$

$$5x^2 - 13x + 20 = A \cdot (x^2 - 3x + 4) + (Bx + C) \cdot x,$$

$$5x^2 - 13x + 20 = Ax^2 - 3Ax + 4A + Bx^2 + Cx,$$

$$5x^2 - 13x + 20 = x^2 \cdot (A + B) + x \cdot (-3A + C) + 4A.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  применим метод приравнивания коэффициентов:

$$\left. \begin{array}{l} x^2: \quad 5 = A + B \\ x^1: -13 = -3A + C \\ x^0: \quad 20 = 4A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 5 \\ B = 0 \\ C = 2 \end{array} \right\}.$$

Тогда:

$$\frac{5x^2 - 13x + 20}{x \cdot (x^2 - 3x + 4)} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4}.$$

Вернемся к вычислению интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} \right) dx = 5 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4} = \\ &= \left[ x^2 - 3x + 4 = \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} = \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5\ln|x| + 2\int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 5\ln|x| + 2 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \\
&= 5\ln|x| + \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x-4}{x^3-x^2} dx$ .

**Решение.** Под знаком интеграла правильная рациональная дробь, разложим ее знаменатель на множители:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2} dx = \int \frac{x-4}{x^2 \cdot (x-1)} dx = I.$$

Представим полученную правильную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{x^2 \cdot (x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \Rightarrow \\
x-4 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2.
\end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  применим метод частных значений:

$$\left. \begin{aligned} x=1: & \quad -3=C \\ x=0: & \quad -4=-B \\ x=-1: & -5=2A-2B+C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 4 \\ C &= -3 \end{aligned} \right\}.$$

Тогда:

$$\frac{x-4}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x-1}.$$

Вернемся к вычислению интеграла:

$$\begin{aligned}
I &= \int \left( \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x-1} \right) dx = 3\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{x^2} - 3\int \frac{dx}{x-1} = 3\ln|x| + 4\int x^{-2} dx - 3\int \frac{d(x-1)}{x-1} = \\
&= 3\ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 3\ln|x-1| + C = 3\ln|x| - \frac{4}{x} - 3\ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|^3 - \frac{4}{x} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{2x^4+x^2+16x}{x^3+8} dx$ .

**Решение.** Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь, выделим ее целую часть, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\frac{2x^4+x^2+16x}{x^3+8} = 2x + \frac{x^2}{x^3+8}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^4 + x^2 + 16x}{x^3 + 8} dx = \int \left( 2x + \frac{x^2}{x^3 + 8} \right) dx = 2 \int x dx + \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 8} = \left[ x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 8) \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(x^3 + 8)}{x^3 + 8} = x^2 + \frac{1}{3} \ln|x^3 + 8| + C.$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} 1.1 \int \frac{4x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx. & 1.2 \int \frac{x - 140}{x^3 + 7x^2} dx. & 1.3 \int \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 6x}{x^2 + 3} dx. \\ 1.4 \int \frac{3x^2 + 2x + 12x - 6}{(x^2 + 4)(x^2 + 3)} dx. & 1.5 \int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx. & 1.6 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} dx. \end{array}$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} 1.1 \text{ а) } \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx; & \text{б) } \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx; & \text{в) } \int \frac{x^4 + 16x^2 + x - 1}{x^2 + 4} dx. \\ 1.2 \text{ а) } \int \frac{-x^2 - 3x + 1}{x^4 - x^3} dx; & \text{б) } \int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx; & \text{в) } \int \frac{2x^5 + x^3 - 4x^2 - 5}{x + 1} dx. \\ 1.3 \text{ а) } \int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx; & \text{б) } \int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx; & \text{в) } \int \frac{2x^5 - 4x^4 + 9}{x^2 + 2} dx. \\ 1.4 \text{ а) } \int \frac{3x^2 - 12x - 18}{x^2(x + 3)^2} dx; & \text{б) } \int \frac{x^3 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)} dx; & \text{в) } \int \frac{5x^3 + x^2 - 3}{x + 1} dx. \\ 1.5 \text{ а) } \int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2} dx; & \text{б) } \int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)} dx; & \text{в) } \int \frac{x^4 + 8}{x^2 + 3} dx. \\ 1.6 \text{ а) } \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx; & \text{б) } \int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)} dx; & \text{в) } \int \frac{2x^4 - 10x^3 + 1}{x + 1} dx. \\ 1.7 \text{ а) } \int \frac{4x^2 - x + 2}{x(x + 2)^3} dx; & \text{б) } \int \frac{6x + 9}{(x^2 + 4)(x^2 + 6x + 13)} dx; & \text{в) } \int \frac{x^5 + 2x^3 + x - 3}{x^2 + 2} dx. \\ 1.8 \text{ а) } \int \frac{4x^2}{(x - 1)^2(x + 1)} dx; & \text{б) } \int \frac{5x^2 + 2x + 5}{x^3 + x^2 + x} dx; & \text{в) } \int \frac{x^3 - 16x^2 + 64}{x - 4} dx. \\ 1.9 \text{ а) } \int \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 - 1)} dx; & \text{б) } \int \frac{2x^2 + 7x + 7}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)} dx; & \text{в) } \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx. \end{array}$$

$$1.10 \text{ а) } \int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 - x^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 + 8x - 2}{x^4 + 4x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^3 - 16}{x - 2} dx.$$

### 3.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Выражение  $R(u;v)$  называют *рациональной функцией относительно  $u, v$* , если оно получено из любых величин  $u, v$  с помощью четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление).

I. Интегралы вида:

$$\int R(\sin x; \cos x) dx,$$

где  $R$  – рациональная функция аргументов  $\sin x$  и  $\cos x$ , рационализируются с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

В результате этой подстановки имеем:

$$\begin{aligned} x = 2 \operatorname{arctg} t &\Rightarrow dx = d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2} dt, \\ \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \int R(\sin x; \cos x) dx &= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям, поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции. Укажем эти случаи.

1. Если  $R(\sin x; \cos x)$  – четная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , то есть:

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x),$$

то применяется подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ . При этом используются формулы:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

2. Если  $R(\sin x; \cos x)$  – нечетная функция относительно  $\sin x$ , то есть:

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x),$$

то применяется подстановка  $\cos x = t$ .

3. Если  $R(\sin x; \cos x)$  – нечетная функция относительно  $\cos x$ , то есть:

$$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x),$$

то применяется подстановка  $\sin x = t$ .

## II. Интегралы вида:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$$

находят с помощью различных формул тригонометрии, применение которых зависит от показателей степеней  $m$  и  $n$ . Рассмотрим некоторые случаи.

1. Если  $m$  положительно и нечетно, то:

$$\begin{aligned} \sin^m x dx &= (\sin x)^{m-1} \cdot \sin x dx = -(\sin x)^{m-1} \cdot d(\cos x) = -(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot d(\cos x) = \\ &= -(1 - \cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot d(\cos x); \end{aligned}$$

далее применяют подстановку  $\cos x = t$ .

2. Если  $n$  положительно и нечетно, то:

$$\begin{aligned} \cos^n x dx &= (\cos x)^{n-1} \cdot \cos x dx = (\cos x)^{n-1} \cdot d(\sin x) = (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot d(\sin x) = \\ &= (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot d(\sin x); \end{aligned}$$

далее применяют подстановку  $\sin x = t$ .

3. Если же  $m$  и  $n$  – положительные и четные, то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул тригонометрии:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

## III. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cdot \cos bxdx, \int \cos ax \cdot \cos bxdx, \int \sin ax \cdot \sin bxdx$$

находят с помощью следующих формул тригонометрии, соответственно:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

**Пример 1.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$ .

**Решение.** Для рационализации подынтегральной функции воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x} &= \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{dx}{5 - 4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{5 \cdot (1+t^2) - 8t + 3 \cdot (1-t^2)} = \int \frac{2dt}{2t^2 - 8t + 8} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int (t-2)^{-2} d(t-2) = \frac{(t-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t-2} + C = \\
&= \left[ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ .

**Решение.** Для подынтегральной функции  $R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

выполняется условие:

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{3(-\cos x)^2 + 4(-\sin x)^2} = \frac{1}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то воспользуемся подстановкой  $\operatorname{tg} x = t$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} &= \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{3 + 4t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{3}{4} + t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + t^2} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = [t = \operatorname{tg} x] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$ .

**Решение.** В данном случае имеем интеграл вида II, в котором  $m = -6$ ,  $n = 5$ .

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x)^2 \cdot \cos x dx}{\sin^6 x} = \left[ \begin{array}{l} \cos x dx = d(\sin x), \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 \cdot d(\sin x)}{\sin^6 x} = [\sin x = t] = \int \frac{(1 - t^2)^2 \cdot dt}{t^6} = \int \frac{(1 - 2t^2 + t^4) \cdot dt}{t^6} = \\
&= \int \left( \frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{t^{-5}}{-5} - 2 \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = [t = \sin x] = \\
&= -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{2}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 4.** Найти неопределенный интеграл  $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ .

**Решение.** В данном случае имеем интеграл вида III, в котором  $a = 5$ ,  $b = 3$ .

$$\begin{aligned}
\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx &= \left[ \begin{aligned} \sin \alpha x \cdot \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \Rightarrow \\ \sin 5x \cdot \cos 3x &= \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 8x) \end{aligned} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 8x) dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{8} \cos 8x \right) + C = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1  $\int \frac{dx}{2 - 3 \cos x + \sin x}$ .

1.2  $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$ .

1.3  $\int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$ .

1.3  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$ .

1.4  $\int \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$ .

1.5  $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$ .

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1  $\int \frac{\sin 6x dx}{\cos^4 6x}$ .

2.2  $\int \sqrt[3]{\sin x} \cdot \cos^3 x dx$ .

2.3  $\int \cos^2 3x \cdot \sin^2 3x dx$ .

2.3  $\int \sin x \cos 5x dx$ .

2.4  $\int \sin 2x \sin 8x dx$ .

2.5  $\int \cos 2x \cos 3x dx$ .

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 а)  $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$ .

1.2 а)  $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$ .

1.3 а)  $\int \frac{dx}{\cos x - 3 \cos x}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}$ .

1.4 а)  $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9 \cos^2 x}$ .

1.5 а)  $\int \frac{dx}{1 - \cos x + 2 \sin x}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{5 \cos^2 x - 1}$ .

$$1.6 \text{ a) } \int \frac{dx}{2 + \sin x + 4 \cos x};$$

$$1.7 \text{ a) } \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x};$$

$$1.8 \text{ a) } \int \frac{dx}{4 + 2 \sin x + \cos x};$$

$$1.9 \text{ a) } \int \frac{dx}{2 - \sin x};$$

$$1.10 \text{ a) } \int \frac{dx}{4 - 2 \sin x + \cos x};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{7 - 2 \sin^2 x};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{8 \cos^2 x + 5};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{8 \sin^2 x + 16 \sin x \cos x};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sin^2 x - 8 \cos^2 x};$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos^2 x dx}{3 \cos^2 x + \sin^2 x};$$

2. Найти неопределенные интегралы.

$$2.1 \text{ a) } \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx;$$

$$\text{б) } \int \cos 5x \cdot \cos 7x dx.$$

$$2.2 \text{ a) } \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin x \cdot \sin 3x dx.$$

$$2.3 \text{ a) } \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 8x \cdot \cos x dx.$$

$$2.4 \text{ a) } \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx;$$

$$\text{б) } \int \cos 10x \cdot \cos 2x dx.$$

$$2.5 \text{ a) } \int \sqrt[5]{\cos^2 3x} \cdot \sin 3x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 8x \cdot \cos 5x dx.$$

$$2.6 \text{ a) } \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 4x \cdot \sin 5x dx.$$

$$2.7 \text{ a) } \int \cos^3 x \cdot \sin^7 x dx;$$

$$\text{б) } \int \cos x \cdot \cos 9x dx.$$

$$2.8 \text{ a) } \int \sqrt[3]{\cos^5 x} \cdot \sin^5 x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 4x \cdot \sin 6x dx.$$

$$2.9 \text{ a) } \int \frac{\cos 5x}{\sqrt[4]{\sin 5x}} dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 9x \cdot \sin 2x dx.$$

$$2.10 \text{ a) } \int \sqrt{\sin^7 x} \cdot \cos^3 x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

### 3.7 Интегрирование иррациональных функций с помощью дробно-линейной подстановки

Интегралы вида:

$$1) \int R \left( x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_r}{n_r}} \right) dx;$$

$$2) \int R \left( x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}} \right) dx;$$

$$3) \int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_r}{n_r}} \right) dx,$$

где  $R$  – рациональная функция,  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ , сводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки, соответственно

$$1) x = t^s; 2) ax + b = t^s; 3) \frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где  $s = \text{НОК}(n_1, \dots, n_r)$ .

**Пример 1.** Найти неопределенные интегралы:

$$a) \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}; \quad б) \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{2x+1}+1} dx.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\left(x^{\frac{1}{3}}+4\right) \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \left[ \begin{array}{l} s = \text{НОК}(3,2) = 6, \\ x = t^6 \Rightarrow \\ dx = d(t^6) = 6t^5 dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{6t^5 dt}{\left((t^6)^{\frac{1}{3}}+4\right) \cdot (t^6)^{\frac{1}{2}}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{(t^2+4) \cdot t^3} = 6 \int \frac{t^2}{t^2+4} dt = 6 \int \frac{t^2+4-4}{t^2+4} dt = \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt = 6 \int dt - 24 \int \frac{dt}{t^2+4} = 6t - 24 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + C = \left[ x = t^6 \Rightarrow t = x^{\frac{1}{6}} \right] = \\ &= 6\sqrt[6]{x} - 12 \arctg \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{2x+1}+1} dx &= \int \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^{\frac{1}{4}}+1} dx = \left[ \begin{array}{l} s = \text{НОК}(2,4) = 4, \\ 2x+1 = t^4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^4-1) \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{2} \cdot 4t^3 dt = 2t^3 dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{1}{4}}+1} \cdot 2t^3 dt = 2 \int \frac{t^5}{t+1} dt = \left[ \frac{t^5}{t+1} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int \left( t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \cdot \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - \ln|t+1| \right) + C = \\
&= \left[ t^4 = 2x+1 \Rightarrow t = (2x+1)^{\frac{1}{4}} \right] = \\
&= \frac{2}{5} (2x+1)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} (2x+1) + \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{4}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \ln \left| (2x+1)^{\frac{1}{4}} + 1 \right| + C = \\
&= \frac{2}{5} \sqrt[4]{(2x+1)^5} - \frac{1}{2} \sqrt[4]{2x+1} + \frac{2}{3} \sqrt[4]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1} - 2 \ln \left| \sqrt[4]{2x+1} + 1 \right| + C.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll}
1.1 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx. & 1.2 \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} - 1} dx. & 1.3 \int \frac{x^2 + \sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. \\
1.3 \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2} + \sqrt{(5x-2)^3}}. & 1.4 \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx. & 1.5 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{7x-3}}.
\end{array}$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{ll}
1.1 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{\sqrt[3]{3x+4} + 1} dx. \\
1.2 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}. \\
1.3 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[6]{x-3}} dx. \\
1.4 \text{ а) } \int \frac{x + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[6]{x} + 1} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt{5x-1} + 4}{\sqrt[4]{5x-1}} dx. \\
1.5 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} + 1)\sqrt{x}} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x+1)^2} - \sqrt{4x+1}}. \\
1.6 \text{ а) } \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x} - 2} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[6]{3x-1}} dx. \\
1.7 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt[6]{7x+1} + 2} dx. \\
1.8 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{3x + \sqrt[3]{x^2}} dx; & \text{б) } \int \frac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt[4]{5x+4} - 1} dx.
\end{array}$$

$$1.9 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}+1} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3} dx.$$

$$1.10 \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt[8]{4x+3}-1} dx.$$

### 3.8 Определенный интеграл, его свойства и вычисление

Пусть на отрезке  $[a; b]$  определена непрерывная функция  $y = f(x)$ . Разобьем отрезок  $[a; b]$  точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $n$  частичных отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$ , где  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . На каждом из отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$  выберем точку  $c_i$  и составим сумму  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина частичного отрезка. Эта сумма называется  $n$ -ой **интегральной суммой** функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ ; она зависит от способа разбиения и выбора точек  $c_i$ .

Если существует предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков стремится к бесконечности, а длина наибольшего из них — к нулю, не зависящий от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  и выбора промежуточных точек  $c_i$ , то говорят, что функция  $y = f(x)$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a; b]$ , а сам предел называют **определённым интегралом функции  $f(x)$  в пределах от  $x = a$  до  $x = b$**  и обозначают:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

При этом числа  $a$  и  $b$  называются соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования**.

**Теорема 1 (существования определённого интеграла).** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  существует.

#### Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна при  $x \in [a; b]$  и  $f(x) \geq 0$ . Фигура, ограниченная графиком функции  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $Ox$ , называется **криволинейной трапецией** (рис.3).

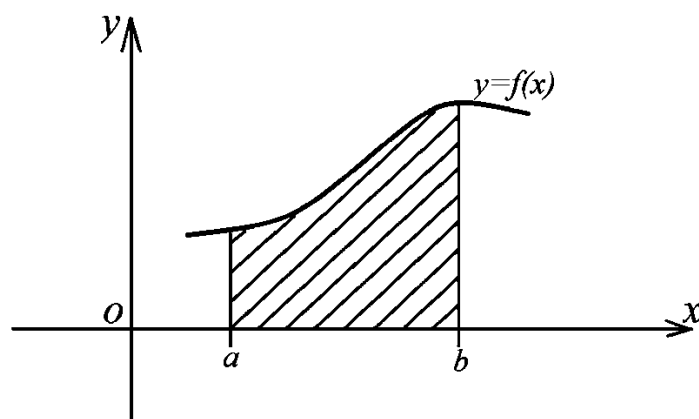


Рисунок 3 – Криволинейная трапеция

С геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Перечислим *основные свойства определенного интеграла*:

$$1) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$3) \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx;$$

$$4) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$5) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$6) \text{ если } f(x) \geq 0 \text{ (} f(x) \leq 0 \text{) при } \forall x \in [a; b] \text{ и } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\left( \int_a^b f(x)dx \leq 0 \right);$$

$$7) \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ если функция } y = f(x) \text{ четна на } [-a; a];$$

$$8) \int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ если функция } y = f(x) \text{ нечетна на } [-a; a].$$

Рассмотрим правила вычисления определенного интеграла.

**1. Формула Ньютона – Лейбница.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $F(x)$  – ее первообразная, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**2. Замена переменной в определенном интеграле.** Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , функция  $x = \varphi(t)$  определена и непрерывна вместе со своей производной  $\varphi'(t)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , причём для любого  $t \in [\alpha; \beta]$   $\varphi(t) \in [a; b]$ . Тогда, если  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

**3. Интегрирование по частям.** Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a; b]$ . Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Пример 1.** Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 (6x^2 - 4x - 1)dx; \quad \text{б) } \int_1^4 \left( \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

**Решение.** Воспользуемся свойствами 3), 4) определенного интеграла и формулой Ньютона-Лейбница.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^2 (6x^2 - 4x - 1)dx &= 6 \int_1^2 x^2 dx - 2 \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = \\ &= 2 \cdot x^3 \Big|_1^2 - x^2 \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \cdot (8 - 1) - (4 - 1) - (2 - 1) = 14 - 3 - 1 = 10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_1^4 \left( 9\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= 9 \cdot \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \cdot \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = 9 \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^4 + 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = \\ &= 6x\sqrt{x} \Big|_1^4 + 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 6 \cdot (8 - 1) + 4 \cdot (2 - 1) = 42 + 4 = 46. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3}.$$

**Решение.** Воспользуемся заменой переменной в определенном интеграле.

$$\text{а) } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \left[ x dx = -\frac{1}{2} d(4 - x^2) \right] = -\frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(4 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} = \left[ \begin{array}{l} t = 4 - x^2, \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2 \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_3^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \int_2^3 t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \Big|_2^3 = \sqrt{t} \Big|_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x=0 \Rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{1}{2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{dt}{2 \cdot (1-t^2) + 3 \cdot (1+t^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

**Пример 3.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^3 (x-2) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$ .

**Решение.** Воспользуемся интегрированием по частям.

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x-2) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx &= \left[ \begin{array}{l} u = x-2 \Rightarrow du = d(x-2) = dx \\ dv = e^{\frac{x}{3}} dx \Rightarrow v = \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3 \int e^{\frac{x}{3}} d\left(\frac{x}{3}\right) = 3e^{\frac{x}{3}} \end{array} \right] = \\ &= (x-2) \cdot 3e^{\frac{x}{3}} \Big|_0^3 - 3 \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx = (3e+6) - 9e^{\frac{x}{3}} \Big|_0^3 = (3e+6) - 9(e-1) = 15 - 6e. \end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Вычислить определенные интегралы.

1.1  $\int_0^1 (10x^4 + 6x - 5) dx.$

1.2  $\int_2^3 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$

1.3  $\int_1^8 (\sqrt[3]{x} + 4) dx.$

1.4  $\int_2^3 \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{x^2} dx.$

1.5  $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx.$

1.6  $\int_{-1}^1 \left( \frac{3}{1+x^2} - 2^x + 1 \right) dx.$

2. Вычислить определенные интегралы.

2.1  $\int_{-1}^1 x^2 (x^3 + 1)^4 dx.$

2.2  $\int_0^4 \sqrt{3x+4} dx.$

2.3  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx.$

$$2.4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$2.5 \int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x} dx.$$

$$2.6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$$

3. Вычислить определенные интегралы.

$$3.1 \int_1^2 (6x^2 + 1) \ln x dx.$$

$$2.2 \int_0^{\pi} (3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.3 \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определенные интегралы.

$$1.1 \text{ а) } \int_1^8 (8x^3 + \sqrt[3]{x} - \frac{10}{x^2}) dx;$$

$$\text{б) } \int_1^{e^2} (6x + 1) \ln x dx;$$

$$\text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)} dx.$$

$$1.2 \text{ а) } \int_1^4 (4x - 6\sqrt{x} + \frac{8}{x^3}) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} x \sin 2x dx;$$

$$\text{в) } \int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$1.3 \text{ а) } \int_1^{16} (8 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - 5\sqrt[4]{x}) dx;$$

$$\text{б) } \int_1^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx;$$

$$\text{в) } \int_{1/6}^2 \frac{dx}{3x^2-x+1}.$$

$$1.4 \text{ а) } \int_1^9 (x^2 + \frac{3}{\sqrt{x^3}} - 6\sqrt{x}) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}};$$

$$\text{в) } \int_6^8 \frac{dx}{x(x+2)}.$$

$$1.5 \text{ а) } \int_0^1 (x^4 + 3\sqrt[4]{x} - 5x) dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx;$$

$$\text{в) } \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$1.6 \text{ а) } \int_0^1 (x - 2\sqrt[7]{x} - 7) dx;$$

$$\text{б) } \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};$$

$$\text{в) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$1.7 \text{ а) } \int_{-8}^{-1} (6x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x^2}) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} x \sin 2x dx;$$

$$\text{в) } \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$$

$$1.8 \text{ а) } \int_{-1}^1 (12x^5 + \sqrt[5]{x} - 6\sqrt[7]{x^4}) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx;$$

$$\text{в) } \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

$$1.9 \text{ а) } \int_{-8}^0 (40x^4 - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} - 1) dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 (x-1) \ln x dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}.$$

$$1.10 \text{ а) } \int_1^9 (6x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}}) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{5x^4+4} dx;$$

$$\text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}.$$

### 3.9 Геометрические приложения определенных интегралов

Рассмотрим некоторые геометрические приложения определенных интегралов.

#### 1. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть плоская фигура  $D_1$  ограничена непрерывными линиями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ , причем  $f_1(x) \leq f_2(x)$  для  $\forall x \in [a; b]$ , и прямыми  $x = a, x = b$  (рис. 4).

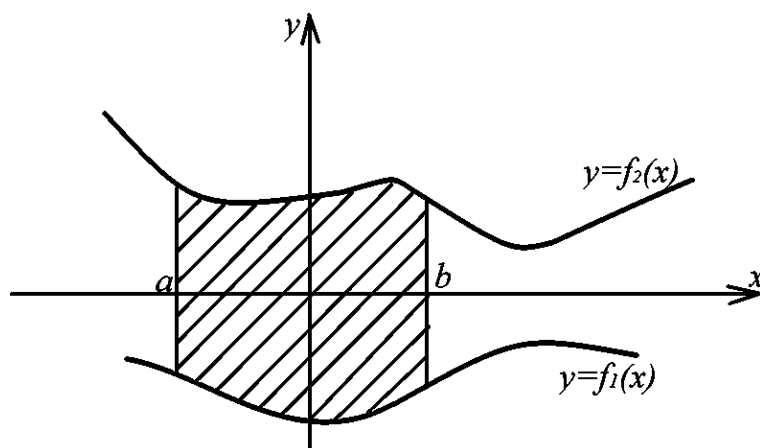


Рисунок 4 – Плоская фигура  $D_1$

Площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (3.8)$$

Пусть плоская фигура  $D_2$  ограничена непрерывными линиями  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$ , причем  $g_1(y) \leq g_2(y)$  для  $\forall y \in [c; d]$ , и прямыми  $y = c, y = d$  (рис. 5).

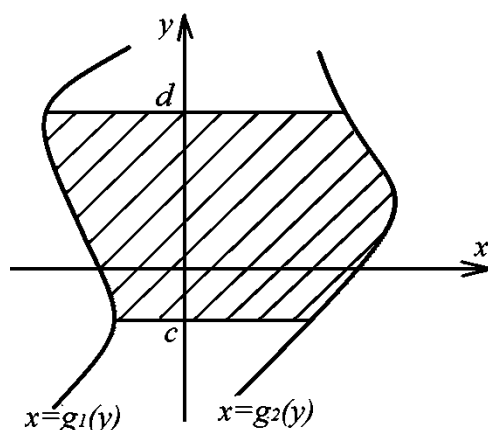


Рисунок 5. – Плоская фигура  $D_2$

Площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y)) dy. \quad (3.9)$$

## 2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если дуга кривой задана уравнением  $y = f(x)$  в промежутке  $[a; b]$  и функция  $y = f(x)$  имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между точками с абсциссами  $x = a$ ,  $x = b$  определяется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.10)$$

Если дуга кривой задана уравнением  $x = g(y)$  в промежутке  $[c; d]$  и функция  $x = g(y)$  имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между точками с ординатами  $y = c$ ,  $y = d$  определяется по формуле:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy. \quad (3.11)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции, а  $\alpha$  и  $\beta$  – значения параметра  $t$ , которые соответствуют концам дуги, то длина дуги кривой определяется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.12)$$

## 3. Вычисление объемов тел вращения

Пусть плоская фигура, ограниченная прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и кривыми  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ , причем  $f_1(x) \leq f_2(x)$  для  $\forall x \in [a; b]$ , вращается вокруг оси  $Ox$  (рис. 6). Объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx. \quad (3.13)$$

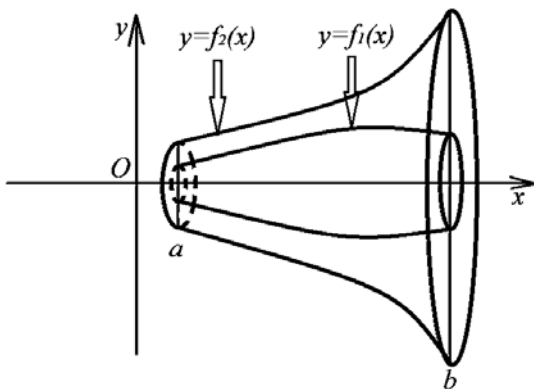


Рисунок 6 – Вид тела вращения  
вокруг оси  $Ox$

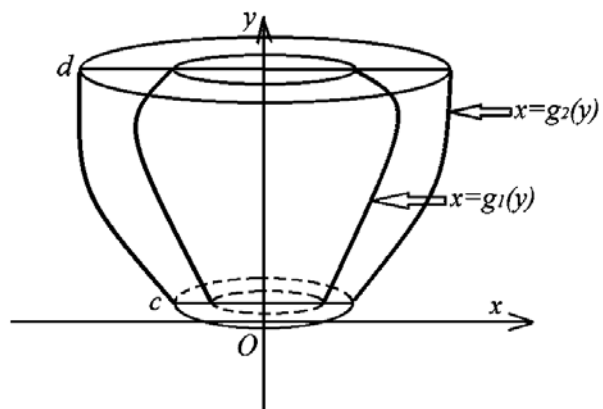


Рисунок 7 – Вид тела вращения  
вокруг оси  $Oy$

Пусть плоская фигура, ограниченная прямыми  $y = c$ ,  $y = d$  и кривыми  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$ , причем  $g_1(y) \leq g_2(y)$  для  $\forall y \in [c; d]$ , вращается вокруг оси  $Oy$  (рис. 7). Объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d (g_2^2(y) - g_1^2(y)) dy. \quad (3.14)$$

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 - x^2, y = \frac{1}{x}, x = 0,5, x = 1.$$

**Решение.** Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 8.

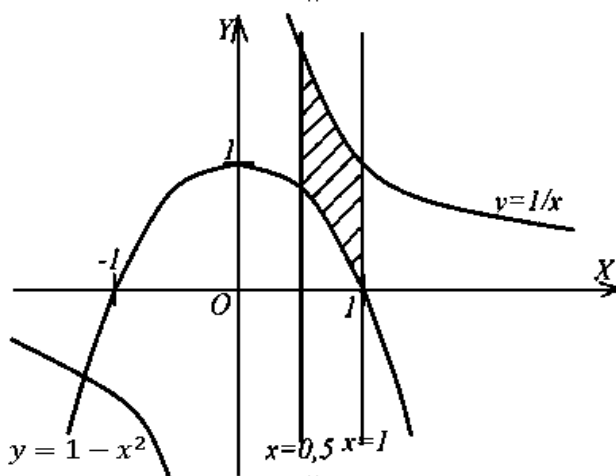


Рисунок 8 – Вид плоской фигуры

Для нахождения площади воспользуемся формулой (3.8):

$$\begin{aligned} S &= \int_{0,5}^1 \left( \frac{1}{x} - (1 - x^2) \right) dx = \int_{0,5}^1 \left( \frac{1}{x} - 1 + x^2 \right) dx = \left( \ln|x| - x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{0,5}^1 = \\ &= \ln 1 - 1 + \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \ln 2 - \frac{5}{24} \approx 0,48 \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 0,5$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (3.10). Сначала найдем производную функции:

$$f'(x) = (\ln(1 - x^2))' = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Тогда

$$l = \int_0^{0,5} \sqrt{1 + \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right)^2} dx = \int_0^{0,5} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}} dx = \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}} dx = \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}} dx = \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}} dx = - \int_0^{0,5} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx = \\
&= - \int_0^{0,5} \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} dx = - \int_0^{0,5} \left( 1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx = - \int_0^{0,5} dx - 2 \int_0^{0,5} \frac{dx}{x^2 - 1} = \\
&= -x \Big|_0^{0,5} - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{0,5} = -0,5 - \ln \frac{1}{3} + \ln 1 = \ln 3 - 0,5.
\end{aligned}$$

**Пример 3.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{2}x^2$  и  $2x + 2y - 3 = 0$ .

**Решение.** При вычислении объемов тел вращения нет необходимости изображать сами тела; достаточно построить только фигуры, которые будут вращаться. Найдем точки пересечения линий, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ 2x + x^2 - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ y_2 = 4,5, \\ x_2 = 1, \\ y_2 = 0,5. \end{cases}$$

Вид фигуры, которая будет вращаться вокруг оси  $Ox$ , представлен на рисунке 9.

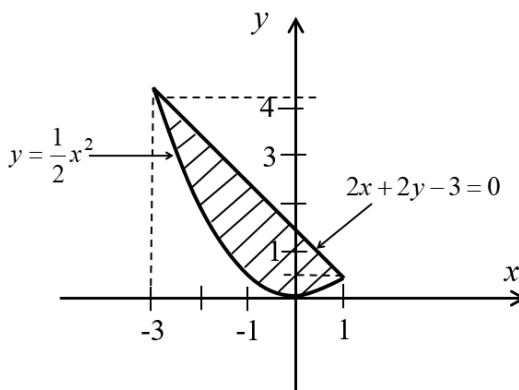


Рисунок 9 – Вид фигуры для вращения

Воспользуемся формулой (3.13):

$$\begin{aligned}
V_{ox} &= \pi \int_{-3}^1 \left( \left( \frac{3}{2} - x \right)^2 - \left( \frac{1}{2} x^2 \right)^2 \right) dx = \pi \int_{-3}^1 \left( \frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{1}{4} x^2 \right) dx = \\
&= \pi \left( \frac{9}{4} x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{20} x^5 \right) \Big|_{-3}^1 = \pi \left( \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{27}{4} + \frac{27}{2} + 9 - \frac{243}{20} \right) = \\
&= 18 \frac{2}{15} \pi \text{ (куб. ед.)}.
\end{aligned}$$

### Задания для решения на практическом занятии

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1.1  $y^2 = 2x + 1, y = x - 1.$

1.2  $x = y^2 + 1, x = 2y.$

1.3  $y = x^3, y = 8, x = 0.$

1.4  $y = \ln x, y = 0, y = 1, x = e^2.$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением.

2.1  $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{2}, 0 \leq x \leq 2.$

2.2  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq e.$

2.3  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

2.4  $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры  $\Phi$  вокруг оси  $Ox$  и  $Oy$ .

3.1  $\Phi: y = \frac{1}{x}, x = 0, y = \frac{1}{2}, y = 2.$

3.2  $\Phi: y = x^2 + 1, x = -1, x = 1, y = 0.$

### Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1.1  $x = y^2, x + y - 2 = 0.$

1.2  $y = x^2 + 1, x + y - 3 = 0.$

1.3  $y = x^3, 3x + y - 4 = 0.$

1.4  $y = -x^3, 4x - y - 5 = 0.$

1.5  $y = 2/x, y = 2x^2, x = 1/2.$

1.6  $y = -x^2 + 4, x - y + 2 = 0.$

1.7  $y = \sqrt{-x}, x + y + 2 = 0.$

1.8  $y = x, x + 2y - 6 = 0, x = 3.$

1.9  $x = y^2 - 1, x - y - 1 = 0.$

1.10  $y = x^3, 6x - y - 4 = 0, x = 1.$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением.

2.1  $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 4.$

2.2  $x = \ln \cos y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}.$

2.3  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \ln \pi.$

2.4  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

2.5  $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

2.6  $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

2.7  $y = \sqrt{-x}, x + y + 2 = 0.$

2.8  $y = x, x + 2y - 6 = 0, x = 3.$

2.9  $x = y^2 - 1, x - y - 1 = 0.$

2.10  $y = x^3, 6x - y - 4 = 0, x = 1.$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для вузов / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
2. Минюк С.А. Высшая математика для инженеров : учебное пособие : в 2-х т. Т. 1 / С. А. Минюк [и др.] ; под общ. ред. Н. А. Микулика. – Минск: Элайда, 2004. – 464 с.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2004.– 608 с.
4. Плющ, О. Б. Высшая математика: курс лекций : в 2-х ч. Ч. 2 : Математический анализ / О. Б. Плющ, Б. В. Новыш; Академия управления при Президенте Республики Беларусь. – 2-е изд., стер. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2006. – 199 с.
5. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – 5 -е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 304 с.
6. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике: учебное пособие : в 2 ч. Ч. 1. / Т. А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 416 с.
7. Цегельник В. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие по учебной дисциплине «Математика» / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с.

Учебное издание

**Высшая математика (Математика). Предел и непрерывность функций.  
Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Интегральное  
исчисление функции одной переменной  
Практикум для студентов**

Составители:  
Никонова Татьяна Викторовна  
Рубаник Оксана Евгеньевна

Редактор *Р.А. Никифорова*  
Корректор *А.С. Прокопюк*  
Компьютерная верстка *О.Е. Рубаник*

---

Подписано к печати 11.06.2024. Формат 60x90<sup>1/16</sup>. Усл. печ. листов 4,6.  
Уч.-изд. листов 3,7. Тираж 60 экз. Заказ № 144.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»  
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Витебский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.