Рисунок 2 – Нулевая ($n=0$) петля

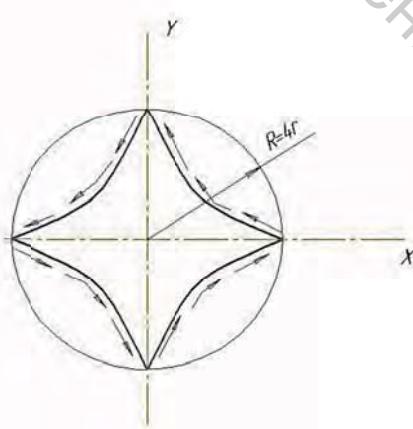
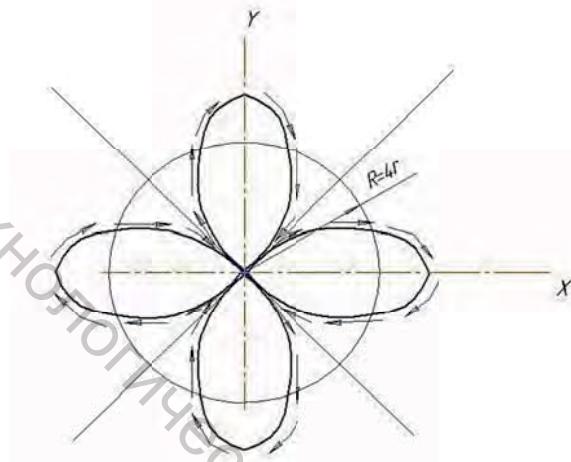
Выясним, при каких λ возможны касательные к петлям, исходящие из начала координат. Уравнение (2) дает требуемые неравенства

$$-1 \leq \frac{3 - \lambda^2}{2\lambda} \leq 1.$$

Их решение

$$1 \leq \lambda \leq 3.$$

При $\lambda = 1$ получается астроида [1], изображенная на рисунке 3. При $\lambda = 3$ траектория (1) изображена на рисунке 4.

Рисунок 3 – Астроида ($\lambda=1$)Рисунок 4 – Траектория (1) при $\lambda=3$

Список использованных источников

- Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Т.1 / В.И. Смирнов – Москва: Наука, 1974 – 480с.

УДК 685.341.83:539.3/.6

ПРОГИБЫ КРИВОЛИНЕЙНОГО И «ВЫПРЯМЛЕННОГО» ОБУВНЫХ ГЕЛЕНКОВ

Студ. Сапёлко В. В., Ефремова Ю.Ю., к.т.н., доц. Федосеев Г.Н.

Витебский государственный технологический университет

Одно из основных требований к женской обуви на высоком каблуке – достаточная жесткость ее геленоочной части, обеспечивающая надежную опору наружному продольному своду стопы. Поэтому актуально моделирование ее изгиба и на его основе прогнозирование прогибов геленоочной части обуви.

Наиболее простой аппарат, построенный для определения любого числа прогибов при изгибе прямолинейного стержня, – универсальное уравнение упругой кривой [1]. Однако, частая в практике форма геленка – дуга окружности. Возникает вопрос о допустимости замены этой дуги ее хордой. Разрешению названной проблемы посвящена настоящая работа.

На рисунке 1 показан защемленный геленок, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой.

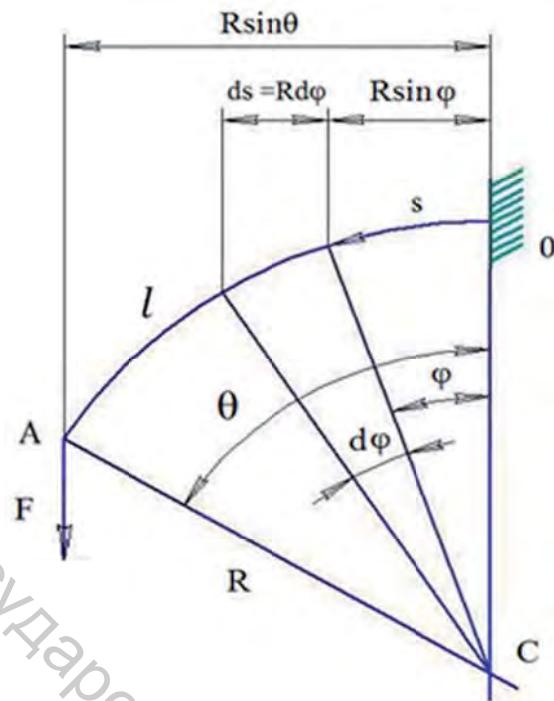


Рисунок 1 – К вычислению изгибающих моментов M_x и \overline{M}_1

Прогиб свободного конца геленка в направлении силы определяется интегралом Мора [1]

$$\Delta_A = \int_0^l \frac{M_x \overline{M}_1 ds}{EI_x}, \quad (1)$$

где $M_x(s)$ – изгибающий момент силы F , \overline{M}_1 – (единичный) изгибающий момент единичной силы, приложенной к свободному концу геленка в направлении искомого прогиба; $ds = Rd\phi$ – элемент дуги геленка радиуса R ; EI_x – жесткость поперечного сечения геленка (в нашем случае не изменяющегося по его длине l).

Изгибающие моменты в формуле (1)

$$M_x = FR(\sin\theta - \sin\varphi),$$

$$\overline{M}_1 = 1 \cdot R(\sin\theta - \sin\varphi).$$

Прогиб (1)

$$\Delta_A = \frac{FR^3}{EI_x} \int_0^\theta (\sin\theta - \sin\varphi)^2 d\phi = \frac{Fl^3}{EI_x} \frac{\theta \sin^2 \theta + 2 \sin\theta(\cos\theta - 1) + 0,5(\theta - 0,5 \sin 2\theta)}{\theta^3} \quad (2)$$

(где использовано выражение $l = R\theta$).

Проверим формулу (2), мысленно распределяя стержень на рисунке 1: предел прогиба (2) при $R = l/\theta \rightarrow \infty$ (при $\theta \rightarrow 0$) – результат раскрытия неопределенности $0/0$ по Лопиталю [2]

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Delta_A = \frac{Fl^3}{EI_x} \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} + 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta(\cos\theta - 1)}{\theta^3} + 0,5 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - 0,5 \sin 2\theta}{\theta^3} \right). \quad (3)$$

Все пределы в сумме (3) используют замечательный предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin\alpha / \alpha = 1$, предел прогиба (2)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Delta_A = \frac{Fl^3}{3EI_x}.$$

Найдем теперь прогиб прямого стержня – хорды криволинейного геленка (рисунок 2).

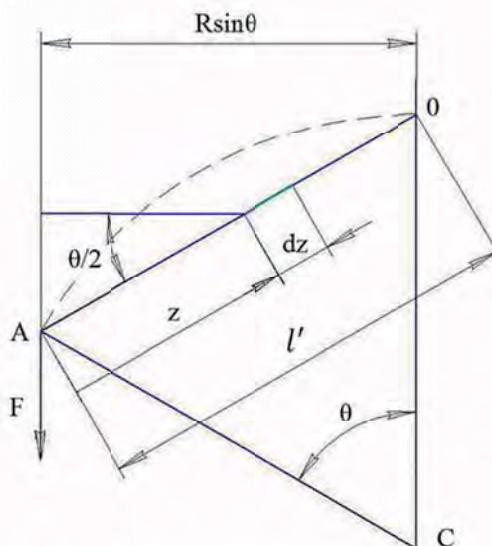


Рисунок 2 – Прямолинейный стержень – хорда криволинейного геленка

Изгибающие моменты в интеграле Мора (1)

$$M_x = Fz \cos \theta / 2, \\ \overline{M}_I = 1 \cdot z \cos \theta / 2,$$

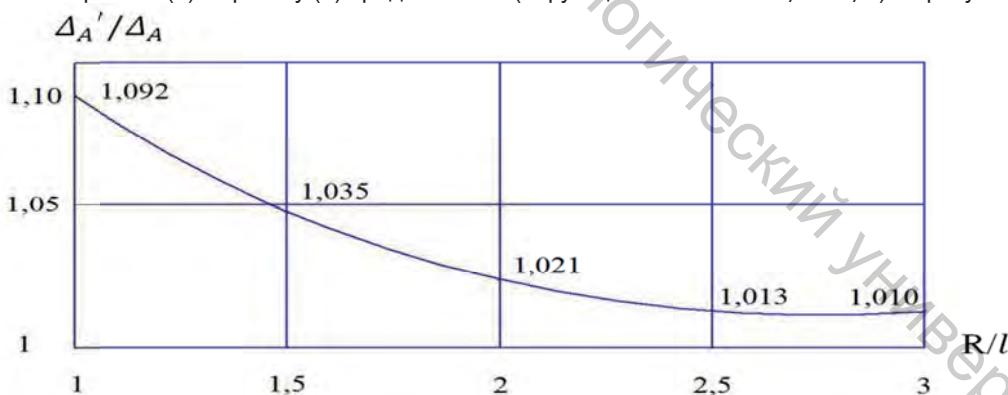
прогиб (1)

$$\Delta_A' = \frac{F}{EI_x} \cos^2 \frac{\theta}{2} \int_0^{l'} z^2 dz = \frac{Fl'^3}{3EI_x} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

где длина хорды

$$l' = 2R \sin \theta / 2; \\ \Delta_A' = \frac{2}{3} \frac{Fl^3}{EI_x} \frac{\sin^2 \theta \sin \theta / 2}{\theta^3}. \quad (4)$$

Отношение прогиба (4) к прогибу (2) представлено (в функции отношения $R/l = 1/\theta$) на рисунке 3.

Рисунок 3 – Отношение Δ_A'/Δ_A в функции $R/l = 1/\theta$

Были произведены измерения реальных геленков. Отношения R/l для них заключались в пределах от 2,8 до 5. Замена криволинейного геленка хордой (рисунок 2) приводит к погрешности, не превышающей 1%.

Список использованных источников

- Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов/В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1964. – 540с.
- Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Т.1/В.И. Смирнов. – Москва: Наука, 1974. – 480с.