

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕОДНОРОДНОГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Никонова Т.В., Михасев Г. И.

The problem of stability of the thin-walled corrugated shell laying on the elastic foundation under action of non-uniform pressure is considered. The influence of the elastic foundation is taken into account as the additional pressure within the framework of Winkler's model. The rigid clamped conditions are considered at the edges of the shell. The obtained resolving equation with respect to a normal deflection enables to calculate the value of the critical pressure.

Металлические тонкостенные гофрированные конструкции являются высокотехнологичными и экономичными. В настоящее время подобные конструкции широко используются при капитальном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Исследование устойчивости равновесия тонкостенных гофрированных оболочек наряду с расчетом на прочность является одной из самых важных в прикладном отношении проблем в механике деформируемого твердого тела. В настоящее время достаточно широко проведены исследования устойчивости тонкостенных изотропных цилиндрических оболочек, подверженных статическим изгибным и крутящим нагрузкам, осевому сжатию, гидростатическому давлению [1, 2]. В [3] проведено исследование локальной устойчивости пластин и пологих оболочек на упругом основании. В [4] авторами проводилось исследование устойчивости длинной тонкостенной оболочки под действием веса грунта с учетом его реакции. Недостаточно исследованной является устойчивость тонкостенных гофрированных оболочек.

Рассмотрим тонкостенную гофрированную оболочку средней длины L , лежащую на упругом основании и находящуюся под действием внешнего неоднородного гидростатического давления Q_n^* . Смоделируем гофрированную оболочку тонкой оболочкой вращения толщиной h (рис.1).

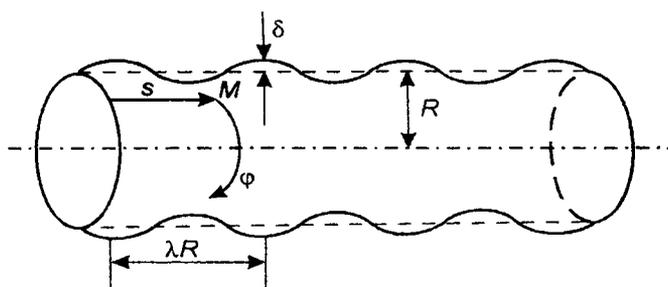


Рис. 1. Оболочка вращения

На поверхности опорного цилиндра введем безразмерную ортогональную систему криволинейных координат (s, φ) , где s — длина отрезка образующей опорного цилиндра, отсчитываемая от края до точки M и отнесенная к его радиусу R , а φ — окружная координата. При таком выборе координат первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид:

$$d\sigma^2 = R^2 (ds^2 + d\varphi^2).$$

Расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки, отнесенное к радиусу R зададим функцией:

$$B(s) = 1 + \mu F(s), \quad F(s) = \sin(2\pi s / \lambda), \quad \mu = \delta / R,$$

где μ – малый параметр, функция $F(s)$ описывает форму начальных отклонений от цилиндрической поверхности, имеет порядок единицы и существенно не возрастает при дифференцировании, δ – высота волны гофра, λ – длина волны гофра, отнесенная к радиусу R .

Воздействие упругого основания примем в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением w стенок трубы, в рамках модели Винклера [5, 6].

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния, используем систему полубезмоментных уравнений тонких оболочек [7], записанную в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Lambda \Delta_s w - \Delta_k \Phi + ew &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right], \quad \Delta_s = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} t_1 \frac{\partial}{\partial s} + t_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} t_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + t_3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \right], \\ \Delta_k &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1 R_2} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь усилия T_i ($i=1, 2, 3$), функция напряжения Φ^* , связаны со своими безразмерными аналогами по формулам: $T_i = -\Lambda E h \varepsilon^6 t_i$, $\Phi^* = E h R^2 \varepsilon^4 \Phi$; $\varepsilon^8 = h^2 / [12(1-\nu^2)R^2]$ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, $e = (\alpha R^3 / E h^2) [12(1-\nu^2)]^{1/2}$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, Λ – искомый параметр нагружения, α – коэффициент постели винклеровского основания. Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , отнесенные к R , параметры Ляме A_1 и A_2 в принятой системе координат имеют вид [8]:

$$R_1 = -\frac{1}{\mu F''_{ss}}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 F_s'^2}}{1 + \mu F}, \quad A_1 = \sqrt{1 + \mu^2 (F_s')^2}, \quad A_2 = 1 + \mu F.$$

На краях оболочки рассмотрим условия жесткого закрепления:

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = l, \quad (2)$$

где $l = L/R$.

Задача состоит в определении наименьшего значения $\Lambda > 0$, при котором краевая задача (1), (2) имеет ненулевое решение.

Считаем, что вследствие неоднородности гидростатического давления, оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой “наиболее слабой” образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [7], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2} \xi.$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде [7]:

$$w(s, \varphi, \varepsilon) = w_* \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \quad \Phi(s, \varphi, \varepsilon) = \Phi_* \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\},$$

$$w_* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(\xi, s), \quad \Phi_* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \Phi_j(\xi, s), \quad \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \quad (3)$$

где $w_j(\xi, s)$, $\Phi_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты, p – вещественное число, определяющее изменчивость в направлении φ , параметр a характеризует скорость уменьшения глубины вмятин при удалении от «наиболее слабой образующей $\varphi = \varphi_0$. Исходя из требования убывания решения (3) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $p > 0$, $\text{Im } a > 0$.

Усилия t_i ($i = 1, 2, 3$), параметр нагружения Λ представим в виде ряда по степеням ε

$$t_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j t_{ij}, \quad i = \overline{1..3}, \quad \Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Lambda_j. \quad (4)$$

Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , параметры Ляме A_1 и A_2 разложим в ряд по степеням малого параметра μ :

$$R_1 = -\mu^{-1} / F_{ss}''; \quad R_2 = 1 - \mu F + \mu^2 (F^2 - 1/2 F_s'^2) + O(\mu^3); \quad A_2 = 1 + \mu F; \quad A_1 = 1 + 1/2 \mu^2 F_s'^2 + O(\mu^4).$$

Для того чтобы влияние начального отклонения $F(s)$ проявлялось уже в нулевом приближении, необходимо положить $\mu = \kappa \varepsilon^2$. После всех подстановок в нулевом приближении разрешающее уравнение примет вид

$$L_0 w_0 = \frac{1}{p^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4} + \frac{2}{p^2} \kappa F_{ss}'' \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + \frac{2}{p^2} \kappa F_{sss}''' \frac{\partial w_0}{\partial s} + [p^4 - \Lambda_0 t_{20} p^2 + \frac{\kappa}{p^2} F_{ssss}^{IV} + \kappa^2 F_{ss}''^2 + e] w_0 = 0. \quad (5)$$

Краевые условия запишутся следующим образом:

$$w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = l. \quad (6)$$

Очевидно, что наименьшему значению критической нагрузки оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение Λ_0 краевой задачи (5), (6). Положим

$$\Lambda_0^0 = \min_{p, \varphi_0} \Lambda_0(p, \varphi_0) = \Lambda_0(p^0, \varphi_0^0), \quad (7)$$

где для параметров p^0, φ_0^0 будут выполняться соотношения:

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial p} = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0 \quad \text{при } p = p^0, \quad \varphi = \varphi_0^0. \quad (8)$$

Очевидно, Λ_0 может быть найдено численно, например, с использованием метода Рунге–Кутты. Из краевой задачи (5), (6) находим искомую величину Λ_0^0 как минимум функции $\Lambda_0 = f(p)$, а также число p_0 , при котором достигается этот минимум.

Предположим, что дифференциал второго порядка Λ_0 в точке p^0, φ_0^0 – положительно-определенная квадратичная форма:

$$d^2\Lambda_0 = \Lambda_{pp}dp^2 + 2\Lambda_{p\varphi}dpd\varphi + \Lambda_{\varphi\varphi}d\varphi^2 > 0, \quad (9)$$

где через $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$ обозначены производные Λ_0 по соответствующим переменным вычисленные при $p = p^0, \varphi = \varphi_0^0$. Значения производных $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$ также находятся численно с использованием прикладной программы. Поправка Λ_1 находится по формуле [7], получаемой из рассмотрения первого и второго приближений:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\Lambda_{pp}\Lambda_{\varphi\varphi} - \Lambda_{p\varphi}^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Ненулевые поправки $\Lambda_i, i = \overline{3..n}$ могут быть найдены из последующих приближений, однако точность исходных уравнений (1) для их определения является недостаточной.

Таким образом, сформулирован алгоритм, согласно которому определяются критическое усилие, а также соответствующая форма бифуркации гофрированной оболочки, под действием неоднородного гидростатического давления. С использованием комплексного ВКБ-метода [7], исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач. Полученное в нулевом приближении разрешающее уравнение дает возможность численно найти значение параметра нагружения Λ_0^0 и число волн p_0 . Разработанная авторами прикладная программа позволяет исследовать зависимость параметра нагружения Λ_0^0 и числа волн p_0 от длины оболочки, длины волны гофра λ , коэффициента постели винклеровского основания α , оптимизировать линейные размеры оболочки для получения заданных свойств. Поправка Λ_1 находится по формуле (10), получаемой из рассмотрения первого и второго приближений с учетом найденных численно $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Григолюк, Э.И., Кабанов, В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
3. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 147–160.
4. Михасев Г.И., Никонова Т.В. Расчет на прочность и устойчивость труб большого диаметра, лежащих в грунте // Труды международной конференции по геотехнике «Взаимодействие сооружений и оснований: методы расчета и инженерная практика». – С.-Пб., 2005. – Т. 2. – С. 139–142.
5. Корбут, Б.А., Нагорный, Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек. – Изв. вузов, "Машиностроение". – 1971. – № 6. – С. 16–21.
6. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат. 1954. – 232 с.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995.-320 с.
8. Михасев, Г.И., Никонова, Т.В. Оценка усилий в тонкостенной гофрированной трубе с упругим заполнителем под действием переменного давления // Изв. НАН Беларуси. – Сер. физ.-тех. наук. – 2005. – № 4. – С. 55–60.