

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

И. А. Петюль

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

КУРС ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности 1-54 01 01-04 «Метрология,
стандартизация и сертификация (легкая промышленность)»

Витебск
2022

УДК 006.91
ББК 30.10
П 31

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент, начальник отдела «Испытательный центр» УО «ВГТУ» Шеверина Л. Н.;

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Информационные системы и автоматизация производства» УО «ВГТУ» Казаков В. Е.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 9 от 30.05.2022.

Петюль, И. А.

П 31 Теоретическая метрология : курс лекций / И. А. Петюль. – Витебск : УО «ВГТУ», 2022. – 123 с.
ISBN 978-985-481-714-9

В курсе лекций рассмотрены основные понятия метрологии, приведены сведения о физических величинах и единицах измерения, средствах измерения и их погрешностях. Рассмотрены методы обработки прямых и косвенных измерений, алгоритм оценки неопределенности результатов измерений.

Предназначен для студентов высших учебных заведений очной и заочной формы обучения по специальности 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)».

**УДК 006.91
ББК 30.10**

ISBN 978-985-481-714-9

© УО «ВГТУ», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИЗМЕРЕНИЙ	6
1.1 Структура теоретической метрологии. Предмет и объект метрологии	6
1.2 Основные понятия метрологии	7
1.3 Признаки измерений. Основное уравнение измерения	8
2 ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЕДИНИЦЫ И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	10
2.1 Единицы физических величин. Размерность физических величин	10
2.2 Системы величин и единиц	11
2.3 Международная система единиц (SI)	12
3 ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ШКАЛЫ	17
3.1 Виды шкал	17
3.2 Шкалы на основе предпочтительных чисел	23
4 ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ	25
4.1 Принципы измерений	25
4.2 Виды измерений	27
4.3 Методы измерений	30
5 СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	33
5.1 Классификация средств измерений	33
5.2 Метрологические характеристики средств измерений	39
6 ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ	43
6.1 Виды погрешностей СИ	43
6.2 Классы точности средств измерений	47
6.3 Правила округления приближенных чисел	51
7 СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ	52
7.1 Систематические погрешности и их классификация	52
7.2 Методы исключения систематических погрешностей	54
7.3 Применение специальных статистических методов для исключения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей	55
7.4 Определение границ неисключенной систематической погрешности	58
8 СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ	60
8.1 Понятие о случайных величинах и законе их распределения	60
8.2 Описание случайных погрешностей с помощью функций распределения	63
8.3 Числовые параметры законов распределения и их оценки	65
8.4 Основные законы распределения	72
8.5 Доверительная вероятность и доверительный интервал	78
8.6 Интервальные оценки дисперсии	81
9 ГРУБЫЕ ПОГРЕШНОСТИ И МЕТОДЫ ИХ ИСКЛЮЧЕНИЯ	83
9.1 Понятие о грубых погрешностях	83
9.2 Методы исключения грубых погрешностей	84

10 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	87
10.1 Алгоритм обработки прямых многократных измерений	87
10.2 Идентификация формы закона распределения результатов измерения ..	93
10.3 Определение доверительных границ погрешности результата измерения.....	96
10.4 Обработка результатов однократных измерений.....	97
11 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	100
11.1 Косвенные измерения при линейной зависимости между аргументами	101
11.2 Косвенные измерения при нелинейной зависимости между аргументами.....	104
11.3 Косвенные измерения при коррелированных погрешностях измерений аргументов	107
12 НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ.....	108
12.1 Возникновение и суть концепции неопределенности	108
12.2 Алгоритм оценивания неопределенности результатов измерения.....	110
12.3 Неопределенность и погрешность	120
Список использованных источников.....	122

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе лекций используется терминология закона Республики Беларусь от 5 сентября 1995 г. № 3848-ХІІ «Об обеспечении единства измерений» (в ред. Закона Республики Беларусь от 11.11.2019 N 254-З), межгосударственных рекомендаций РМГ 29-2013 «Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения», Международного словаря по метрологии (VIM 3) «Основные и общие понятия и соответствующие термины». Подготовленный материал основан на использовании базовых учебников и учебных пособий, указанных в перечне использованных источников, а также технических нормативных правовых актах, указанных по тексту.

Курс лекций раскрывает основные темы учебной программы в достаточном объеме для их успешного освоения. Для более глубокого и полного освоения дисциплины предлагается проработать литературу, указанную в учебной программе дисциплины и в списке источников, использованных при составлении данного курса.

1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1 Структура теоретической метрологии. Предмет и объект метрологии

Метрология – наука, которая охватывает круг проблем, связанных с измерениями. В дословном переводе с греческого μέτρον – мера, а λόγος – речь, слово, учение или наука.

Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Метрология делится на три самостоятельных и взаимодополняющих раздела: теоретическая, законодательная и практическая (прикладная).

Теоретическая метрология – раздел метрологии, предметом которого является разработка фундаментальных основ метрологии. В нем излагаются общая методология метрологии (основные термины, понятия, постулаты, учение о физических величинах, вопросы научной организации процесса измерения), теория точности измерений (планирование измерений, теории погрешностей и точности средств измерений, методы измерений, методы обработки результатов), теория единства измерений (теория единиц физических величин, эталонов, передача размеров единиц физических величин).

Законодательная метрология – раздел метрологии, предметом которого является установление обязательных технических и юридических требований по применению единиц величин, эталонов, методов и средств измерений, направленных на обеспечение единства и требуемой точности измерений.

Практическая (прикладная) метрология – раздел метрологии, предметом которого являются вопросы практического применения разработок теоретической метрологии и положений законодательной метрологии.

Цель метрологии, как науки, заключается в достоверном и максимально приближенном к истинному, отображении характеристик свойств объектов во множестве измеряемых величин. Метрология, как деятельность в интересах общества, имеет целью разработку научных, организационных и правовых основ обеспечения единства и требуемой точности измерений.

Предметом метрологии является извлечение количественной информации о свойствах объектов и процессов с заданной точностью и достоверностью. **Объектами метрологии** являются величины и их единицы измерений, методы и средства измерений.

1.2 Основные понятия метрологии

Измерение (величины) – процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине. **Объектами измерений** являются свойства объективных реальностей (тел, веществ, явлений, процессов).

Измерение подразумевает сравнение величин и включает счет объектов. А также измерение предусматривает описание величины в соответствии с предполагаемым использованием результата измерения, методику измерений и средство измерений, функционирующее в соответствии с регламентированной методикой измерений и с учетом условий измерений.

Все объекты окружающего мира характеризуются своими свойствами. **Свойство** – философская категория, выражающая такую сторону объекта (явления, процесса), которая обуславливает его различие или общность с другими объектами (явлениями, процессами) и обнаруживается в его отношениях к ним. Свойство – категория качественная. Для количественного описания различных свойств процессов и физических тел вводится понятие величины.

В «Международном словаре основных и общих терминов метрологии» (VIM 3) понятие **величина** раскрывается как свойство явления, тела или вещества, которое может быть выражено количественно в виде числа с указанием отличительного признака как основы для сравнения. В РМГ 29-2013 **величина** определяется как свойство материального объекта или явления, общее в качественном отношении для многих объектов или явлений, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Основное понятие «величина» может быть разделено на несколько уровней конкретных понятий (например: длина → радиус → радиус окружности), а в общем смысле может быть подразделено на понятия «физическая величина», «химическая величина» и «биологическая величина» или основная величина и производная величина.

По принадлежности к различным группам физических процессов ФВ делятся на пространственно-временные, механические, тепловые, электрические и магнитные, акустические, световые, физико-химические, ионизирующих излучений, атомной и ядерной физики.

Количественная определенность величины, присущая конкретному материальному объекту или явлению, называется **размером величины**, а выражение размера величины в виде некоторого числа принятых единиц, или чисел, баллов по соответствующей шкале измерений, называется **значением величины** (например, масса тела: 0,152 кг или 152 г).

Процесс измерения завершается получением **результата измерения** – набора значений величины, приписываемых измеряемой

величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией. Как правило, результат измерения выражается одним измеренным значением величины и неопределенностью (или погрешностью) измерений.

Для понимания такого ключевого понятия метрологии, как погрешность, а также основных постулатов метрологии, необходимо усвоить понятие истинного и действительного значения.

Истинное значение величины – значение величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта. Определить экспериментально его невозможно вследствие неизбежных погрешностей измерения. Вместо истинного значения при эксперименте получают действительное значение физической величины, степень приближения которого к первому зависит от цели эксперимента и выбранной точности измерительного средства.

Действительное значение величины – значение величины, найденное экспериментальным путем и настолько приближенное к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него. Для действительного значения физической величины всегда можно указать границы более или менее узкой зоны, в пределах которой с заданной вероятностью находится истинное значение физической величины.

Как и любая другая наука, метрология строится на основе ряда основополагающих постулатов, описывающих ее исходные аксиомы. Аксиома – это утверждение, в рамках теории принимаемое истинным без доказательств. В специальной литературе, научных публикациях можно найти различные варианты формулировок аксиом (постулатов) метрологии [2, 9].

1.3 Признаки измерений. Основное уравнение измерения

Для отличия измерений от других способов получения информации выделим характерные отличительные признаки и особенности процесса измерения, познаваемых свойств и получаемой информации:

1. Получение количественной информации. Измерение возможно только при качественной определенности свойства объекта, позволяющей отличить его от других свойств, т. е. при выделении измеряемой величины, и при условии установления единицы этой величины.

Приведенные два условия выражаются основным уравнением измерений. Процедура сравнения неизвестного размера с известным и выражение первого через второй в кратном или дольном соотношении

математически записывается следующим образом:

$$\frac{Q}{[Q]} = x,$$

где Q – значение физической величины, т. е. оценка ее размера в виде некоторого числа принятых для нее единиц; $[Q]$ – соответствующая единица SI, т. е. известный размер (реализуется через вещественную меру, разметку шкалы отсчетного устройства, градуировочную характеристику средства измерения); x – результат сравнения.

Практический опыт показал, что при многократных измерениях одной и той же величины постоянного размера результат сравнения x получается все время разным. Это явление отличает практическую деятельность от ее теоретической модели

$$\frac{Q}{[Q]} = q, \text{ тогда } Q = q[Q],$$

q – числовое значение физической величины, т. е. отвлеченное число, выражающее отношение значения величины к соответствующей единице данной ФВ.

На практике $x \neq q$, так как сравнение размеров между собой происходит в условиях влияния множества случайных и неслучайных обстоятельств, точный учет которых невозможен. Поэтому результаты сравнений отличаются друг от друга. Это положение, установленное практикой, приводит к выводу, что *отсчет является случайным числом*.

2. Получение информации об измеряемой величине в результате непосредственного взаимодействия (контактного, бесконтактного) специального технического средства, хранящего единицу измерений с объектом измерений. Отсюда следует, что измерение возможно при условии *материализации* (воспроизведения или хранения) единицы величины техническим средством.

3. Общность структуры и тесная взаимосвязь основных этапов процесса измерений.

4. Оценка степени достижения цели, которая заключается в нахождении интервала неопределенности и/или погрешности полученного результата измерений.

Совокупность этих признаков позволяет объединить многообразие различных по своей сложности, задачам и условиям процессов получения количественной информации единым понятием «измерение».

2 ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЕДИНИЦЫ И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

2.1 Единицы физических величин. Размерность физических величин

Возможность введения и использования единиц физических величин является важным отличительным признаком измеряемых физических величин. Для количественной оценки значений физических величин применяют единицы соответствующих физических величин.

Единица измерения – величина, условно принятая за единицу, с которой сравниваются другие однородные величины для выражения их количественного значения по отношению к этой величине (ТР 2007/003/ВУ).

Единица измерения – величина фиксированного размера, которой присвоено числовое значение, равное 1, определяемая и принимаемая по соглашению для количественного выражения однородных с ней величин (РМГ 29-2013).

Единица измерения – действительная скалярная величина, определенная и принятая по соглашению, с которой можно сравнить любую другую величину того же рода и выразить их отношение в виде числа (VIM 3).

Единицы измерения имеют присвоенные им по соглашению наименования и обозначения.

Качественной характеристикой измеряемой величины является *размерность*. Размерность обозначается символом **dim**, происходящим от слова dimension, которое в зависимости от контекста может переводиться и как размер, и как размерность.

Размерность *основных* физических величин обозначается соответствующими заглавными буквами. Для длины, массы и времени, например,

$$\dim l = L; \dim m = M; \dim t = T.$$

При определении размерности производных величин руководствуются следующими **правилами**:

1. Размерность левой и правой частей уравнения должны совпадать, так как сравниваться между собой могут только одинаковые свойства.

2. Размерность произведения нескольких величин равна произведению их размерностей. Например, если зависимость между величинами Q, A, B, C имеет вид $Q = ABC$, то $\dim Q = \dim (ABC) = \dim A \times \dim B \times \dim C$.

3. Размерность частного при делении одной величины на другую

равна отношению их размерностей, т. е. если $Q = A / B$, то $\dim Q = \dim A / B = \dim A / \dim B$.

4. Размерность любой величины, возведенной в некоторую степень, равна ее размерности в той же степени, т. е. если $Q = A^n$, то $\dim Q = \dim A^n = \dim^n A$.

Например, если скорость определять по формуле $V = l / t$, то $\dim V = \dim l / \dim t = L / T = L T^{-1}$. Если сила по второму закону Ньютона $F = m a$, где $a = v / t$ – ускорение тела, то $\dim F = \dim m \times \dim a = M L / T^2 = M L T^{-2}$.

Таким образом, **размерность величины** – выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях и отражающее связь данной физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные с коэффициентом пропорциональности, равным 1:

$$\text{Dim } Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma \dots,$$

где $L, M, T, \dots$ – размерности соответствующих основных физических величин;

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – показатели размерности.

Каждый из показателей размерности может быть положительным или отрицательным, целым или дробным числом, нулем. Если все показатели размерности равны нулю, то такая величина называется *безразмерной*. Она может быть *относительной*, определяемой как отношение одноименных величин, и *логарифмической*, определяемой как логарифм относительной величины.

2.2 Системы величин и единиц

Система – множество закономерно соединенных между собой элементов, образующих определенную целостность, единство.

Система физических величин – совокупность физических величин, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимают за независимые, а другие определяют как функции независимых величин. На базе системы физических величин создают систему единиц физических величин.

Физические величины, единицы которых устанавливаются независимо от других величин в системе, называются *основными величинами*, а их единицы – *основными единицами*. Все остальные величины определяются однозначно как функции основных и называются

производными величинами, а их единицы – производными единицами.

Система единиц физических величин (система единиц) – совокупность основных и производных единиц физических величин, образованная в соответствии с принципами для заданной системы физических величин.

Одна из величин, которая в данной системе величин принята условно в качестве независимой от других величин, называется *основной величиной*, а единица измерения основной величины называется *основной единицей*.

Производная величина – величина, определенная в данной системе величин как функция основных величин этой системы, а ее единица измерения называется *производной единицей* в данной системе величин.

Единицы основных величин устанавливают конвенционально, производные единицы системы получают из физических формул (количественных уравнений связи между величинами).

Ранее системы единиц создавались для применения в конкретных областях науки. Например, в физике существовали системы МТС (метр – тонна – секунда) или СГС (сантиметр – грамм – секунда) для раздела механики, для обеспечения механических и электрических измерений использовалась система МКСА (метр – килограмм – секунда – ампер). Это приводило к использованию разнообразных единиц для измерений одной и той же производной физической величины в разных системах и необходимости дополнительных вычислений при переходе от одной системы единиц к другой. Поэтому со временем возникла необходимость создания универсальной системы физических величин.

Универсальная система физических величин должна охватывать максимум величин, которые измеряются в научной и производственной деятельности, но допускает возможность создания специальных систем единиц для конкретных узких областей.

Строгость системы обеспечивается включением в нее только величин, связанных известными физическими законами. Минимально необходимое и достаточное для создания системы число основных величин определяется расчетом, но выбор конкретных величин, теоретическими положениями не определяется.

2.3 Международная система единиц (SI)

Первым шагом на пути к созданию Международной системы единиц (International System of Units) можно считать разработку десятичной метрической системы, основанной на использовании архивного метра и килограмма, изготовленных во Франции в 1799 году. 20 мая 1875 года семнадцатью странами была подписана **Метрическая конвенция** «для

обеспечения международного единства и усовершенствования метрической системы», учреждено Международное бюро мер и весов, началась работа по созданию новых международных прототипов для метра и килограмма. В 1889 году на I Генеральной конференции по мерам и весам были утверждены международные прототипы для метра и килограмма. Вместе с астрономической секундой как единицей времени, эти единицы составили трехмерную механическую систему единиц, с основными единицами метр, килограмм и секунда. В 1939 году была принята четырехмерная система, предложенная Д. Джорджи, основанная на метре, килограмме, секунде и ампере.

В 1960 году XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ), дала определение основных единиц этой системы и предписала употребление некоторых производных единиц.

В настоящее время она принята в качестве законной системы единиц измерения большинством стран мира, за исключением США, Мьянмы (Бирмы) и Либерии. В Республике Беларусь единицы СИ указаны в Положении о допуске единиц величин к применению в Республике Беларусь (утверждено Постановлением Совета Министров Республики Беларусь 24.11.2020 № 673), а также в межгосударственном стандарте ГОСТ 8.417-2002 «ГСИ. Единицы физических величин».

В таблице 2.1 приведены основные единицы Международной системы единиц физических величин, и указаны годы утверждения их определений.

Таблица 2.1 – Основные единицы Международной системы единиц (СИ)

Физическая величина		Единица физической величины			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Определение
			межд.	русс.	
1	2	3	4	5	6
Длина	L	метр	m	м	Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299\,792\,458$ секунды (XVII ГКМВ, 1983 г.)
Масса	M	килограмм м	kg	кг	Килограмм есть единица массы, равная массе международного прототипа килограмма (I ГКМВ, 1889 г. и III ГКМВ, 1901 г.) <i>Килограмм – это такая масса, при которой постоянная Планка точно равна $6,626070040$ Дж/с.</i>
Время	T	секунда	s	с	Секунда есть время, равное $9\,192\,631\,770$ периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (XIII ГКМВ, 1967 г.)

Окончание таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6
Сила электрического тока	I	ампер	A	A	Ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 метр силу взаимодействия, равную 2×10^{-7} ньютона (IX ГКМВ, 1948 г.) <i>Ампер – это сила электрического тока, соответствующая потоку $1/(1,602176634 \times 10^{-19})$ элементарных зарядов в секунду. (Для выражения требуется численное значение элементарного заряда $e=1,602176634 \times 10^{-19}$ А с)</i>
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	K	Кельвин есть единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды (XIII ГКМВ, 1967 г.) <i>Кельвин – это единица термодинамической температуры, которая определена путем установления фиксированного численного значения постоянной Больцмана k равным $1,380649 \times 10^{-23}$, Дж·К⁻¹ (или кг·м²·с⁻²·К⁻¹)</i>
Количество вещества	N	моль	mol	моль	Моль есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 килограмма. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами частиц (XIV ГКМВ, 1971 г.) <i>Моль – количество вещества системы, которая содержит $6,022140857 \times 10^{23}$ определенных структурных элементов. (Для выражения единицы требуется постоянная Авогадро $N_A = 6,02214076 \times 10^{23}$ моль⁻¹).</i>
Сила света	J	кандела	cd	кд	Кандела есть сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой 540×10^{12} герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 ватт/стерадиан (XVI ГКМВ, 1979 г.)

Семь основных единиц были выбраны по историческим причинам, поскольку метрическая система, позднее SI, формировалась и развивалась в течение последних 130 лет. Их выбор не был уникальным, но с годами он стал общепризнанным и привычным не только благодаря созданию основы для описания SI, но и для определения производных единиц. Единицы SI привязаны к истинным инвариантным величинам, таким как фундаментальные константы физики и свойства атомов. В настоящее время определения семи основных единиц базируются на семи определяющих константах: частоте перехода сверхтонкого расщепления атома цезия $\Delta\nu_{Cs}$; скорости света в вакууме c ; постоянной Планка h ; элементарном заряде e ; постоянной Больцмана k ; постоянной Авогадро N_A ; и световой эффективности определенного видимого излучения K_{cd} . Однако между семью определяющими константами и семью основными единицами нет взаимно однозначного соответствия, поскольку многие основные единицы требуют более одной определяющей константы.

Производные единицы образуются из основных единиц SI по правилам образования когерентных производных единиц SI на основании законов, устанавливающих связь между физическими величинами, или математических формул. Производные единицы SI могут быть использованы для образования других производных единиц SI. Отдельные производные величины приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Примеры некоторых производных единиц измерений в SI

Физическая величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение международное	обозначение русское
1	2	3	4	5
Частота	T^{-1}	герц	Hz	Гц
Сила	$L M T^{-2}$	ньютон	N	Н
Давление	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Pa	Па
Энергия, работа, количество теплоты	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	J	Дж
Мощность	$L^2 M T^{-3}$	ватт	W	Вт
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2 M T^{-3} I^{-1}$	вольт	V	В
Электрическое сопротивление	$L^2 M T^{-3} I^{-2}$	ом	Ω	Ом
Освещенность	$L^{-2} J$	люкс	lx	лк

Международная система единиц имеет ряд **достоинств**:

- универсальность (обеспечивает ее применение во всех отраслях производства и областях науки);
- унификация единиц физических величин;

- унификация механизма образования дольных и кратных единиц;
- когерентность системы.

Унификация единиц физических величин, например давления, заключается в отказе от таких ранее использовавшихся единиц, как атмосфера физическая, атмосфера техническая, миллиметры водяного столба, миллиметры ртутного столба и др.

Когерентной является система, в которой производные единицы получают из основных с коэффициентом в виде неименованной единицы. Например, единица скорости 1 м/с образована делением единицы длины 1 м на единицу времени 1 с, единица давления 1 Па, образована делением единицы силы 1 Н на единицу площади 1 м², которая в свою очередь образована произведением единиц длины 1 м на 1 м.

Различают *основные, производные, кратные, дольные, системные и внесистемные единицы*.

В зависимости от отношения с основной единицей различают дольные и кратные единицы, образованные умножением основной единицы на десять в целой положительной или отрицательной степени (в SI приняты модули показателей 1, 2, 3, и далее через 3 до 24). **Дольная единица** – единица измерения, в целое число раз меньшая данной единицы. **Кратная единица** – единица измерения, в целое число раз большая данной единицы.

При образовании кратных и дольных единиц к основным единицам добавляют приставки, наименования и обозначения которых приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Множители и приставки для образования кратных и дольных единиц SI

Множитель	Приставка			
	Наименование		Обозначение	
	Международное	Русское	Международное	Русское
1	2	3	4	5
10 ²⁴	yotta	йотта	Y	И
10 ²¹	zetta	зетта	Z	З
10 ¹⁸	exa	экса	E	Э
10 ¹⁵	peta	пета	P	П
10 ¹²	tera	тера	T	Т
10 ⁹	giga	гига	G	Г
10 ⁶	mega	мега	M	М
10 ³	kilo	кило	k	к
10 ²	hecto	гекто	h	г
10 ¹	deca	дека	da	да
10 ⁻¹	deci	деци	d	д
10 ⁻²	centi	санتي	c	с
10 ⁻³	milli	милли	m	м
10 ⁻⁶	micro	микро	μ	мк

Окончание таблицы 2.3

10^{-9}	nano	нано	n	н
10^{-12}	pico	пико	p	п
10^{-15}	femto	фемто	f	ф
10^{-18}	atto	атто	a	а
10^{-21}	zepto	zepto	z	з
10^{-24}	yocto	йокто	y	и

Примечание: в связи с тем, что наименование основной единицы массы – килограмм содержит приставку «кило», для образования кратных и дольных единиц массы используется дольная единица массы – грамм.

Наряду с единицами SI, положенной в основу нормативных документов, используют также внесистемные единицы, допускаемые к применению в отдельных областях, некоторые из относительных и логорифмических единиц, а также единицы количества информации.

3 ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ШКАЛЫ

3.1 Виды шкал

Термин «шкала» в метрологической практике может иметь несколько значений. В прикладной метрологии повсеместно используется как элемент аналоговых средств измерений. **Шкалой средства измерения** называют часть средства измерения, представляющую собой упорядоченный набор меток (штрихов, точек) со значениями величины. В этом смысле термин «шкала» в данной лекции не рассматривается.

Упрощенно свойства величин можно разделить на качественные и количественные. Качественные свойства не могут быть выражены размером. Но качественное свойство имеет значение, которое может быть выражено словами, описывающими состояние, буквенно-числовым кодом классификации, баллами или другой системой знаков. Количественные свойства принято называть величинами. Многообразие проявлений любого свойства, выраженное множеством чисел или представляющее собой систему условных знаков, образует шкалу измерения этого свойства. **Шкалой величины (шкалой измерений)** называют упорядоченную совокупность значений величины, служащую исходной основой для измерения данной величины. Измерение количественного (или оценка качественного) свойства возможно только после установления (принятия по соглашению) шкалы измерений.

Элементы множеств проявления свойств находятся в определенных логических соотношениях между собой. Такими соотношениями могут быть «эквивалентность» (равенство), количественная различимость («больше» или «меньше»), допустимость выполнения определенных математических

операций (сложения, вычитания, умножения, деления) с элементами множеств и т. д. Эти особенности элементов множеств проявления свойств определяют типы шкал измерений.

В соответствии с логической структурой проявления свойств в теории измерений различают пять основных **типов** шкал измерений:

- наименований (эквивалентности);
- порядка;
- интервалов (разности);
- отношений;
- абсолютные.

Каждый тип шкалы обладает определенными признаками.

Шкалы наименований отражают качественные свойства. Их элементы характеризуются только соотношениями эквивалентности (равенства) и сходства конкретных качественных проявлений свойств. Примерами таких шкал является шкала классификации (оценки) цвета объектов по наименованиям (красный, оранжевый, желтый, зеленый и т. д.), опирающаяся на стандартизованные атласы цветов, систематизированные по сходству. В таких атласах, выполняющих роль своеобразных эталонов, цвета могут обозначаться условными номерами (координатами цветами). Измерения в шкале цветов выполняются путем сравнения при определенном освещении образцов цвета из атласа с цветом исследуемого объекта и установления эквивалентности их цветов.

Шкала, содержащая две градации «есть» и «нет» называется дихотомической шкалой. При сопоставлении и измерении размеров по шкале наименований осуществляется, например, контроль и оценка качества чего-либо по альтернативному принципу: годен – не годен; подходит – не подходит; соответствует – не соответствует и т. п.

В шкалах наименований нельзя ввести понятия единицы измерения; в них отсутствует и нулевой элемент.

Шкалы наименований, по существу, качественные; однако возможны некоторые статистические операции при обработке результатов измерений в этих шкалах, например, можно найти модальный или наиболее многочисленный класс эквивалентности.

Шкалы порядка описывают свойства, для которых имеют смысл не только соотношения эквивалентности, но и соотношения порядка по возрастанию или убыванию количественного проявления свойства.

При попарном сопоставлении всех измеряемых размеров устанавливают, какой размер больше или меньше другого, какой лучше или хуже другого. Если имеются одинаковые размеры, то это соотношение также устанавливается. Далее установленные соотношения размеров *ранжируются* в порядке возрастания и/или убывания (уменьшения) их величин. Сами величины при этом остаются неопределенными. Полученный в результате ранжирования ряд значений является шкалой порядка возрастающей или убывающей последовательности.

По шкалам порядка значения размеров могут быть классифицированы (оценены) не только по критерию «одинаковы или нет», но и по соотношению, что «больше или меньше» другого или «что лучше, а что хуже» другого.

Однако главным преимуществом измерений с использованием шкал порядка является то, что с их помощью инструментально неизмеряемые величины все же можно оценить (измерить) количественно.

Характерным примером шкал порядка являются существующие шкалы чисел твердости тел, шкалы баллов землетрясений, шкалы баллов ветра, октановые числа топлива для двигателей и т. п. Узкоспециализированные шкалы порядка широко применяются в методах испытаний различной продукции. Например, показатели «интенсивность окраски» («яркая», «обычная», «тусклая»), «моральный износ оборудования» («незначительный», «умеренный», «недопустимый») имеют шкалы порядка.

В этих шкалах также нет возможности ввести единицы измерений из-за того, что они не только принципиально нелинейны, но и вид нелинейности может быть различен и неизвестен на разных ее участках. Результаты измерений в шкалах твердости, например, выражаются в числах твердости по Бринеллю, Виккерсу, Роквеллу, Шору, а не в единицах измерений. Шкалы порядка допускают монотонные преобразования, в них может быть или отсутствовать нулевой элемент.

С целью увеличения достоверности и объективности измерений методом ранжирования, часто в шкалу порядка вводятся ранжированные реперные (опорные) точки, с помощью которых определяются ранг или также безразмерный балл измеряемой величины. Такая шкала называется *реперной шкалой порядка*.

Например, знания учащихся оценивают (измеряют) по реперной шкале порядка, имеющей следующие фиксированные опорные точки, имеющие численные значения, выраженные в баллах. Измерения твердостей минералов осуществляют с использованием десятибалльной ранжированной шкалы порядка. Реперные точки твердостей: тальк – 1 балл, гипс – 2 балла, кальцит – 3 балла, флюорит – 4 балла, апатит – 5 баллов, ортоклаз – 6 баллов, кварц – 7 баллов, топаз – 8 баллов, корунд – 9 баллов, алмаз – 10 баллов. Перечисленные минералы приняты в качестве эталонных и по отношению к их твердостям оценивается твердость оцениваемого минерала. Если эталон, имеющий твердость n баллов, царапает поверхность исследуемого минерала, а исследуемый образец царапает эталон с твердостью $(n - 1)$ баллов, то оцениваемая твердость считается равной $(n - 1)$.

Широкое применение шкалы порядка получили при измерениях в социальной сфере, в области интеллектуального труда, в искусстве и гуманитарных науках, где использование точных метрологических методов измерений затруднено или практически невозможно.

Шкалы разностей (интервалов) отличаются от шкал порядка тем, что для описываемых ими свойств имеют смысл не только соотношения эквивалентности и порядка, но и суммирования интервалов (разностей) между

различными количественными проявлениями свойств.

Во многих случаях нет возможности измерить сами размеры наблюдаемых величин, но возможно измерить только отличия (разницы) между познаваемыми сопоставлением размерами. Начало отсчета на шкале интервалов устанавливается произвольно. При этом так же произвольно выбирается единица измерений интервалов – их величины на шкале измерений. Характерный пример – шкала интервалов времени. Интервалы времени (например, периоды работы, периоды учебы) можно складывать и вычитать, но складывать даты каких-либо событий бессмысленно. Другой пример – шкала длин (расстояний) – пространственных интервалов определяется совмещением нуля линейки с одной точкой, а отсчет делается у другой точки.

Зачастую с целью приближения единицы измерений по шкале интервалов к реальности за меру измеряемых интервалов берут долю или некоторую часть какого-либо (предпочтительного) интервала размеров. Для этого на шкале измерений устанавливают две реперные точки, расстояние между которыми выражает разницу двух выбранных размеров. Промежуток между реперными точками градуируется, т. е. делится на равные или (реже) пропорциональные части. К этому типу шкал относятся и шкалы температур по Цельсию, Фаренгейту, Реомюру.

Ввиду неопределенности (условности) начала отсчета математические операции умножения и деления результатов измерений, полученных с помощью шкал интервалов, осуществить нельзя, следовательно, нет возможности определить, во сколько раз один размер больше или меньше другого.

Шкалы разностей имеют условные (принятые по соглашению) единицы измерений и нули, опирающиеся на какие-либо реперы. Интервалы шкал разностей обладают всеми свойствами шкал отношений. В этих шкалах допустимы линейные преобразования, в них применимы процедуры для отыскания математического ожидания и стандартного отклонения. Шкалы разностей допускают изменение спецификаций и даже определений единиц измерений.

Шкалы отношений отличаются от шкал разностей тем, что в них существуют естественные нули, соответствующие логически однозначному пределу бесконечно малого проявления количественного свойства. К множеству количественных проявлений в этих шкалах применимы соотношения эквивалентности и порядка, операции вычитания и умножения, а во многих случаях и суммирования (шкалы отношений 2-го рода – аддитивные шкалы).

В шкалах отношений существуют условные (принятые по соглашению) единицы и естественные нули. Примерами шкал отношений являются шкалы массы (2-го рода), термодинамическая температурная шкала (1-го рода).

Массы любых объектов можно суммировать, но суммировать температуры разных тел нет смысла, хотя можно судить о разности и,

отношении их термодинамических температур. Шкалы отношений широко используются в физике и технике, в них допустимы все арифметические и статистические операции.

Абсолютные шкалы обладают всеми признаками шкал отношений, но дополнительно в них существует естественное однозначное определение единицы измерений. Такие шкалы используются для измерений относительных величин (отношений одноименных величин: коэффициентов усиления, ослабления, КПД, коэффициентов отражений и поглощений, амплитудной модуляции и т. д.).

Их единицы безразмерны и сочетаются с единицами любых систем, являясь, по сути дела, всесистемными или надсистемными. Такие шкалы также используются как вариант представления шкал отношений делением соответствующих величин на некоторые опорные значения этих величин, выраженные в принятых единицах (так получаются условно безразмерные величины). Абсолютные шкалы бывают ограниченными (КПД) и неограниченными (коэффициент усиления), непрерывными и дискретными. Логическая структура большинства абсолютных шкал такова, что значения в них не аддитивны, а лишь пропорциональны. В некоторых случаях их можно перемножать. Аддитивными абсолютными шкалами являются шкалы плоских и телесных углов, количества информации, счетных величин. Изменения спецификаций допустимы и для абсолютных шкал введением единиц измерений, кратных или дольных естественной единице, когда возникает необходимость в этом.

Шкалы интервалов, отношений и абсолютных величин называются метрическими, так как при их построении используются меры, т.е. размеры, принятые в качестве единиц измерений.

Значительная часть спецификаций (описаний) шкал приведена в стандартах на методы испытаний продукции, т.е. практическая реализация шкал измерений достигается на основе стандартизации как самих шкал и единиц измерений, так и в необходимых случаях способов и условий их однозначного воспроизведения.

Шкалы наименований и порядка могут реализовываться и без эталонов (шкала-классификация Линнея, шкала запахов, шкала Бофорта), но если создание эталонов необходимо, то они воспроизводят весь применяемый на практике участок шкалы (пример – эталоны твердости). Внесение любых изменений в спецификацию, определяющую шкалу наименований или порядка, практически означает введение новой шкалы.

Шкалы разностей и отношений (метрические шкалы), соответствующие SI, как правило, воспроизводятся эталонами. Эталоны этих шкал измерений могут воспроизводить одну точку шкалы (эталон массы), некоторый участок шкалы (эталон длины) или практически всю шкалу (эталон времени). В метрологических нормативных документах обычно говорится только об установлении и воспроизведении единиц измерений. На практике же для величин, соответствующих основным

единицам SI, эталоны, кроме единиц, хранят и воспроизводят шкалы (атомного и астрономического времени, температурную МТШ-90 и т. д.). При любом варианте построения эталонов поверочными схемами предусматривается воспроизведение всех необходимых для практики участков шкал. Абсолютные шкалы могут опираться на эталоны, воспроизводящие любые их участки (как эталоны метрических шкал), но могут воспроизводиться и без них (КПД, коэффициент усиления).

На практике возникают ситуации, когда диапазоны практически используемых значений многих измеряемых величин весьма велики. Например, коэффициенты усиления и ослабления сигналов в современных радиотехнических устройствах достигают сотен тысяч, воспринимаемые человеком звуковые давления различаются в миллионы раз от порогов слышимости до болевых ощущений. Запоминать, перемножать, делить большие числа, часто выражаемые десятичными дробями, затруднительно. Но если вместо больших чисел использовать их логарифмы, диапазоны измеряемых значений резко сокращаются. Операции умножения и деления заменяются более простыми – сложением и вычитанием. Поэтому для величин, описываемых шкалами разностей, отношений и абсолютными иногда прибегают к логарифмическим преобразованиям и получают, так называемые **логарифмические шкалы**. Логарифм есть число безразмерное, поэтому перед логарифмированием преобразуемая размерная величина в начале обращается в безразмерную путем ее деления на принятое по соглашению произвольное (опорное) значение той же величины, после чего выполняется операция логарифмирования. Практическое распространение получили логарифмические шкалы на основе применения систем десятичных и натуральных логарифмов, а также логарифмов с основанием два. Используются, например, для измерения уровней различных величин, уровня громкости звука, частотных интервалов, количества информации.

Развитие техники проводной связи поставило задачу измерения затухания и усиления мощности в линиях связи (четырёхполосниках) и выбора удобной единицы измерения. В качестве величины, характеризующей затухание и усиление, или, иначе говоря, соотношение между входной P_1 и выходной P_2 мощностями на входе и выходе линии, был принят десятичный логарифм отношения этих мощностей

$$X = \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \lg \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

При этом логарифмическая единица для значений X получила особое наименование бел (Б). Наибольшее распространение получила дольная белу логарифмическая единица, равная десятой его части – децибел (дБ).

Логарифмические единицы бел и децибел допущены к применению наравне с единицами SI.

3.2 Шкалы на основе предпочтительных чисел

Измерительные шкалы, основанные на использовании рядов предпочтительных чисел, обычно являются метрическими шкалами интервалов или абсолютных величин, исчисляемых, например, единицами допусков измеряемых линейных размеров или качествами.

Предпочтительными называют числа, наиболее часто используемые в технике, технологии, науке и в других сферах деятельности людей. Предпочтительные числа представляют собой определенное множество взаимосвязанных чисел (ряд чисел), которые обладают систематизирующим свойством, что позволяет использовать их при выборе, назначении и измерении размеров различных величин. Чаще всего математические выражения изменяющихся состояний имеют вид простой арифметической (линейной) или геометрической (нелинейной) прогрессии.

Ряд чисел арифметической прогрессии имеет постоянную разницу между каждыми двумя соседними числами. Ряд чисел геометрической прогрессии характеризуется тем, что произведение или частное любых двух чисел ряда всегда является членом этого ряда.

Так как сейчас везде принята десятичная система счета чисел, начиная с единицы, то наиболее удобными являются геометрические прогрессии, включающие число 1 и имеющие $\varphi_n = \sqrt[n]{10}$ с n , кратным 10. Международная организация по стандартизации (ISO) установила (рекомендация Р ИСО 497) четыре основных десятичных ряда предпочтительных чисел со знаменателями φ , указанными в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Предпочтительные знаменатели геометрических прогрессий

Обозначение ряда предпочтительных чисел	Знаменатель φ геометрического ряда чисел	Количество чисел в интервале от 1 до 10
R5	$\varphi = \sqrt[5]{10} \approx 1,6$	5
R10	$\varphi = \sqrt[10]{10} \approx 1,25$	10
R20	$\varphi = \sqrt[20]{10} \approx 1,12$	20
R40	$\varphi = \sqrt[40]{10} \approx 1,06$	40
R80	$\varphi = \sqrt[80]{10} \approx 1,03$	80

Следует отметить, что установленные ИСО ряды предпочтительных чисел основаны не только на десятичной системе счета, но и на принципе оптимальных соотношений, который реализован, например, в «золотом сечении». Под «золотым сечением» понимают прямоугольник со

сторонами a и b , которые соотносятся между собой как:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} \approx 1,6 \text{ или } \frac{b}{a} = \frac{b}{a+b} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 0,618.$$

Например, $\varphi = \sqrt[5]{10} = 1,6$.

Ряды предпочтительных чисел используются для установления унифицированных размеров сверл, фрез, разверток, зенкеров и других инструментов, а также размеров и допусков (отклонений) деталей машин, изделий в целом, технических параметров (свойств) продукции, процента дефектности в партиях продукции, величин напряжений электрического тока, номинальных значений длин электромагнитных волн радиовещательных диапазонов т. д.

Поэтому, например, числа номинальных значений радиовещательных диапазонов λ и грузоподъемности железнодорожных цистерн P имеют сходные величины:

λ – 80 м, 63 м, 49 м, 41 м, 31 м, 25 м, 19 м, 16 м, 12 м, 10 м;

P – 80 т, 63 т, 50 т, 40 т, 32 т, 25 т, 20 т, 16 т, 12 т, 10 т.

На практике используются не только ряды типа R . Например, в радиотехнике часто применяют установленные Международной электротехнической комиссией (МЭК) предпочтительные числа рядов E : $E3$; $E6$; $E12$; $E24$.

Иногда используют так называемые *ступенчатые* и *прерывистые* ряды предпочтительных чисел. Ступенчатый ряд – такой параметрический ряд характеристик продукции, который задают вначале одним рядом предпочтительных чисел (например, $R5$), а по достижении определенного значения параметра переходят к другому ряду (например, $R10$). Прерывистым рядом предпочтительных чисел называется тот, в котором опускается некоторое количество членов ряда.

Номинальные линейные размеры (диаметры, длины, глубины, расстояния между осями и т. д.) изделий, их частей, отдельных деталей и соединений в соответствии с требованиями стандартов назначаются равными предпочтительным числам того или иного ряда R . Эти номинальные размеры являются *базовыми*, по отношению к которым назначаются допуски разрешенных отклонений. Фактические отклонения должны быть в пределах допусков, и этим оценивается точность изготовленных изделий.

Номинальным размером называется размер, который служит началом отсчета отклонений и относительно которого определяются предельные размеры.

Отклонением размера называется алгебраическая разность между действительным (наибольшим или наименьшим) и соответствующим номинальным размером.

Допустимая разность между верхним (наибольшим) и нижним (наименьшим) предельными значениями размеров называется *допуском*.

Градация допусков осуществлена в виде *набора классов* или *степеней точности*. Степень точности геометрических размеров, характеризуемая величиной допуска (выраженного в микрометрах), для установленного количества номинальных размеров называется *квалитетом* и обозначается буквами IT – сокращение от слов ISO Tolerance.

Иначе говоря, квалитет – характеристика точности изготовления изделия (например, детали), определяющая соответствующие методы и средства обработки, а также контроля качества обработки. Единой системой допусков и посадок (ЕСДП), основанной на системе допусков ИСО, для размеров от 1 до 10 000 мм установлено 19 квалитетов. Обозначение последовательного ряда квалитетов, в порядке возрастания допуска на номинальный размер, таково: IT01, IT0, IT1, IT2, IT3,..., IT17.

Градация измерительных шкал допусков имеет вид геометрической прогрессии, а шкала квалитетов является равномерной (шкала арифметической прогрессии).

4 ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

4.1 Принципы измерений

Для систематизации подхода к измерению, для выявления и оценки погрешностей, прежде всего, необходимо классифицировать сами измерения.

Измерительное преобразование всегда осуществляется с использованием некоторого физического закона или эффекта, который рассматривают как принцип, положенный в основу измерительного преобразования. **Принцип измерений** – физическое явление или эффект, положенные в основу измерений. Например, измерение температуры с помощью термопары (использование термоэлектрического эффекта); применение эффекта Джозефсона для измерения электрического напряжения; применение эффекта Доплера для измерения скорости.

Поскольку принципы измерений связаны с измерительными преобразованиями, можно говорить о классификации средств измерений, построенных на определенных принципах преобразования измерительной информации: механических, оптических, электрических, электромагнитных, магнитных, пневматических, гидравлических и других.

Существенные достоинства, которыми обладают электроизмерительные приборы, обусловили то, что прямые преобразования измеряемых величин (в частности неэлектрических) в

перемещения указателей приборов стали заменять преобразованием их в электрические величины, измеряемые с помощью электроизмерительных приборов.

Рассмотрим некоторые типичные принципы и отдельные физические явления, позволяющие преобразовать измеряемые неэлектрические величины в электрические:

1. **Термоэлектрический эффект** применяется для измерения температуры и имеет два способа реализации:

- нагревание электрических проводников и полупроводников вызывает изменение их сопротивления. Соответствующие преобразователи называются терморезисторами или термисторами. С увеличением температуры сопротивление термистора уменьшается, а у терморезистора – возрастает. Чувствительные элементы полупроводникового преобразователя изготавливаются из окислов различных металлов. Одни материалы (например, платина) позволяют получить высокую точность измерения температуры, другие материалы (особенно полупроводники) дают возможность измерять очень малые интервалы температур и температуру тел очень малого объема. На этом принципе работают термометры сопротивления;

- возникновение термоЭДС в замкнутом контуре, состоящем из двух полупроводников (или проводников), спаянных между собой на одном конце, а на другом подключенных к измерителю ЭДС, при различии температуры в месте спая и в месте соединения с измерителем. Такие преобразователи называются термопарами.

2. **Пьезоэлектрический эффект** заключается в возникновении ЭДС на поверхности (гранях) некоторых кристаллов (кварц, турмалин, искусственные материалы – пьезокерамика), когда к двум граням приложена сила, сдавливающая или растягивающая их. Это явление обратимо, т. е., когда к двум граням приложено напряжение, кристалл деформируется. Пьезоэлектрический эффект, практически безинерционный, используется для измерения давления, вибрации, частоты электрических колебаний. Особое значение этот эффект имеет для стабилизации частоты высокочастотных генераторов. Для этой цели применяются, как правило, кристаллы кварца.

3. **Фотоэлектрический эффект** основан на преобразовании световой энергии в электрическую. Для целей измерений используются внешний и внутренний фотоэффекты. Внешний фотоэффект возникает в вакуумированном баллоне, имеющем анод и фотокатод. При освещении фотокатода в нем под влиянием фотонов света эмиттируются электроны. В случае наличия между анодом и фотокатодом электрического напряжения эмиттируемые фотокатодом электроны образуют электрический ток, называемый фототоком. Такие преобразователи называются фотоэлементом.

Внутренний фотоэффект возникает при освещении слоя между

некоторыми полупроводниками и металлами. В этом слое возбуждается ЭДС. У ряда полупроводников под влиянием светового излучения изменяется электрическое сопротивление. Иногда этот эффект называется фоторезистивным, а соответствующие устройства – фоторезисторами. Фоторезисторы обладают высокой чувствительностью, существенно превышающей чувствительность фотоэлементов. В качестве фоточувствительного материала применяют сернистый кадмий, сернистый свинец, кремний и др.

4. **Тензометрический эффект** основан на том, что растяжение или сжатие некоторых металлов в пределах их упругости вызывает изменение их электрического сопротивления. Это явление дает возможность изготавливать электротензометры и измерять малые деформации тел и усилия в условиях, при которых измерение другими методами невозможно, например, деформации различных частей машин во время их работы.

5. Магнитная проницаемость тел из ферромагнитных материалов изменяется в зависимости от приложенных к ним механических сил (растягивающих, сжимающих, изгибающих, скручивающих). Наблюдается и обратное явление: в ферромагнитном теле при внесении его в магнитное поле возникают механические деформации. Эти явления получили название **магнитострикции**. Магнитное поле, изменяющееся при механическом воздействии, измеряется при помощи катушки, обмотка которой помещается на ферромагнитном сердечнике. Магнитострикционные преобразователи применяются главным образом в технике измерения звуковых и ультразвуковых колебаний.

4.2 Виды измерений

Область измерений – совокупность измерений физических величин, свойственных какой-либо области науки или техники и выделяющихся своей спецификой. В соответствии с определением выделяют ряд областей измерений: механические измерения, магнитные, акустические, измерения ионизирующих излучений и др.

Видом измерений названа часть области измерений, имеющая свои особенности и отличающаяся однородностью измеряемых величин. Например, измерения электрического сопротивления, электродвижущей силы, электрического напряжения, относятся к области электрических измерений.

Более широкая трактовка видов измерений с использованием различных оснований классификации:

по способу получения результата измерений: **прямые и косвенные измерения;**

по однородности или неоднородности измеряемых величин: **совокупные и совместные измерения**;

по числу измерений: **однократные и многократные измерения**;

по характеру изменения величины во времени: **статические и динамические измерения**;

по точности: **равноточные и неравноточные измерения**;
равнорассеянные и неравнорассеянные.

Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно по устройству отображения измерительной информации применяемого средства измерений.

Примеры прямых измерений: измерение длины детали микрометром, силы тока амперметром, массы на весах.

Косвенное измерение – определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Формальная запись функциональной связи:

$$Q = f(X, Y, Z...),$$

где $X, Y, Z...$ – результаты прямых измерений.

Принципиальной особенностью косвенных измерений является необходимость обработки результатов вне прибора.

Пример: определение плотности материала твердого тела по результатам прямых измерений массы m , высоты h и диаметра цилиндра d , связанных с плотностью уравнением

$$\rho = m / 0,25\pi d^2 h.$$

Прямые и косвенные измерения характеризуют измерения некоторой конкретной физической величины. Измерение любого **множества** физических величин классифицируется в соответствии с однородностью (или неоднородностью) измеряемых величин.

Совокупные измерения – проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях.

Для определения значений искомых величин число уравнений должно быть не меньше числа величин.

Пример

Значение массы отдельных гирь набора определяют по известному значению одной из гирь и по результатам измерений (сравнений) масс различных сочетаний гирь.

Определение значений массы отдельных гирь набора Г-1-1110 по известному значению массы эталонной гири 1 кг по результатам измерений (сравнений) масс различных сочетаний гирь (для поверки набора гирь Г-1-1110 нужно составить 13 уравнений). Набор состоит из гирь массой 500, 200, 200*, 100, 50, 20, 20*, 10, 5, 2, 2* и

1 г. Сначала методом точного взвешивания на весах повышенной точности сличают гирию 1 кг (1000 г) с гирями набора 500, 200, 200*, 100 и получают уравнение:

$$1000 - (500 + 200 + 200^* + 100) = a_1.$$

Затем гирию 500 г набора сличают с массой гирь 200, 200*, 100 и получают уравнение:

$$500 - (200 + 200^* + 100) = a_2.$$

Аналогично проводят другие сличения и получают 13 уравнений с 13 неизвестными. Решив систему уравнений получают действительные значения масс гирь набора.

Совместные измерения – проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для определения зависимости между ними. Совместные измерения подразумевают измерение нескольких неоднородных величин (X , Y , Z и т. д.).

Пример

Одновременное измерение длин и температур для нахождения температурного коэффициента линейного расширения. Так же определяют коэффициенты в формуле, связывающей сопротивление резистора с его температурой.

$$R_t = R_{20} [1 + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2],$$

где R_t – сопротивление резистора при температуре t °C; R_{20} – сопротивление резистора при температуре 20 °C; α , β и R_{20} – искомые величины.

Измеряя сопротивление резистора при различных температурах (t_1 , t_2 , t_3), определяемых по термометру, получают систему уравнений:

$$\begin{cases} R_t^I = R_{20} [1 + \alpha(t_1 - 20) + \beta(t_1 - 20)^2]; \\ R_t^{II} = R_{20} [1 + \alpha(t_2 - 20) + \beta(t_2 - 20)^2]; \\ R_t^{III} = R_{20} [1 + \alpha(t_3 - 20) + \beta(t_3 - 20)^2]. \end{cases}$$

Решая эту систему, находят α , β и R_{20} .

По числу повторных измерений одной и той же величины различают **однократные** и **многократные** измерения.

Однократное измерение – измерение, выполненное один раз.

Многократное измерение – измерение физической величины одного и того же размера, результат которого получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т. е. состоящее из ряда однократных измерений.

По характеру изменения измеряемой величины различают:

– **статическое измерение** – измерение физической величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения;

– **динамическое измерение** – измерение, при котором средство измерений используется в динамическом режиме. Это означает, что за время проведения измерительного эксперимента изменяются условия (факторы), которые влияют на результат измерения, в т. ч. изменение самой измеряемой величины за время измерения.

По реализованной точности и по степени рассеяния результатов при многократном повторении измерений одной и той же величины различают **равноточные** и **неравноточные**, а также на **равнорассеянные** и

неравнорассеянные измерения. Эти термины не приводятся в РМГ 29-2013. Но проверка рядов измерений на равноточность и равнорассеянность имеет значение при обработке результатов измерений.

Равноточные измерения – ряд измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью. При многократных измерениях дисперсии всех рядов измерений равны между собой.

Неравноточные измерения – ряд измерений какой-либо величины, выполненных различающимися по точности средствами измерений и (или) в разных условиях.

Методы обработки этих видов измерений отличаются, поэтому равноточность измерений статистически проверяют по критерию Фишера, а неравноточные измерения обрабатывают с учетом веса отдельных измерений, входящих в ряд.

4.3 Методы измерений

В соответствии с РМГ 29-2013 **метод измерений** – прием или совокупность приемов сравнения измеряемой физической величины с ее единицей или соотнесения со шкалой в соответствии с реализованным принципом измерений.

Классификация методов измерений может осуществляться по разным основаниям. Например:

- 1) в зависимости от используемого физического принципа: электрические, магнитные, механические, оптические и т. д.;
- 2) в зависимости от режима изменения во времени измерительного сигнала: статические и динамические;
- 3) в зависимости от способа взаимодействия СИ и объекта измерений: контактные и бесконтактные.

Контактный метод измерений (контактный метод) – метод измерений, основанный на том, что чувствительный элемент прибора приводится в контакт с объектом измерения.

Примеры: измерение диаметра вала индикаторной скобой, измерение температуры тела термометром.

Бесконтактный метод измерений – метод измерений, основанный на том, что чувствительный элемент средства измерений не приводится в контакт с объектом измерения.

Примеры: могут быть измерение температуры пирометром; измерение расстояния до объекта радиолокатором;

- 4) в зависимости от применяемого в СИ измерительного сигнала: аналоговые и цифровые;
- 5) по способу сравнения измеряемой величины с единицей: метод

непосредственной оценки и метод сравнения с мерой и его разновидности.

Последний признак является наиболее соответствующим приведенным определениям метода измерений. Его и рассмотрим детально.

Анализ метода измерений следует начинать с выяснения основных признаков: является он **методом непосредственной оценки** или **методом сравнения с мерой**. Фактически это единственное принципиальное деление, поскольку значительная часть терминов просто уточняет разновидности метода сравнения с мерой.

Метод непосредственной оценки – метод измерений, при котором значение величины определяют непосредственно по показывающему средству измерений.

Например, взвешивание на электронных весах, определение размера микрометром, давление пружинным манометром. Измерения проводятся быстро, легко, не требуют высокой квалификации оператора.

Метод сравнения с мерой – метод измерений, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой.

Примеры: измерение массы на рычажных весах с уравниванием объекта гирями (мерами массы); измерения напряжения постоянного тока прибором-компенсатором путем сравнения с известной ЭДС нормального элемента.

Метод сравнения с мерой (в отличие от метода непосредственной оценки) предусматривает **обязательное использование оверсметленной меры**. Меры в явном виде воспроизводят с выбранной точностью физическую величину определенного (близкого к измеряемой) размера.

Метод сравнения с мерой реализуется в нескольких разновидностях, среди которых различают:

- *дифференциальный метод*;
- *нулевой метод*;
- *метод замещения*;
- *метод дополнения*;
- метод противопоставления;
- метод совпадений.

(Курсивом выделены термины, включенные в РМГ 29-2013)

В зависимости от степени приближения размера, воспроизводимого мерой, к измеряемой величине различают **дифференциальный и нулевой методы**.

Дифференциальный метод – метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, и при котором измеряется разность между этими двумя величинами.

Метод реализуется в тех случаях, когда точно и просто реализуется

операция вычитания величин (длины, перемещения, электрического напряжения, ЭДС). Не применяется для температуры или твердости.

Пример

Измерения длины, выполняемые при поверке мер длины сравнением с эталонной мерой на компараторе.

Нулевой метод измерений (можно сказать, частный случай дифференциального метода) – метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на прибор сравнения доводят до нуля.

Примеры:

1. Измерения массы взвешиванием на равноплечих рычажных весах с полным уравновешиванием чашек.

2. Измерение электрического сопротивления мостом с полным его уравновешиванием.

В зависимости от одновременности или неодновременности воздействия на прибор сравнения измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой, различают метод замещения и метод противопоставления.

Метод измерений замещением (метод замещения) – метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины.

Примеры:

1. Взвешивание с поочередным помещением измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашку весов (метод Борда).

2. Применяется при электрических измерениях с помощью мостов переменного тока.

Преимущество метода заключается в том, что эти величины воздействуют на прибор **последовательно**.

Метод противопоставления – метод сравнения с мерой, в котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, **одновременно** воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливают соотношение между этими величинами.

Пример

Взвешивание груза на равноплечих весах, когда измеряемая масса определяется как сумма массы гирь, ее уравновешивающих, и показания по шкале весов.

Метод дополнения – метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

Примеры:

1. Измерение больших токов амперметрами, рассчитанными на малые токи, с включением шунтов.

2. Измерение малых длин микрометром с диапазоном измерения 25...50 мм, с использованием добавочной плоскопараллельной концевой меры длины.

Метод совпадений – метод сравнения с мерой, при котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой

мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов.

Для оценки совпадения можно использовать прибор сравнения или органолептику, фиксируя появление определенного физического эффекта.

Примеры:

1. По принципу метода совпадений построен нониус, входящий в состав ряда измерительных приборов.

2. Совпадение резонансных частот – при приеме точных сигналов времени. В методе измерений частоты переменного тока с помощью осциллографа сравнивают фигуры Лиссажу, соответствующие искомой частоте и частоте меры, и по их совпадению определяют искомую частоту.

5 СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

5.1 Классификация средств измерений

Средства измерений, используемые в различных областях науки и техники, чрезвычайно многообразны.

Средство измерений (СИ) – техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики. Основным признаком в данном определении являются нормированные метрологические характеристики, что подразумевает и возможность воспроизведения единицы физической величины с требуемой точностью, и ее сохранение на протяжении всего периода метрологической пригодности средства измерений.

СИ является обобщенным понятием, объединяющим самые разнообразные, конструктивно законченные устройства, которые реализуют одну из двух функций:

- воспроизводят величину заданного размера (например, гиря – заданную массу, магазин сопротивлений – ряд дискретных значений сопротивления);

- вырабатывают сигнал (показание), несущий информацию о значении измеряемой величины. Показания СИ либо непосредственно воспринимаются органами чувств человека, либо используются для преобразования другими СИ.

В зависимости от роли СИ в процессе измерения, конструктивного исполнения и функционального назначения классификация средств измерений показана на рисунке 5.1



Рисунок 5.1 – Классификация средств измерений

Простейшим средством измерений является мера.

Мера физической величины – средство измерений, предназначенное для воспроизведения и (или) хранения ФВ одного или нескольких заданных размеров с приписанными им значениями.

Главная отличительная особенность меры – отсутствие каких-либо преобразований измерительной информации самим средством измерений.

Различают следующие разновидности мер:

- однозначная – мера, воспроизводящая ФВ одного размера (например, гиря массой 1 кг; угольник (мера прямого угла);
- многозначная – мера, воспроизводящая ряд ФВ разных размеров (например, штриховая мера длины – линейка; конденсатор переменной емкости);
- набор мер – комплект мер разного размера одной и той же ФВ, предназначенных для применения на практике, как в отдельности, так и в различных сочетаниях (например, наборы концевых мер длины, угловых концевых мер, наборы разновесов).
- магазин мер – набор мер, конструктивно объединенных в единое устройство, в котором имеются приспособления для их соединения в различных комбинациях (например, магазин электрических сопротивлений).

Измерительный преобразователь (ИП) – техническое средство с нормированными метрологическими характеристиками, служащее для преобразования измеряемой величины X в другую величину Y или измерительный сигнал, удобный для обработки, хранения, дальнейших преобразований, индикации или передачи. Примеры измерительных преобразователей – термопара, пружина динамометра.

По месту, занимаемому в измерительной цепи, различают преобразователи первичные и промежуточные. **Первичный ИП** – измерительный преобразователь, на который непосредственно воздействует измеряемая физическая величина, т. е. первый преобразователь в измерительной цепи измерительного прибора (установки, системы). В одном средстве измерений может быть несколько первичных преобразователей, например, ряд термопар измерительной установки, предназначенной для контроля температуры в разных точках холодильной емкости.

ИП предназначен для выполнения одного измерительного преобразования (рис. 5.2 а). Важнейшей характеристикой ИП является функция преобразования (рис. 5.2 б) в виде $Y = f(X, Z_1)$. Отклонения реальной передаточной функции ИП от идеальной приводят к возникновению аддитивности, мультипликативной и нелинейной составляющих погрешности.

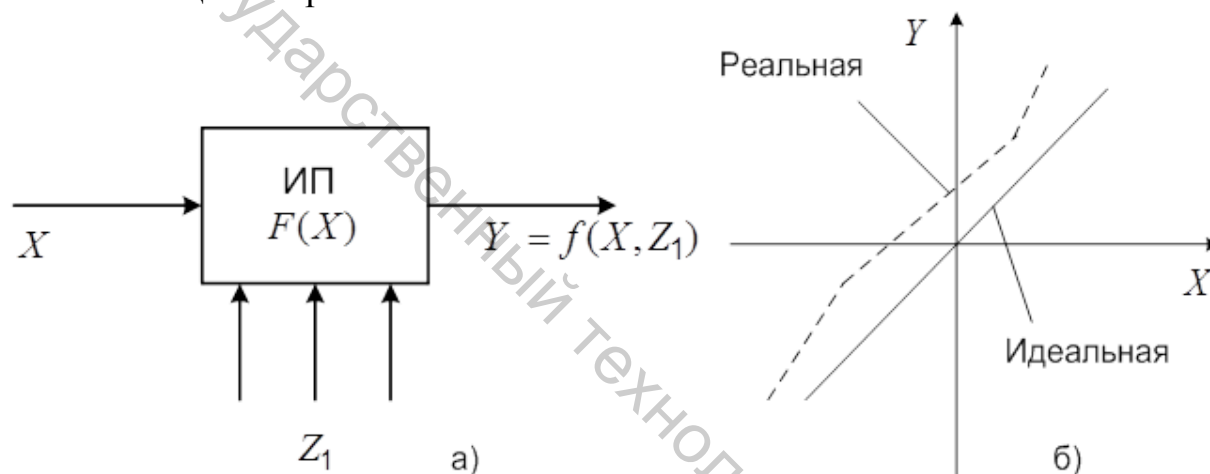


Рисунок 5.2 – Структурная схема измерительного преобразователя (а) и его функция преобразования (б)

Линейный преобразователь – это ИП, имеющий линейную связь между входной и выходной величинами. Их разновидностью является масштабный ИП, предназначенный для изменения размера величины или измерительного сигнала в заданное число раз. Его уравнение преобразования имеет вид $Y = kX$, где X , Y – однородные входная и выходная величины; k – постоянный коэффициент передачи.

По виду входных и выходных величин ИП делятся на:

- аналоговые, преобразующие одну аналоговую величину в другую аналоговую величину;
- аналого-цифровые (АЦП), предназначен для преобразования аналогового измерительного сигнала в цифровой код;
- цифроаналоговые (ЦАП), предназначенные для преобразования цифрового кода в аналоговую величину.

Отличительной особенностью измерительного преобразователя

является выдача им измерительной информации в форме, не поддающейся непосредственному восприятию оператором.

Измерительный прибор (прибор) – средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия.

Прибор включает в себя один или несколько измерительных преобразователей и присоединенное к ним устройство отображения измерительной информации типа шкала-указатель, указатель-диаграммная бумага, числовое табло. В зависимости от системы представления информации различают показывающие или регистрирующие приборы, причем регистрирующие могут быть записывающими либо печатающими, а в зависимости от формы выходного сигнала различают приборы с аналоговым либо с дискретным выходом («цифровые»).

Принято различать также *приборы прямого действия* и *приборы сравнения*. **Приборы сравнения (компараторы)** – это средства измерений, предназначенные для сличения мер однородных величин, измерительных преобразователей и измерительных приборов. Во многих относительно простых СИ роль компаратора выполняют органы чувств человека, главным образом зрение. Примерами являются рычажные весы, компаратор для сличения нормальных элементов.

Иногда отдельно выделяют **индикаторы** – это особый вид средств измерений, которые предназначены для установления наличия какой-либо физической величины или определения ее порогового значения (индикатор фазового провода электропроводки, лакмусовая бумага, индикаторы охранной сигнализации и т. п.). В некоторых случаях в качестве индикаторов могут использоваться измерительные приборы (омметр при проверке обрыва в электрической цепи, часы-будильник).

Основные и вспомогательные средства измерений и дополнительные устройства могут быть объединены в измерительные установки или измерительные комплексы (системы).

Основное СИ – средство измерений той физической величины, значение которой необходимо получить в соответствии с измерительной задачей. *Вспомогательное СИ* – средство измерений той физической величины, влияние которой на основное средство измерений или объект измерений необходимо учитывать для получения результатов измерений требуемой точности. Примером вспомогательного средства измерений является термометр для измерения температуры газа в процессе измерений объемного расхода этого газа.

Измерительная установка (установка) – совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и других устройств, предназначенная для измерений одной или нескольких физических величин и расположенная в одном месте. Существуют поверочные и рабочие установки. Например, установка для поверки счетчиков электрической энергии или установка

для измерений удельного поверхностного электрического сопротивления.

Измерительные системы – это совокупность функционально объединенных средств измерений, средств вычислительной техники и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, предназначенных для выработки сигналов измерительной информации о физических величинах, свойственных данному объекту, в форме, удобной для автоматической обработки, передачи и (или) использования в автоматических системах управления.

Например, измерительная система теплоэлектростанции, позволяющая получать измерительную информацию о ряде физических величин в разных энергоблоках, которая может содержать сотни измерительных каналов; радионавигационная система для определения местоположения различных объектов, состоящая из ряда измерительно-вычислительных комплексов, разнесенных в пространстве на значительное расстояние друг от друга.

Информационно-измерительные системы (ИИС) – это совокупность технических средств, выполненных в блочно-модульном исполнении, объединенных общим алгоритмом функционирования, обладающих набором нормированных метрологических характеристик и предназначенных для автоматического (автоматизированного) получения информации непосредственно от объекта, преобразования ее, передачи, измерения, обработки, хранения и представления в форме, доступной для восприятия оператором и (или) ввода в управляющую систему.

ИИС позволяет осуществлять:

- непосредственную связь с объектом исследования;
- обработку измерительной информации;
- централизованное автоматическое (автоматизированное) управление;
- многоканальные измерения различных физических величин.

Эти наиболее характерные признаки в комплексе присущи только измерительной системе.

В зависимости от выполняемых функций ИИС классифицируются по назначению на измерительные; автоматического контроля; технической диагностики; идентификации.

Измерительные ИИС, выполняющие прямые, косвенные, совокупные измерения с соответствующей математической обработкой и выдачей численного значения физической величины (телеизмерительные ИИС, если исследуемый объект находится на очень большом расстоянии).

ИИС автоматического контроля, предназначенные для установления соответствия между состоянием (свойством) объекта контроля и заданной нормой, определяющей качественно различные области его состояния. В результате система контроля выдает информацию о состоянии объекта контроля и об отклонениях от заданной нормы.

ИИС технической диагностики, дающие информацию о

неисправностях и повреждениях какой-либо системы, на основании которой решается задача отыскания места повреждений и установления причин этих повреждений и неисправностей; выявления элементов, послуживших причиной неправильного функционирования и восстановления нормальной работы объекта.

ИИС идентификации (распознавания образов) предназначены для установления соответствия между объектом и заданным образом. Так же как и норма при контроле, при опознании образ может быть задан в виде образцового изделия или в виде перечня определенных свойств и значений параметров (признаков) с указанием полей допуска.

Системы, содержащие программно-управляемые цифровые вычислительные средства (микропроцессоры, малые ЭВМ), обладают определенной универсальностью и при соответствующем программном обеспечении могут выполнять функции систем различного назначения.

Измерительные системы, содержащие такие вычислительные средства, называют измерительно-вычислительными (ИВС). Универсальное ядро ИВС называют измерительно-вычислительным комплексом (ИВК).

Измерительно-вычислительный комплекс – автоматизированные средства измерения и обработки информации, предназначенные для исследования сложных объектов и представляющие собой совокупность программно-управляемых средств (измерительных и вычислительных) и средств воздействия на объект исследования.

Измерительно-вычислительные комплексы, производимые серийно, проходят государственные контрольные испытания и аттестацию.

В зависимости от степени участия оператора в процессе, различают автоматические, автоматизированные и неавтоматизированные средства измерений.

Автоматическое средство измерений – средство измерений, производящее без непосредственного участия человека измерения и все операции, связанные с обработкой результатов измерений, их регистрацией, передачей данных или выработкой управляющего сигнала.

Автоматизированное средство измерений – средство измерений, производящее в автоматическом режиме одну или часть измерительных операций.

Средства измерений подразделяются на виды и типы, причем вид средств измерений может включать несколько их типов. Амперметры являются видами средств измерений силы электрического тока, а вольтметры – напряжения электрического тока.

Вид средства измерений – совокупность средств измерений, предназначенных для измерений данной физической величины.

Тип средства измерений – совокупность средств измерений одного и того же назначения, основанных на одном и том же принципе действия, имеющих одинаковую конструкцию и изготовленных по одной и той же

технической документации. Средства измерений одного типа могут иметь различные модификации (например, индикаторы часового типа ИЧ отличаются по диапазонам показаний).

Кроме того, при измерениях широко применяют измерительные принадлежности. **Измерительные принадлежности** – вспомогательные средства, служащие для обеспечения необходимых условий для выполнения измерений с требуемой точностью. Например, термостат, специальные противовибрационные фундаменты, тренога для установки прибора по уровню и другие устройства, предназначенные для защиты объекта измерений и средств измерений от действия влияющих величин.

5.2 Метрологические характеристики средств измерений

Метрологическая характеристика средства измерений (МХ СИ) – характеристика одного из свойств средства измерений, влияющая на результат измерений и на его погрешность. Различают нормируемые метрологические характеристики, устанавливаемые нормативными документами на средства измерений, и действительные характеристики, определяемые экспериментально. Метрологические характеристики весьма разнообразны, они существенно различаются по значимости и информативности и существенно зависят от типа средств измерений.

МХ СИ по ГОСТу 8.009 делят на следующие группы:

- характеристики, предназначенные для определения результатов измерений. Такие МХ можно назвать номинальными;
- характеристики погрешностей СИ;
- характеристики чувствительности СИ к влияющим величинам;
- динамические характеристики СИ;
- характеристики средств измерений, отражающие их способность влиять на инструментальную составляющую погрешности;
- неинформативные параметры выходного сигнала СИ.

К первой группе характеристик относят: функцию преобразования измерительного преобразователя или измерительного прибора; значение однозначной или значения многозначной меры; цену деления шкалы измерительного прибора или многозначной меры; вид выходного кода, число разрядов кода, цену единицы наименьшего разряда кода средств измерений, предназначенных для выдачи результатов в цифровом виде

Функция преобразования средства измерения – зависимость между значениями величин на входе и выходе средства измерений, полученная экспериментально. Например, зависимость деформации динамометрической пружины от приложенной к ней нагрузки. Функция может быть выражена в виде формулы, графика или таблицы.

Цена деления шкалы – разность значений величины,

соответствующих двум соседним отметкам шкалы средства измерений. Для цифровых средств измерений аналогом цены деления шкалы, в частном случае, может быть цена единицы наименьшего разряда. В других случаях указанное соответствие будет определяться числом разрядов на табло и видом выходного кода, т. е. формой представления числа (с фиксированной или плавающей запятой).

Вторая группа характеристик погрешности средств измерений может быть представлена в виде полной погрешности или её составляющих.

Характеристики систематической составляющей погрешности средств измерений выбирают из числа следующих:

- 1) значение систематической составляющей Δ_s ;
- 2) значение систематической составляющей Δ_s и, дополнительно, математическое ожидание $M[\Delta_s]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[\Delta_s]$ систематической составляющей погрешности (для отдельного средства измерений систематическая составляющая есть постоянная величина, но для множества средств измерений конкретного типа она является погрешностью изготовления и рассматривается как случайная величина).

Характеристики случайной составляющей погрешности средств измерений могут быть представлены в виде:

- 1) среднего квадратического отклонения $\sigma[\Delta]$ случайной составляющей погрешности;
- 2) среднего квадратического отклонения случайной составляющей погрешности и, дополнительно, нормализованной автокорреляционной функции $r_\Delta(\tau)$ или функции спектральной плотности $S_\Delta(\omega)$ случайной составляющей погрешности.

Характеристику случайной составляющей погрешности гистерезиса представляют вариацией H выходного сигнала (показания) средства измерения. **Вариация** показаний измерительного прибора – разность показаний прибора в одной и той же точке диапазона измерений при плавном подходе к этой точке со стороны меньших и больших значений измеряемой величины. Погрешность гистерезиса обусловлена отличием показаний данного экземпляра измерительного прибора при различной скорости и направлении изменения информативного параметра входного сигнала.

Третья группа характеристик чувствительности средств измерений к влияющим факторам выражается функцией влияния $\varphi(\xi)$, представляющей зависимость изменения метрологической характеристики средства измерения от изменения влияющей величины (например, изменения погрешности измерения давления тензодатчиком от температуры), или изменением значений метрологических характеристик, вызванных изменениями влияющих величин ξ в установленных пределах.

В случае если изменение влияющей величины существенно отражается на изменении погрешности средства измерения, метрологические характеристики нормируют для нормальных условий. При этом характеристики погрешности называют **характеристиками основной погрешности** средства измерения, а составляющую погрешности, возникающую вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от ее нормального значения называют **дополнительной погрешностью**.

Пример задания основной и дополнительной погрешностей в паспорте аналого-цифрового преобразователя Ф4222.

Основная погрешность, % - $\pm[0,6+0,5(X_k/X - 1)]$.

Дополнительная погрешность, %:

– при отклонении температуры окружающего воздуха от $(20\pm 5)^\circ\text{C}$ на каждые 10°C в пределах $(+5...+50)^\circ\text{C}$ - $\pm 0,5$;

– при изменении напряжения питания в пределах $(+10...-15)\%$ и частоты на $\pm 2\%$ относительно номинальных значений ... - $\pm 1,0$;

– от влияния внешнего переменного магнитного поля частотой 50 Гц , напряженностью 4000 А/м - $\pm 1,0$.

При незначительных дополнительных погрешностях допускается нормировать метрологические характеристики для рабочих условий.

Четвертую группу метрологических характеристик приходится учитывать при динамических измерениях, когда становятся важными инерционные свойства средства измерений.

Если на вход средства измерений подается нестационарный, переменный сигнал измерительной информации выходной сигнал прибора будет нести «запоздалую» (из-за инерционных задержек в механизме прибора) и искаженную (из-за динамических погрешностей) информацию об измеряемой величине. Если такие «задержки» для средства измерений велики, то их нецелесообразно применять для измерения быстроменяющихся величин.

Характеристики инерционных свойств средств измерений называют динамическими характеристиками. В их состав могут входить *полная динамическая характеристика и частные динамические характеристики*.

Полная динамическая характеристика аналоговых, а также аналогово-цифровых средств измерений, время реакции которых больше интервала между двумя измерениями, может быть представлена в виде: переходной характеристики; импульсной переходной характеристики; амплитудно-фазовой характеристики; амплитудно-частотной характеристики; совокупности амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик; передаточной функции.

К частным динамическим характеристикам относят любые функционалы или параметры полных динамических характеристик: время реакции, коэффициент демпфирования, постоянная времени, значение резонансной собственной круговой частоты, погрешность датирования отсчета, максимальная частота (скорость) измерений.

Пятую группу метрологических характеристик составляют *характеристики средств измерений, отражающие их способность*

влиять на инструментальную составляющую погрешности измерений вследствие взаимодействия средств измерений с любым из подключенных к их входу или выходу компонентов (таких как объект измерений, другое средство измерений и т. п.). Такие характеристики называют импедансными характеристиками или импедансами. Они отражают обмен энергией между средством измерения и подключенными к их входу или выходу объектами. (Пример. Измерение температуры термометром или термопарой, расхода жидкостей и газов расходомерами. Импедансом может быть внутреннее трение в упругих элементах при их деформации, трение в опорах.)

Характеристики **шестой группы**, включающие неинформативные параметры выходного сигнала, не являются, строго говоря, метрологическими характеристиками, так как они не несут информации о значении измеряемой физической величины. Однако они влияют на нормальную работу средств измерений и должны быть ограничены. Так нормальная работа частотомера обусловлена постоянством амплитуды и формы сигнала измерительной информации, характеристики стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов зависят от количества примесей, структуры материала и др.

Метрологические характеристики могут быть заданы числом, функцией, в табличной и графической форме. При этом в большинстве случаев указывают номинальное значение параметра (функции) и (или) его граничные значения, пределы допускаемых изменений.

Для выбора и оценки качества средств измерений кроме вышеназванных имеют значение следующие характеристики: диапазон показаний, диапазон измерений, измерительное усилие, чувствительность, стабильность, быстродействие, допустимые условия применения, помехозащищенность, надежность, потребляемая мощность, ремонтпригодность и др.

Часть из них представляет интерес для пользователя, другие принципиально важны только для разработчиков средств измерений.

Примеры характеристик, важных и для пользователя, и для разработчиков:

цена деления шкалы (цена деления) – разность значений величин, соответствующих двум соседним отметкам шкалы средства измерений;

диапазон показаний средства измерений – область значений шкалы прибора, ограниченная начальным и конечным значениями шкалы. Для приборов с дискретным (цифровым, числовым) устройством отображения измерительной информации диапазон показаний определяется **видом выходного кода** и **числом разрядов кода**;

диапазон измерений средства измерений – область значений величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности средства измерений.

вариация показаний измерительного прибора – разность показаний прибора в одной и той же точке диапазона измерений при

плавном подходе к этой точке со стороны меньших и больших значений измеряемой величины.

чувствительность средства измерений – свойство средства измерений, определяемое отношением изменения выходного сигнала этого средства к вызывающему его изменению измеряемой величины.

порог чувствительности средства измерений – характеристика средства измерений в виде наименьшего значения изменения физической величины, начиная с которого может осуществляться ее измерение данным средством;

стабильность средства измерений – качественная характеристика средства измерений, отражающая неизменность во времени его метрологических характеристик.

Измерительные приборы бывают контактные, у которых чувствительный элемент – измерительный наконечник – соприкасается с измеряемым объектом; и бесконтактные (механический контакт отсутствует). В первом случае важной характеристикой является **измерительное усилие**, т. е. сила воздействия измерительного наконечника на измеряемый объект.

6 ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

6.1 Виды погрешностей СИ

Качество средств и результатов измерений характеризуют, указывая их погрешности.

Погрешность результата измерения Δ – это разность между результатом измерения X и истинным (действительным) значением Q измеряемой величины

$$\Delta = X - Q.$$

Погрешность средства измерений – разность между показанием средства измерений и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

В целом классификация погрешностей представлена на рисунке 6.1.

По характеру проявления различают систематические, случайные погрешности и грубые промахи.

Систематическая погрешность средства измерений – это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.



Рисунок 6.1 – Классификация погрешностей измерений

Эти погрешности могут быть постоянными, прогрессирующими или функционально изменяющимися. Возникают из-за особенностей конструкции СИ, метода измерения, работы оператора. Основной отличительный признак систематических погрешностей состоит в том, что они могут быть предсказаны и благодаря этому почти полностью устранены введением соответствующих поправок.

Классификация систематических погрешностей будет рассмотрена в лекции 7.

Случайная погрешность средства измерений – составляющая погрешности средства измерений, изменяющаяся случайным образом.

Они определяются совокупностью причин, трудно поддающихся анализу. Присутствие случайных погрешностей (в отличие от систематических) легко обнаруживается при повторных измерениях в виде некоторого разброса получаемых результатов. Описание случайных погрешностей может быть осуществлено только на основе теории вероятностей и математической статистики.

Грубая погрешность (промах) проявляется в том, что результат отдельного измерения резко отличается от остальных результатов этого ряда. При однократном измерении промах может быть обнаружен только путем логического анализа или сопоставления результата с априорным представлением о нем. Если причина промаха установлена, то результат однократного измерения следует признать ошибочным и повторить измерение. При многократном измерении одной и той же величины постоянного размера промахи исключают из результатов при помощи специальных статистических критериев.

Промахи возникают из-за ошибок или неправильных действий оператора, вследствие резких кратковременных изменений условий проведения измерений (сбой в работе аппаратуры, скачки напряжения в сети, вибрация и т. п.), других аналогичных причин.

По формам представления различают **абсолютную** и **относительную погрешности средств измерений**.

Абсолютная погрешность — это погрешность, выраженная в единицах измеряемой величины и определяемая как разность между результатом измерения X и истинным (действительным) значением Q измеряемой величины.

Абсолютная погрешность не может служить показателем точности измерений, поэтому для характеристики точности результатов измерения вводится понятие **относительной погрешности**, выражаемой в относительных единицах или в процентах.

Относительная погрешность — это погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности к действительному значению.

$$\delta = \frac{\Delta}{x} 100, \%$$

Но эта очень наглядная характеристика точности результата измерения не годится для нормирования погрешности СИ, так как при различных значениях x принимает различные значения. Поэтому для указания и нормирования погрешности СИ используется еще одна разновидность относительной погрешности, а именно так называемая **приведенная погрешность**.

Приведенная погрешность средства измерений — относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем

диапазоне измерений или в части диапазона. Условно принятое значение величины X_N называют *нормирующим значением*. Часто за нормирующее значение принимают верхний предел измерений.

Выражается в относительных единицах или в процентах, т. е.

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} 100, \% .$$

Ее основное отличие от относительной погрешности состоит в том, что Δ относится не к переменной текущей величине x , а к постоянной величине протяженности диапазона X_N .

Приведенная погрешность удобна тем, что для многих многопредельных СИ она имеет одно и то же значение, как для всех точек каждого поддиапазона, так и для всех его поддиапазонов, т. е. ее очень удобно использовать для нормирования свойств СИ.

Зависимость абсолютной погрешности от значения измеряемой величины используют для описания формы границ полосы погрешностей СИ. При этом различают *аддитивные и мультипликативные погрешности*. При поверке или градуировке получают ряд значений входной величины x_i и ряд соответствующих им значений выходной величины y_i . Если эти данные нанести на график с координатами x и y , то полученные точки разместятся в границах некоторой полосы (рис. 6.2).

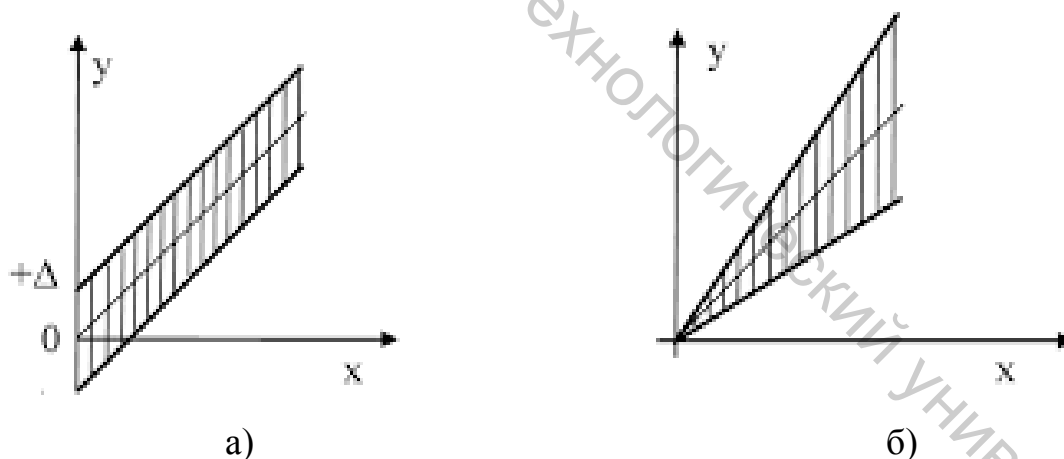


Рисунок 6.2 – Аддитивная (а) и мультипликативная (б) погрешность

В том случае, когда эти точки лежат в границах линий, параллельных друг другу (рис. 6.2 а), т. е. абсолютная погрешность СИ во всем его диапазоне измерений ограничена постоянным (не зависящим от текущего значения x) пределом $\pm\Delta_0$, такая погрешность называется *аддитивной*, т. е. получаемой путем сложения, или *погрешностью нуля*. Это понятие одинаково применимо как к случайным, так и к систематическим погрешностям.

Если же положение границ полосы погрешностей имеет вид, показанный на рисунке 6.2 б, т.е. ширина полосы возрастает пропорционально росту входной величины x , а при $x = 0$ также равна нулю, то такая погрешность называется *мультипликативной*, т.е. получаемой путем умножения, или *погрешностью чувствительности* вне зависимости от того, является ли погрешность случайной или систематической.

В зависимости от влияния внешних условий использования средств измерений принято различать *основную* и *дополнительную* погрешности СИ.

Любой датчик, измерительный прибор или регистратор работают в сложных, изменяющихся во времени условиях. На измерительные приборы воздействуют множество факторов, как со стороны объекта, так и внешней среды, источников питания и т. д. В этих условиях прибор наряду с чувствительностью к измеряемой величине неминуемо имеет некоторую чувствительность и к влияющим величинам. Прежде всего, это температура, вибрация, колебания напряжения источников питания прибора и объекта, коэффициент содержания гармоник питающих напряжений и т. п.

При поверке, калибровке, градуировке прибора в лабораторных условиях все значения влияющих величин могут поддерживаться в узких пределах их измерения (например, температура $(20 \pm 5)^\circ\text{C}$, напряжение питания $\pm 5\%$ номинального, коэффициент гармоник – не более 1% и т. д.). Такие оговоренные в технической документации условия испытаний или поверки называют *нормальными*, а погрешность прибора, возникающую в этих условиях, – *основной погрешностью*.

Изменения показаний вследствие отклонения условий эксплуатации от нормальных называются *дополнительными погрешностями* и нормируются указанием *коэффициентов влияния* изменения отдельных влияющих величин на изменение показаний (например, для температурной величины Ψ_θ может быть указано: $0,1\%/10\text{ K}$).

6.2 Классы точности средств измерений

Погрешности являются характеристикой точности средства измерений.

Точность средства измерений – характеристика качества средства измерений, отражающая близость его погрешности к нулю.

Класс точности средства измерений – обобщенная характеристика данного типа средств измерений, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая точностными характеристиками средств измерений.

Класс точности средств измерений конкретного типа указывают в

нормативных документах, используя шкалу порядка, либо шкалу отношений. В последнем случае число, обозначающее класс точности, позволяет определить предел допускаемой погрешности СИ.

Предел допускаемой погрешности средства измерений (предел допускаемой погрешности; предел погрешности) – наибольшее значение погрешности средств измерений, устанавливаемое нормативным документом для данного типа средств измерений, при котором оно еще признается метрологически исправным. Обычно устанавливают два предела допускаемой погрешности, т. е. границы зоны, за которую не должна выходить погрешность средства измерений. При превышении установленного предела погрешности средство измерений признается не годным для применения в данном классе точности.

Общие требования к классам точности установлены ГОСТом 8.401. Конкретные требования к метрологическим характеристикам, в совокупности отражающие уровень точности средств измерений для каждого класса точности, регламентируются в стандартах на средства измерений отдельного вида.

Классы точности средства измерений присваивают по результатам испытаний с целью утверждения типа. При этом оценивают соответствие средств измерений установленным требованиям по каждой нормируемой метрологической характеристике.

Метрологические характеристики испытываемых средств измерений могут быть выражены в формах абсолютной погрешности, приведенной погрешности или относительной погрешности.

Предел допускаемой **абсолютной основной погрешности** устанавливают по формуле

$$\Delta = \pm a, \quad (6.1)$$

или

$$\Delta = \pm(a + b \cdot X), \quad (6.2)$$

где Δ – пределы допускаемой абсолютной основной погрешности, выраженной в единицах измеряемой величины на входе (выходе) или условно в делениях шкалы; X – значение измеряемой величины на входе (выходе) средств измерений или число делений, отсчитанных по шкале; a, b – положительные числа, не зависящие от X .

Пределы допускаемой **приведенной основной погрешности** устанавливают по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100 \% = \pm p, \quad (6.3)$$

где γ – пределы допускаемой приведенной основной погрешности, %;

Δ – пределы допускаемой абсолютной основной погрешности, устанавливаемые по формуле (6.1); X_N – нормирующее значение, выраженное в тех же единицах, что и Δ ; p – отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда $1 \cdot 10^n$; $1,5 \cdot 10^n$; $2 \cdot 10^n$; $2,5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$; ($n=1, 0, -1, -2$, и т. д.).

Нормирующее значение принимается по определенным правилам в зависимости от типа шкалы отсчетного устройства измерительного прибора. Нормирующее значение X_N для средств измерений с равномерной, практически равномерной или степенной шкалой, а также для измерительных преобразователей, если нулевое значение входного (выходного) сигнала находится на краю или вне диапазона измерений, устанавливают равным большему из пределов измерений или равным большему из модулей пределов измерений, если нулевое значение находится внутри диапазона измерений.

Для электроизмерительных приборов с равномерной, практически равномерной или степенной шкалой и нулевой отметкой внутри диапазона измерений нормирующее значение может быть установлено равным сумме модулей пределов измерений.

Для средств измерений, в конструкции которых использована шкала с условным нулем, нормирующее значение устанавливают равным модулю разности пределов измерений. Например, для милливольтметра термоэлектрического термометра с пределами измерений 200 и 600 °C нормирующее значение $X_N = 400$ °C.

Для средств измерений с установленным номинальным значением нормирующее значение устанавливают равным этому номинальному значению. Например, для частотомеров с диапазоном измерений 45–55 Гц и номинальной частотой 50 Гц нормирующее значение $X_N = 50$ Гц.

Для измерительных приборов с существенно неравномерной шкалой нормирующее значение устанавливают равным всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений. В этом случае пределы абсолютной погрешности выражают, как и длину шкалы, в единицах длины.

Пределы допускаемой **относительной основной погрешности** устанавливают по формуле в виде относительной погрешности

$$\delta = \frac{\Delta}{X} \cdot 100 \% = \pm q, \quad (6.4)$$

если Δ установлено по формуле (6.1), или по формуле

$$\delta = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_k}{X} \right| - 1 \right) \right], \% \quad (6.5)$$

если Δ установлено по формуле (6.2), где δ – пределы допускаемой относительной основной погрешности, %; X_K – больший (по модулю) из пределов измерений; X – значение измеряемой величины; c , d – положительные числа, выбираемые из установленного ряда.

Пределы **допускаемых дополнительных погрешностей** устанавливают:

- в виде постоянного значения для всей рабочей области влияющей величины или в виде постоянных значений по интервалам рабочей области влияющей величины;
- путем указания отношения предела допускаемой дополнительной погрешности, соответствующей регламентированному интервалу влияющей величины, к этому интервалу;
- путем указания зависимости предела допускаемой дополнительной погрешности от влияющей величины (предельной функции влияния);
- путем указания функциональной зависимости пределов допускаемых отклонений от номинальной функции влияния.

В технической документации для **обозначения классов точности** средств измерений используют прописные буквы латинского алфавита, римские цифры и арабские числа. Классам точности, которым соответствуют меньшие пределы допускаемых погрешностей средств измерений, присваивают буквенные обозначения, находящиеся ближе к началу алфавита, или римские цифры, означающие меньшие числа.

Использование того или иного варианта условного обозначения класса точности зависит от способов задания пределов допускаемой основной погрешности, предусмотренных ГОСТом 8.401.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме абсолютных погрешностей (или относительных погрешностей, заданных в виде графика, таблицы или сложной формулы), классы точности обозначают в документации прописными буквами латинского алфавита (например, для гирь) или римскими цифрами (например, для весов, штангенциркулей). В необходимых случаях к обозначению класса точности буквами латинского алфавита добавляют индексы в виде арабской цифры.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме приведенной погрешности или относительной погрешности в соответствии с формулой (6.4), классы точности обозначают числами, которые равны этим пределам, выраженным в процентах.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме относительных погрешностей в соответствии с формулой (6.5), классы точности обозначают числами c и d , разделяя их косой чертой.

Обозначения классов точности наносят на щитки, циферблаты и корпуса средств измерений с добавлением, в некоторых случаях, специальных знаков (см. табл. 6.1).

Средству измерений с двумя и более диапазонами измерений одной и той же величины (например, омметр), может быть присвоено два и более класса точности.

Таблица 6.1 – Способы нормирования классов точности

Форма выражения погрешности	Пределы допускаемой основной погрешности	Пределы допускаемой основной погрешности	Обозначение класса точности	
			в документации	на средстве измерения
Приведенная	$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = \pm p$ если нормирующее значение выражено в единицах величины на входе (выходе) средств измерений (п.1-3)	$\gamma = \pm 0,5$	Класс точности 0,5	0,5
	$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = \pm p$ если нормирующее значение принято равным длине шкалы или ее части (п.4)	$\gamma = \pm 0,5$	Класс точности 0,5	0,5 ✓
Относительная	$\delta = \frac{\Delta}{X} = \pm q$	$\delta = \pm 0,5$	Класс точности 0,5	0,5
	$\delta = \pm \left[c + d \left(\left \frac{X_k}{X} \right - 1 \right) \right]$	$\delta = \pm \left[0,02 + \right. \\ \left. + 0,01 \left(\left \frac{X_k}{x} \right - 1 \right) \right]$	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01
	если устанавливают по более сложной формуле или в виде графика, либо таблицы		класс точности М	М
Абсолютная	$\Delta = \pm a \text{ или } \Delta = \pm (a + b \cdot X)$		класс точности С	С

6.3 Правила округления приближенных чисел

Значение погрешности при вычислениях может быть получено с большим числом знаков, однако на практике нет смысла выражать

погрешность большим числом значащих цифр и обычно руководствуются правилами округления результатов и их погрешностей, указанными в методиках выполнения измерений. Если методика выполнения измерений отсутствует, то для практических задач можно следовать следующим правилам округления.

Округлять числовое значение результата измерения следует в соответствии с числовым разрядом значащей цифры погрешности, то есть числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности. *Например, результат 8,000 с погрешностью 0,1 записывается как $8,0 \pm 0,1$.*

Округление производится лишь в окончательном результате, а все предварительные вычисления проводят с одним-двумя лишними знаками.

При округлении, если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5 или больше 5, руководствуются правилами математики. Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифры неизвестны или являются нулями, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

Например, число 8,5 при сохранении одной значащей цифры округляют до 8 и 7,5 – также до 8.

7 СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

7.1 Систематические погрешности и их классификация

Систематическая погрешность – это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

В метрологической практике при оценке систематических погрешностей должно учитываться влияние следующих **основных факторов**: объекта измерения, субъекта измерения, метода и средства измерений, а также условия измерения.

Классификация погрешностей, в том числе систематических, представлена на рисунке 6.1.

Систематические погрешности принято классифицировать по двум признакам: по характеру изменения во времени и по причинам возникновения погрешности.

По характеру изменения во времени они делятся на постоянные и переменные.

Постоянными называются такие погрешности измерения, которые остаются неизменными в течение всей серии измерений. Они не устраняются при многократных измерениях. Например, погрешность установки нуля стрелочного прибора, погрешность от постоянного

дополнительного веса на чашке весов и т. д.

Переменными называются погрешности, изменяющиеся в процессе измерения. Они делятся на монотонно изменяющиеся, периодические и изменяющиеся по сложному закону.

Если в процессе измерения систематическая погрешность монотонно возрастает или убывает, ее называют монотонно изменяющейся. Например, она имеет место при постепенном разряде батареи, питающей средство измерений.

Периодической называется погрешность, значение которой является периодической функцией времени. Примером может служить погрешность, обусловленная суточными колебаниями напряжения силовой питающей сети, температуры окружающей среды и др. Систематические погрешности могут изменяться и по более сложному закону, обусловленному какими-либо внешними причинами, например отдельные дополнительные погрешности, являющиеся функциями вызывающих их влияющих величин.

По причинам возникновения погрешности делятся на методические, инструментальные и личные (субъективные).

Инструментальная погрешность обусловлена погрешностью применяемого СИ.

Методическая погрешность измерения обусловлена:

- отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путем измерения;
- влиянием способов применения СИ;
- влиянием алгоритмов (формул), по которым производятся вычисления результатов измерений;
- влиянием других факторов, не связанных со свойствами используемых средств измерения.

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они не могут быть указаны в нормативно-технической документации на используемое СИ, поскольку от него не зависят, а должны определяться оператором в каждом конкретном случае. В связи с этим оператор должен четко различать фактически измеряемую им величину и величину, подлежащую измерению.

Субъективная (личная) погрешность измерения обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкалам СИ, диаграммам регистрирующих приборов. Они вызываются состоянием оператора, его положением во время работы, несовершенством органов чувств, эргономическими свойствами СИ.

7.2 Методы исключения систематических погрешностей

При проведении измерений стараются в максимальной степени исключить или учесть влияние систематических погрешностей. Оптимальным является устранение источников погрешностей до начала измерений. В большинстве областей измерений известны главные источники систематических погрешностей и разработаны методы, исключающие их возникновение или устраняющие их влияние на результат измерения.

Исключить систематические погрешности в процессе измерений можно используя специальные методы измерения или определив поправку к результату.

Для **исключения постоянных систематических погрешностей в процессе измерений** применяют следующие методы:

- *Метод замещения*, представляющий собой разновидность метода сравнения, когда сравнение осуществляется заменой измеряемой величины известной величиной, причем так, что при этом в состоянии и действии всех используемых средств измерений не происходит никаких изменений. Для его реализации необходимо иметь регулируемую меру, величина которой однородна измеряемой. Примеры: взвешивание по методу Борда; измерение сопротивления посредством моста постоянного тока и мер сопротивления.

- *Метод компенсации погрешности по знаку* (метод изменения знака систематической погрешности), предусматривающий измерение с двумя наблюдениями, выполняемыми так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разными знаками. Метод имеет большое сходство с предыдущим. Погрешность исключается при вычислении среднего значения разности двух показаний. Метод, например, может применяться в компенсаторах постоянного тока для исключения погрешности от термо- и контактных ЭДС. Здесь используется то обстоятельство, что знак термо- и контактных ЭДС не зависит от знака измеряемого и питающего напряжений.

- *Метод противопоставления*, являющийся разновидностью метода сравнения, при котором измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности (по знаку) воздействия на результаты наблюдений. Например, способ взвешивания Гаусса для исключения погрешности вследствие остаточной неравноплечести.

- *Метод рандомизации* – наиболее универсальный способ исключения неизвестных постоянных систематических погрешностей, т. е. перевод в случайные. Суть его состоит в том, что одна и та же величина измеряется различными методами (приборами). Если для данного прибора эта погрешность постоянна, то от прибора к прибору она изменяется

случайным образом. Систематические погрешности каждого из них для всей совокупности являются разными случайными величинами. Поэтому измерение одной и той же величины всеми приборами и усреднение результатов полученных наблюдений позволяют значительно уменьшить эту погрешность. Того же эффекта можно добиться, изменяя методику и условия эксперимента или те параметры, от которых не зависит значение измеряемой величины, но зависят систематические погрешности ее измерения.

Для устранения **переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей** применяют следующие приемы и методы.

- *Анализ знаков неисправленных случайных погрешностей.* Если знаки неисправленных случайных погрешностей чередуются с какой-либо закономерностью, то наблюдается переменная систематическая погрешность. Если последовательность знаков «+» у случайных погрешностей сменяется последовательностью знаков «-» или наоборот, то присутствует монотонно изменяющаяся систематическая погрешность. Если группы знаков «+» и «-» у случайных погрешностей чередуются, то присутствует периодическая систематическая погрешность.

- *Графический метод* является одним из наиболее простых способов обнаружения переменной систематической погрешности в ряду результатов наблюдений и заключается в построении графика последовательности неисправленных значений результатов наблюдений. На графике через построенные точки проводят плавную кривую, которая выражает тенденцию результата измерения, если она существует. Если тенденция не прослеживается, то переменную систематическую погрешность считают практически отсутствующей.

- *Метод симметричных наблюдений* используется для исключения прогрессирующей погрешности, которая изменяется по линейному закону, например, пропорционально времени.

7.3 Применение специальных статистических методов для исключения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей

Рассмотрим способ последовательных разностей (метод Аббе), метод дисперсионного анализа (метод Фишера) и критерий Вилкоксона для исключения систематических погрешностей.

Способ последовательных разностей (критерий Аббе). Применяется для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности и состоит в следующем. Дисперсию результатов наблюдений можно оценить двумя способами: *обычным*

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (7.1)$$

и вычислением суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_{i+1} - x_i)^2$

$$S_d^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (7.2)$$

Если в процессе измерений происходило смещение центра группирования результатов наблюдений, т. е. имела место переменная систематическая погрешность, то S_x^2 дает преувеличенную оценку дисперсии результатов наблюдений. Это объясняется тем, что на S_x^2 влияют вариации x . В то же время изменения центра группирования x весьма мало сказываются на значениях последовательных разностей $d_i = (x_{i+1} - x_i)$, поэтому смещения x почти не отразятся на значениях S_d^2 .

Отношение $\nu = \frac{S_d^2}{S_x^2}$ является критерием для обнаружения систематических смещений центра группирования результатов наблюдений. Критическая область для этого критерия (критерия Аббе) определяется как $P(\nu < \nu_q) = q$, где $q = 1 - P$ – уровень значимости, P – доверительная вероятность. Значения ν_q для различных уровней значимости q и числа наблюдений n приведены в Приложение А. Если полученное значение критерия Аббе меньше ν при заданных q и n , то гипотеза о постоянстве центра группирования результатов наблюдений отвергается, т. е. обнаруживается переменная систематическая погрешность результатов измерений.

Дисперсионный метод (метод Фишера). Этот метод более чувствителен к изменению средних, и его целесообразно использовать, когда многократные измерения проводятся в течение длительного времени, а сами измерения равноточные. Сущность метода состоит в следующем.

После проведения N измерений их разбивают на L групп по n_j результатам измерения в каждой группе ($L > 3$), но так, чтобы выполнялось равенство $N = \sum_{j=1}^L n_j$. Затем анализируют изменение дисперсий в каждой из групп измерений по сравнению со средним рассеиванием в каждой группе измерений по сравнению со средним рассеиванием измерений внутри каждой из групп.

Находят оценку внутригрупповой дисперсии (среднее рассеивание внутри групп)

$$S_{BG}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L (n_j - 1) \cdot S_j^2 = \frac{\sum_{j=1}^L k_j \cdot S_j^2}{\sum_{j=1}^L k_j}, \quad (7.3)$$

где N – число проведенных измерений; L – число групп; n – число измерений в каждой группе; $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ – среднее результатов измерений в j -й группе; x_{ij} – результат i -го измерения в j -й группе; S_j^2 – рассеяние (дисперсия) внутри каждой j -й группы; $\sum_{j=1}^L k_j = N - L$.

Если результат измерения содержит систематическую погрешность, то это прежде всего сказывается на изменении среднего арифметического $\bar{x}_j$ каких-либо групп измерений. На дисперсии результатов измерений это должно сказаться слабо, если, конечно, измерения отдельных групп не слишком продолжительны. Следовательно, результат внутригрупповой дисперсии целесообразно сравнить с межгрупповой дисперсией.

$$S_{MG}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2, \quad (7.4)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{x}_j = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ – среднее результатов измерений.

Межгрупповая дисперсия отражает влияние систематического различия между группами измерений.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей является дисперсионный критерий Фишера

$$F = \frac{S_{MG}^2}{S_{BG}^2}. \quad (7.5)$$

Значение F_q для различных уровней значимости q , числа измерений N и числа групп L можно найти в справочных таблицах при различных степенях свободы $k_1 = L - 1$, $k_2 = N - L$. Если полученное значение критерия Фишера $F > F_q$ (при заданных q , N , L), то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов измерений по группам отвергается, т. е. считается, что смещение среднего обусловлено систематической

погрешностью. При числе групп менее трех используют другие методы оценки равенства математических ожиданий в группах.

Критерий Вилкоксона. Если закон распределения результатов измерений неизвестен, то для обнаружения систематической погрешности применяют статистический критерий Вилкоксона.

Из двух групп результатов измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_m$, где $n \geq m \geq 5$, составляется вариационный ряд, в котором все $n+m$ значений $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ располагают в порядке их возрастания и приписывают им ранги – порядковые номера членов вариационного ряда.

Различие средних значений каждого из рядов можно считать допустимым, если выполняется неравенство

$$T_q^- < \sum_{i=1}^n R_i < T_q^+, \quad (7.6)$$

где R_i – ранг (номер) члена x_i , равный его номеру в вариационном ряду; T_q^- и T_q^+ – нижнее и верхнее критические значения для выбранного уровня значимости q .

При $m < 15$ эти критические значения определяются по справочным таблицам.

При $m > 15$ они рассчитываются по формулам:

$$T_q^- = \frac{n \cdot (n + m + 1)}{2} - z_p \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n + m + 1)}{12}},$$

$$T_q^+ = \frac{n \cdot (n + m + 1)}{2} + z_p \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n + m + 1)}{12}},$$

где z_p – квантиль нормированной функции Лапласа.

7.4 Определение границ неисклученной систематической погрешности

Систематические погрешности, оставшиеся после введения поправок, называются неисклученными систематическими погрешностями. Неисклученная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисклученные систематические погрешности метода, средств измерений, а также вызванные другими источниками.

Неисклученная систематическая погрешность характеризуется её границами. В качестве границ составляющих неисклученной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых

основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешности средств измерения каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные.

Границы неисключенной систематической погрешности Θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\Theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2}, \quad (7.7)$$

где Θ_i – граница i -й неисключенной систематической погрешности; k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью; m – число суммируемых погрешностей.

Если число суммированных неисключенных систематических погрешностей более четырех ($m > 4$), то коэффициент k определяют из таблицы 7.1.

Таблица 7.1 – Зависимость коэффициента k от P и m

P	Значение k при m равном				Среднее значение
	2	3	4	5	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,4

Если число суммированных неисключенных систематических погрешностей менее четырех ($m \leq 4$), то коэффициент k определяют по графику зависимости $k = k(m, l)$, где $l = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ – параметр, учитывающий различие в размерах границ суммируемых погрешностей (рис. 7.1).

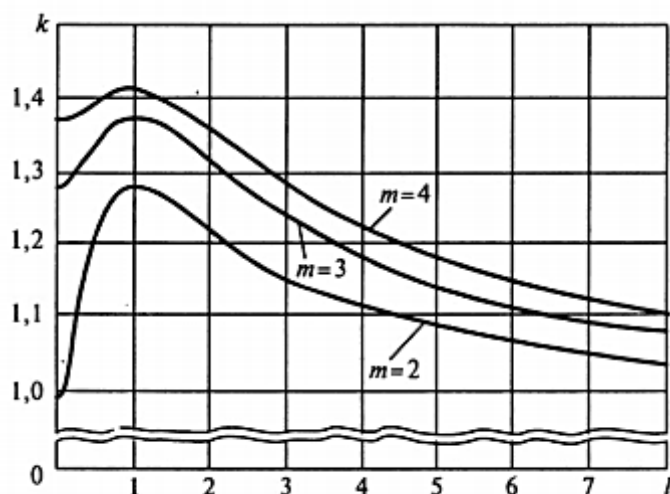


Рисунок 7.1 – График зависимости $k = f(m, l)$

При трех или четырех слагаемых в качестве Θ_1 принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве Θ_2 следует принять ближайшую к Θ_1 составляющую.

Анализ составляющих суммарной погрешности позволяет определить также те погрешности, которые могут быть удалены из общей суммы погрешностей. При этом используют **критерий ничтожных погрешностей**: *если данная погрешность меньше одной трети суммы погрешностей, то эта погрешность считается ничтожно малой и может быть исключена*. Основанием для исключения этой погрешности является тот факт, что при округлении общей суммы погрешностей ничтожно малая составляющая погрешности не повлияет на результат округления.

8 СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

8.1 Понятие о случайных величинах и законе их распределения

Результат измерения является переменной величиной, которая при в силу каких-то случайных причин может принимать некоторое множество значений. Такие переменные величины называются **случайными**. А появление при измерении того или иного возможного значения этих величин есть случайное событие, обладающее той или иной вероятностью.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной случайной величиной называется такая переменная величина, которая в силу случайных обстоятельств может принимать конечное или счетное множество значений (например, число дефектных изделий в последовательных выборках, количество отказов при наработке

1000 ч и т. п.).

Непрерывной случайной величиной называется такая переменная величина, которая в силу случайных обстоятельств может в некотором интервале принимать любые значения.

Если общий интервал изменения случайной величины X разделить на k частных интервалов $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_k$ серединами $x_1, x_2, \dots, x_k$, то вероятности $\Delta p_1, \Delta p_2 \dots \Delta p_k$ будут отражать возможности того, что возможные значения окажутся в соответствующих частных интервалах.

Чтобы точнее математически изображать непрерывную случайную величину X , тем на большее число k частных интервалов Δx разделяется общий интервал и чем меньше каждый из них. Поэтому естественно, что для получения точного закона распределения надо перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ и $\Delta x \rightarrow 0$. Но так как при этом все вероятности Δp , стоящие во второй строке, обратятся в нули, до перехода к пределу их делят на Δx .

Выражение $\Delta p / \Delta x$ называется **средней плотностью распределения вероятностей** на частном интервале Δx , а предел

$$y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad (8.1)$$

если он существует, называется **плотностью распределения вероятностей** непрерывной случайной величины X для данного значения x . Поскольку каждому значению x соответствует свое значение y , плотность распределения вероятностей y есть некоторая функция от x :

$$y = f(x). \quad (8.2)$$

Именно эта функция и является **законом распределения** непрерывной случайной величины X .

Эта функция называется **дифференциальной функцией** распределения случайной величины, так как она, согласно формуле (8.1), выражается в виде производной dp/dx .

Однако необходимо заметить, что способ определения функции распределения через производную dp/dx имеет скорее теоретический, а не практический смысл. Ведь наводить функцию $f(x)$ как производную от p по x на практике не представляется возможным, поскольку p как функции от x неизвестна. Наоборот, Δp определяют приближенно с помощью функции $f(x)$. Из формулы (8.1) следует, что $f(x) \approx \Delta p / \Delta x$, откуда $\Delta p \approx f(x) \cdot \Delta x$.

Поэтому функцию (8.2) надо считать исходным первоначальным понятием, а все остальное определять через нее.

В некоторых случаях функцию распределения (8.2) можно

установить исходя из теоретических соображений, вытекающих из особенностей самого массового явления. Но чаще всего ее находят как уравнение **кривой распределения**, т. е. кривой, около которой колеблются ступенчатые гистограммы частот признака X при повторении выборочных испытаний.

Гистограммой частот (рис. 8.1) называется ступенчатый график, состоящий из прямоугольников, у которых основаниями служат частные интервалы Δx_i на оси абсцисс, а площади равны частотам $f_i = N_i/n$ вариантов, попадающих в эти интервалы.

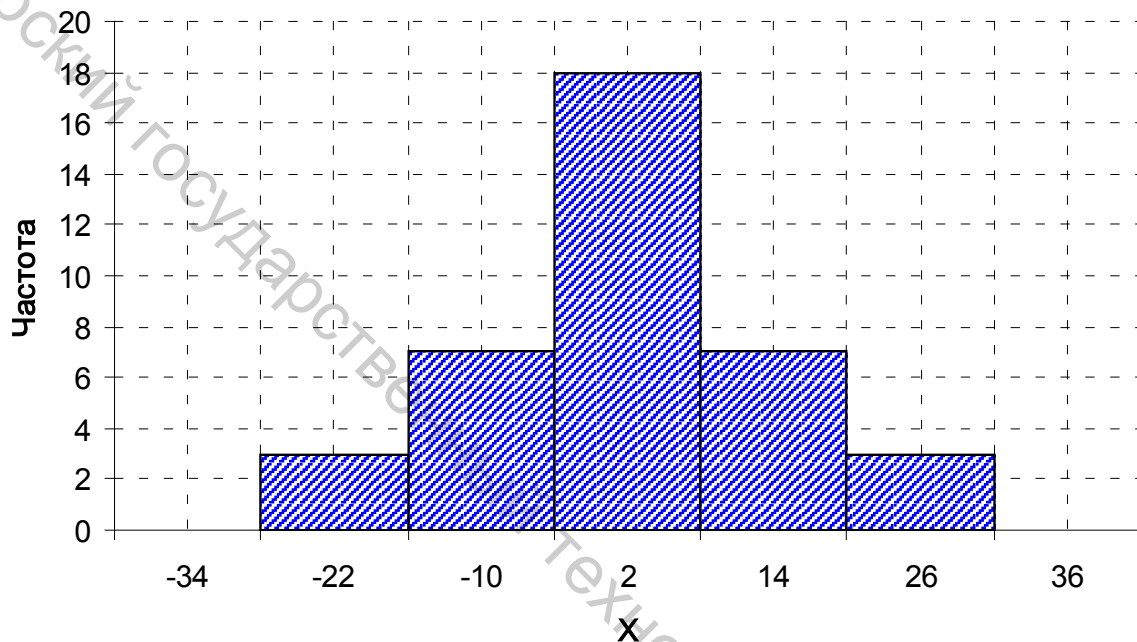


Рисунок 8.1 – Гистограмма частот

Иногда высоту прямоугольника откладывают равной эмпирической плотности вероятности p_i

$$p_i = f_i / \Delta x_i = \frac{N_i}{n \cdot \Delta x_i}$$

которая является оценкой средней плотности в интервале Δx_i . В этом случае площадь под гистограммой равна единице.

Для отыскания функции распределения (8.2) как уравнения кривой распределения необходимо:

- 1) взять одну выборку, но достаточно большого объема;
- 2) построить ступенчатую гистограмму частот при достаточно большом числе k частных интервалов Δx ;
- 3) полученную ступенчатую гистограмму сгладить с помощью плавной кривой;
- 4) приближенно подобрать для этой кривой уравнение;

5) проверить посредством критериев согласия, достаточно ли близко найденная теоретическая функция отображает эмпирические (опытные) данные.

Кривая распределения и функция распределения являются **законами распределения** непрерывной случайной величины соответственно в геометрической и аналитической форме.

Кривые и функции распределения играют в математической статистике и ее практических применениях самую фундаментальную роль.

8.2 Описание случайных погрешностей с помощью функций распределения

Присутствие случайных погрешностей в результатах измерений легко обнаруживается из-за их разброса относительно некоторого значения. Как уже отмечалось ранее, и результат измерения, и его погрешность с известными оговорками могут рассматриваться как случайные величины.

Из теории вероятности известно, что наиболее универсальным способом описания случайных величин является отыскание их интегральных или дифференциальных функций распределения.

Интегральной функцией распределения $F(x)$ называют функцию, каждое значение которой для каждого x является вероятностью события, заключающегося в том, что случайная величина x_i в i -м опыте принимает значение, меньшее x :

$$F(x) = P(x_i \leq x) = P\{-\infty < x_i \leq x\}. \quad (8.3)$$

График интегральной функции распределения показан на рисунке 8.2.

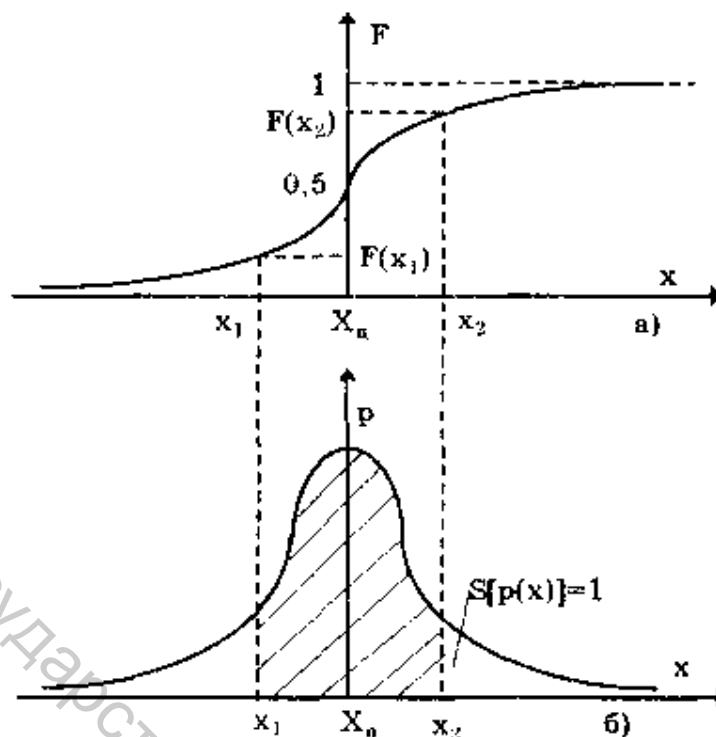


Рисунок 8.2 – Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции распределения результатов измерения

Она имеет следующие свойства:

- неотрицательная, т. е. $F(x) \geq 0$;
- неубывающая, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$;
- диапазон ее изменения от 0 до 1, т. е. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;
- вероятность нахождения случайной величины x в диапазоне от x_1 до x_2 $P\{x_1 < x < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

Более наглядным является описание свойств результатов измерений и случайных погрешностей с помощью *дифференциальной функции распределения*, иначе называемой *плотностью распределения вероятностей*

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Она всегда неотрицательна и подчиняется условию нормирования в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Учитывая взаимосвязь $F(x)$ и $p(x)$, легко показать, что вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(x_1; x_2)$

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

Следовательно, рассмотренное выше условие нормирования означает, что вероятность попадания величины x в интервал $[-\infty; +\infty]$ равна единице, т. е. представляет собой достоверное событие.

Из последнего уравнения следует, что вероятность попадания случайной величины x в заданный интервал $(x_1; x_2)$ равна площади, заключенной под кривой $p(x)$ между абсциссами x_1 и x_2 (см. рис. 8.2). Поэтому по форме кривой плотности вероятности $p(x)$ можно судить о том, какие значения случайной величины x наиболее вероятны, а какие наименее.

8.3 Числовые параметры законов распределения и их оценки

Функции распределения являются самым универсальным способом описания поведения результатов измерений и случайных погрешностей. Однако для их определения необходимо проведение весьма длительных и кропотливых исследований и вычислений. В большинстве случаев бывает достаточно охарактеризовать случайные величины с помощью ограниченного числа специальных параметров, основными из которых являются:

- центр распределения (в качестве оценки центра распределения может выбираться в зависимости от типа распределения: выборочное среднее арифметическое, медиана, центр размаха, центр сгибов);
- в начальные и центральные моменты и производные от них коэффициенты – математическое ожидание (МО), СКО, эксцесс, контрэксцесс и коэффициент асимметрии;
- энтропийный коэффициент.

Оценка параметра называется *точечной*, если она выражается одним числом. Задача нахождения точечных оценок – частный случай статистической задачи нахождения оценок параметров функции распределения случайной величины на основании выборки. В отличие от самих параметров их точечные оценки являются случайными величинами, причем их значения зависят от объема экспериментальных данных, а закон распределения – от законов распределения самих случайных величин.

Точечные оценки могут быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Состоятельной называется оценка, которая при увеличении объема выборки стремится по вероятности к истинному значению числовой характеристики.

Несмещенной называется оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой числовой характеристике.

Наиболее *эффективной* считают ту из нескольких возможных несмещенных оценок, которая имеет наименьшую дисперсию.

Наиболее распространенным методом получения оценок является метод наибольшего правдоподобия, который приводит к асимптотически несмещенным и эффективным оценкам с приближенно нормальным распределением. Среди других методов можно назвать методы моментов и наименьших квадратов.

Все моменты представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, то моменты называют *начальными*, а если от центра распределения, то *центральными*.

Начальные и центральные моменты r -го порядка определяются соответственно по формулам:

$$\alpha_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x) dx; \quad \mu_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^r p(x) dx.$$

Начальные и центральные моменты случайной погрешности Δ совпадают между собой и с центральными моментами результатов измерений: $\alpha_r[\Delta] = \mu_r[\Delta] = \mu_r[x]$, поскольку МО случайной погрешности равно нулю. Следует также отметить, что первый центральный момент тождественно равен нулю.

С помощью начального момента нулевого порядка вводится понятие медианы распределения.

Координата центра распределения показывает положение случайной величины на числовой оси и может быть найдена несколькими способами. Наиболее фундаментальным является центр симметрии, т. е. нахождение такой точки $X_{\text{мед}}$ на оси x , слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины одинаковы и равны 0,5:

$$F(X_{\text{мед}}) = \int_{-\infty}^{X_{\text{мед}}} p(x) dx = \int_{X_{\text{мед}}}^{+\infty} p(x) dx = 0,5.$$

Точку $X_{\text{мед}}$ называют *медианой* или 50%-м квантилем.

Для нахождения *оценки медианы* нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда

$$X_{\text{мед}} = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \text{ при четном } n,$$

Для ее нахождения у распределения случайной величины должен существовать только нулевой начальный момент.

Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения и определяется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x) dx = 1.$$

Первым начальным моментом является математическое ожидание случайной величины.

Можно определить центр распределения как центр тяжести опрокидывающий момент геометрической фигуры, огибающей которой является кривая $p(x)$, равен нулю:

$$\bar{X} = m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx.$$

Эта точка называется *математическим ожиданием* (МО).

Точечной оценкой МО результата измерений является среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n – количество отсчетов в массиве экспериментальных данных.

Среднее арифметическое является абсциссой центра тяжести

Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения и определяется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+X} x^0 p(x) dx = 1.$$

Можно определить центр распределения как центр тяжести опрокидывающий момент геометрической фигуры, огибающей которой является кривая $p(x)$, равен нулю:

$$\overline{X} = m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

Точечной оценкой МО результата измерений является среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

Среднее арифметическое является абсциссой центра тяжести площади гистограммы. Если мыслить гистограмму, как однородную материальную пластинку, то частота в столбце пропорциональна весу площади столбца гистограммы.

В ы б о р о ч н о е		с р е д н е е
а р и ф м е т и ч е с к о е	X	я в л я е т с я

несмещенной оценкой любого закона распределения, кроме этого – состоятельной, эффективной и достаточной (характеристика полноты использования всей содержащейся в выборке информации). Однако оценка в виде среднего арифметического слабо защищена от влияния промахов.

Следует отметить, что у некоторых распределений, например распределения Коши, не существует МО, так как определяющий его интеграл расходится.

При симметричной кривой $p(x)$ в качестве центра может использоваться абсцисса **моды**, т. е. максимума распределения X_m (т. е. это середина наиболее высокого столбца гистограммы, значение признака с наибольшей плотностью).

Мода и среднее значение отличны друг от друга, и совпадают только при симметричном распределении.

Однако существуют распределения, у которых нет моды, например, равномерное. Распределения с одним максимумом называются *одномодальными*, с двумя – *двухмодальными* и т. д. Те из них, у которых в средней части расположен не максимум, а минимум, называются *антимодальными*.

Для двухмодальных распределений применяется оценка центра в виде *центра сгибов*:

$$X_c = (x_{c1} + x_{c2})/2 ,$$

где x_{c1} , x_{c2} – сгибы, т. е. абсциссы точек, в которых распределение достигает своих максимумов.

Для ограниченных распределений (равномерного, трапецеидального, арксинусоидального и др.) применяется оценка в виде *центра размаха*:

$$X_p = (x_1 + x_n)/2 ,$$

где x_1 , x_n – первый и последний члены вариационного ряда, соответствующего распределению.

Важное значение имеет второй центральный момент

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx ,$$

называемый *дисперсией* и являющийся характеристикой рассеивания случайной величины относительно МО. Значительно чаще в качестве меры рассеивания используется *среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma = \sqrt{D(x)},$$

имеющее такую же размерность, как и МО.

Для примера на рисунке 8.3 показан вид нормального распределения при различных значениях СКО.

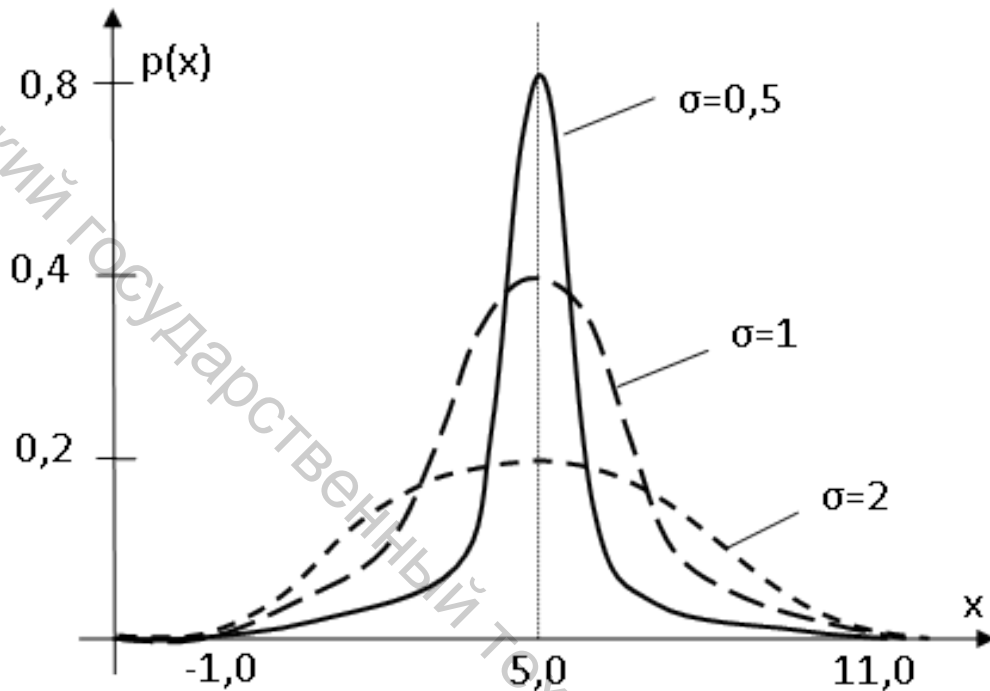


Рисунок 8.3 – Вид нормального распределения при $X_{ц} = 5$ и СКО $\sigma = 0,5; 1; 2$

Несмещенную *оценку дисперсии* S_x^2 и среднее квадратическое отклонение (СКО) S_x :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

СКО имеет размерность случайной величины и является действующим значением рассеяния этой величины.

СКО случайной величины x определяется как корень квадратный из дисперсии. Соответственно его оценка может быть найдена путем извлечения корня из оценки дисперсии. Однако эта операция является нелинейной процедурой, приводящей к смещенности получаемой таким образом оценки.

Полученные оценки МО и СКО являются случайными величинами. Это проявляется в том, что при повторениях серий из n наблюдений каждый раз будут получаться различные оценки $\bar{x}$ и $\bar{\sigma}$. Рассеяние этих оценок целесообразно оценивать с помощью СКО $S_{\bar{x}}$ и $S_{\bar{\sigma}}$. Оценка СКО среднего арифметического значения:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Оценка СКО среднего квадратического отклонения

$$S_{\bar{\sigma}} = \frac{S_x \sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{n}}.$$

Она зависит только от эксцесса и числа наблюдений в выборке и не зависит от СКО, т. е. той точности, с которой производятся измерения. Ввиду того, что большое число измерений проводится относительно редко, погрешность определения $S_{\bar{\sigma}}$ может быть весьма существенной.

Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют важные черты распределения: положение центра и степень разбросанности результатов относительно него.

Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.

Третий центральный момент

$$\mu_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3 p(x) dx$$

служит характеристикой асимметрии, или скошенности распределения.

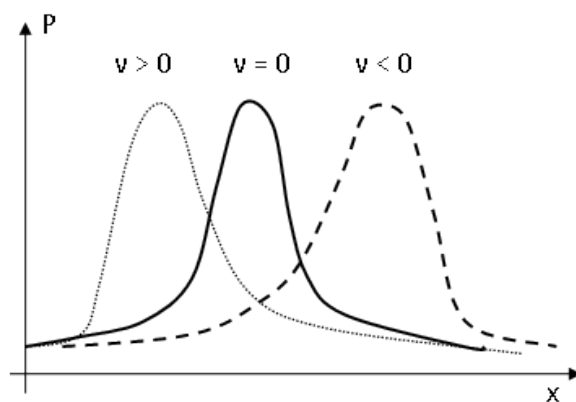
Чтобы оценить асимметрию ЗРВ, определяется *оценка третьего центрального момента* $\bar{\mu}_3$, характеризующая несимметричность распределения (т. е. скошенность распределения: когда один спад крутой, а другой – пологий):

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3.$$

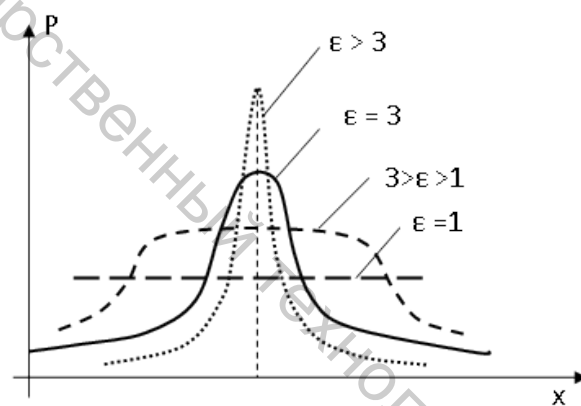
Третий центральный момент и его оценка имеют размерность куба случайной величины, поэтому для относительной характеристики асимметрии применяют *коэффициент асимметрии*

$$v = \mu_3(X) / \sigma^3.$$

Для нормального распределения коэффициент асимметрии равен нулю. Вид законов распределения при различных значениях коэффициента асимметрии приведен на рисунке 8.4 а.



а



б

Рисунок 8.4 – Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях коэффициента асимметрии (а) и эксцесса (б)

Четвертый центральный момент

$$\mu_4(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^4 p(x) dx$$

служит для характеристики плоско- или островершинности распределения.

Четвертый центральный момент имеет размерность четвертой степени случайной величины, поэтому для удобства чаще применяют относительную величину, которая называется *эксцессом*

$$\varepsilon = \frac{\mu_4(x)}{\sigma^4}.$$

Его значения лежат в диапазоне от 1 до ∞ (для распределения Коши). Для нормального распределения он равен 3. Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях эксцесса показан на рисунке 8.4 б.

Так как отвлеченная величина $\frac{\mu_4(x)}{\sigma^4}$, вычисленная для нормального распределения равна 3, то за меру отклонения плосковершинности кривой распределения от плосковершинности нормальной кривой принимают разность $\frac{\mu_4(x)}{\sigma^4} - 3$. Поэтому часто эксцесс задается формулой

$$\varepsilon' = \frac{\mu_4(x)}{\sigma^4} - 3.$$

Значения коэффициента ε' лежат в диапазоне от -2 до ∞ . Для нормального распределения он равен 0. Распределение считается близким к нормальному, если $\varepsilon < 0,1$, и значительно отклоняющимся от нормального, если $\varepsilon > 0,5$.

Чтобы оценить протяженность ЗРВ, определяется оценка четвертого центрального момента $\bar{\mu}_4$:

$$\bar{\mu}_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4.$$

Для удобства часто используют контрэксцесс

$$k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Значения контрэксцесса лежат в пределах от 0 до 1. Для нормального закона он равен 0,577.

Определение рассеяния оценок коэффициента асимметрии и эксцесса описывается различными формулами в зависимости от вида распределения.

8.4 Основные законы распределения

Использование на практике вероятностного подхода к оценке погрешностей результатов измерений, прежде всего, предполагает знание аналитической модели закона распределения рассматриваемой погрешности.

Из множества законов распределения случайных величин, используемых в метрологии, рассмотрим только отдельные, достаточно

часто встречающиеся при решении метрологических задач: трапецидальные и экспоненциальные распределения.

К трапецидальным распределениям относятся: равномерное, собственно трапецидальное и треугольное (Симпсона).

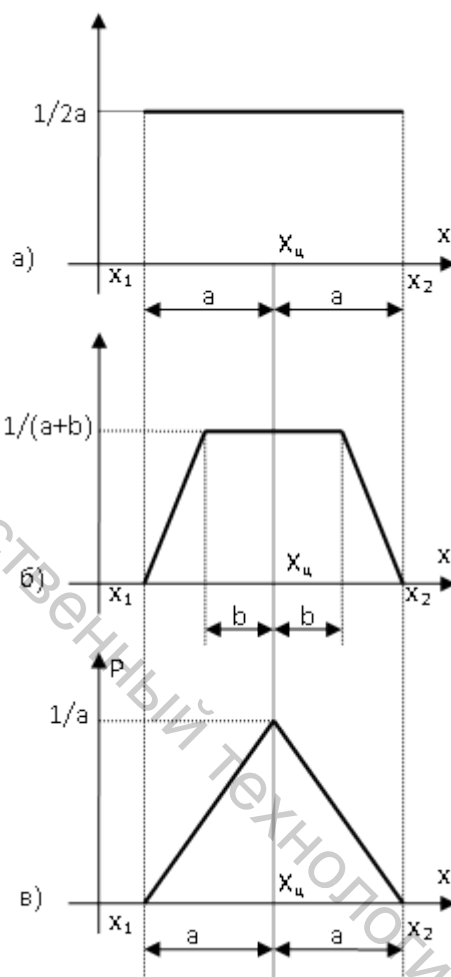


Рисунок 8.5 – Распределения: а – равномерное; б – трапецидальное; в – треугольное (Симпсона)

Равномерное распределение (рис. 8.5 а) описывается уравнением

$$p(x) = \frac{1}{2a}, \quad X_u - a \leq x \leq X_u + a.$$

Трапецидальное распределение (рис. 8.5 б) образуется как композиция двух равномерных распределений шириной a_1 и a_2 , (рис. 8.6):

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq X_{\text{ц}} - a, x \geq X_{\text{ц}} + a \\ \frac{x - X_{\text{ц}} + a}{a^2 - b^2}, & X_{\text{ц}} - a \leq x \leq X_{\text{ц}} - b \\ \frac{1}{a + b}, & X_{\text{ц}} - b \leq x \leq X_{\text{ц}} + b \\ \frac{X_{\text{ц}} + a - x}{a^2 - b^2}, & X_{\text{ц}} + b \leq x \leq X_{\text{ц}} + a \end{cases}$$

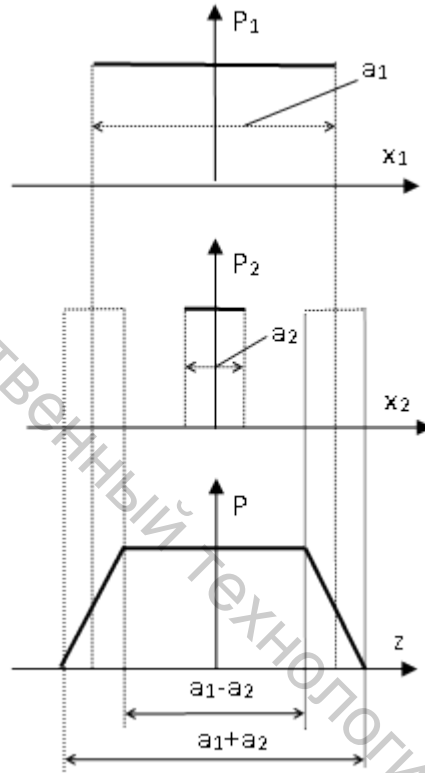


Рисунок 8.6 – Получение трапецеидального распределения

Треугольное (Симпсона) распределение (рис. 8.5 в) – это частный случай трапецеидального, для которого размеры исходных равномерных распределений одинаковы: $a_1 = a_2$ (см. рис. 8.6):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x - X_{\text{ц}} + a}{a^2}, & X_{\text{ц}} - a \leq x \leq X_{\text{ц}} \\ \frac{X_{\text{ц}} + a - x}{a^2}, & X_{\text{ц}} \leq x \leq X_{\text{ц}} + a \end{cases}$$

где $X_{\text{ц}}$, a , b – параметры распределения.

Математическое ожидание всех трапецеидальных распределений

$$X_{ц} = (x_1 + x_2) / 2.$$

Медианы из соображений симметрии равны МО.

Равномерное и собственно трапецидальное распределения моды не имеют, а мода треугольного равна $1/a$.

Среднее квадратическое отклонение в зависимости от распределения определяется по формулам:

равномерное	$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}};$
трапецидальное	$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2};$
треугольное	$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}.$

Из приведенных уравнений следует, что СКО трапецидальных распределений возрастает в 1,41 раза с ростом параметра b от нуля (треугольное) до a (равномерное). Коэффициент асимметрии всех трапецидальных распределений равен нулю.

Числовые параметры трапецидальных распределений при различных отношениях ширины исходных равномерных распределений приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Значения параметров трапецидальных распределений

b/a	a_2/a_1 (см. рис. 8.5)	a/σ	ε	k	k
1	0	1,732	1,8	0,745	1,73
2/3	1/5	2,037	1,9	0,728	1,83
1/2	1/3	2,191	2,016	0,704	1,94
1/3	1/2	2,324	2,184	0,677	2,00
0	1	2,449	2,4	0,645	2,02

Равномерное распределение имеют погрешности: квантования в цифровых приборах, округления при расчетах, отсчета показаний стрелочного прибора, от трения в стрелочных приборах с креплением подвижной части на керлах или подпятниках, определения момента времени для каждого из концов временного интервала при измерении частоты и периода методом дискретного счета. Суммируясь между собой, эти погрешности образуют трапецидальные распределения с различными отношениями сторон.

Экспоненциальные распределения описываются формулой

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)} \exp\left(-\left|\frac{x - X_{\text{ц}}}{\lambda\sigma}\right|^\alpha\right), \quad (8.4)$$

где $\lambda = \sqrt{\Gamma(1/\alpha)/\Gamma(3/\alpha)}$; σ – СКО; α – некоторая характерная для данного распределения константа; $X_{\text{ц}}$ – координата центра; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

В нормированном виде, т. е. при $X_{\text{ц}} = 0$ и $\sigma\lambda = 1$,

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)} \exp(-|x|^\alpha) = A(\alpha) \exp(-|x|^\alpha),$$

где $A(\alpha)$ – нормирующий множитель распределения.

Интегральная функция нормированного экспоненциального распределения описывается выражением

$$F(x, \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)} \int_{-\infty}^x \exp(-|x|^\alpha) dx.$$

Интеграл, входящий в эту формулу, выражается через элементарные функции только при $\alpha = 1/n$, $n = 1; 2; 3; \dots$

Анализ приведенных выражений показывает, что константа α однозначно определяет вид и все параметры распределений. При $\alpha < 1$ распределение имеет очень пологие спады и по форме близко к распределению Коши. При $\alpha = 1$ получается распределение Лапласа $p(x) = 0,5e^{-|x|}$, при $\alpha = 2$ – нормальное распределение или распределение Гаусса. При $\alpha > 2$ распределения, описываемые формулой (8.4), близки по свойствам к трапецеидальным. При очень больших значениях α формула (8.4) описывает практически равномерное распределение. В таблице 8.2 приведены параметры некоторых из экспоненциальных распределений.

Таблица 8.2 – Значения параметров экспоненциальных распределений при различных показателях α

Распределение	α	ε	κ	k
Лапласа	1	6	0,408	1,92
Нормальное (Гаусса)	2	3	0,577	2,07
Равномерное	∞	1,8	0,745	1,73

Наибольшее распространение получил нормальный закон распределения, называемый часто *распределением Гаусса*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - X_{\text{ц}})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8.5)$$

где σ – параметр рассеивания распределения, равный СКО; $X_{\text{ц}}$ – центр

распределения, равный МО.

Вид нормального распределения показан на рисунке 8.3.

Широкое использование нормального распределения на практике объясняется центральной предельной теоремой теории вероятностей, утверждающей, что распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному всякий раз, когда результаты наблюдений формируются под действием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

При введении новой переменной $t = (x - X_{ц}) / \sigma$ из (8.5) получается нормированное нормальное распределение, интегральная и дифференциальная функции которого соответственно равны:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-0,5t^2} dt; \quad p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5t^2}.$$

Таким образом плотность общего нормального распределения $p(x)$ и плотность нормированного распределения $p(t)$ связаны между собой следующей зависимостью

$$p(x) = p(t) / \sigma.$$

Нормирование приводит к переносу начала координат в центр распределения и выражению абсциссы в долях СКО. Значения интегральной и дифференциальной функций нормированного нормального распределения сведены в таблицы, которые можно найти в литературе по теории вероятностей.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-0,5t^2} dt, \quad (8.6)$$

называют *функцией Лапласа*.

Для нее справедливы следующие равенства:

$$\Phi(-\infty) = -0,5; \Phi(0) = 0; \Phi(+\infty) = 0,5; \Phi(-t) = -\Phi(t).$$

Функция Лапласа используется для определения значений интегральных функций нормальных распределений. Функция $F(t)$ связана с функцией Лапласа формулой $F(t) = 0,5 + \Phi(t)$. Поскольку интеграл в (8.6) не выражается через элементарные функции, то значения функции Лапласа для различных значений t сведены в таблицу, которую также можно найти в справочной литературе.

При статистической обработке результатов многократных измерений нашли широкое применение **семейство распределений Стьюдента**. Эти законы описывают плотность распределения вероятности среднего арифметического, вычисленного по выборке из n случайных отсчетов нормально распределенной генеральной совокупности. Их вид зависит от числа отсчетов n , по которым находится среднее арифметическое значение, поэтому и говорят о семействе законов. При увеличении числа результатов измерений распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Распределения Стьюдента имеют ряд особенностей:

- при $n < 3$ их СКО становится равным бесконечности, т. е. дисперсионная оценка ширины разброса не работает (перестает существовать);
- классический аппарат моментов для оценки формы и ширины распределения Стьюдента с малым числом степеней свободы оказывается не работоспособным, и их ширина и форма могут быть оценены лишь с использованием доверительных и энтропийных оценок. Этим распределение Стьюдента резко отличается от других распределений.

8.5 Доверительная вероятность и доверительный интервал

Точечные оценки параметров распределения дают оценку в виде числа, наиболее близкого к значению неизвестного параметра. Такие оценки используют только при большом числе измерений. Чем меньше объем выборки, тем легче допустить ошибку при выборе параметра.

Для практики важно не только получить точечную оценку, но и определить интервал, называемый *доверительным*, между границами которого с заданной *доверительной вероятностью*

$$P \{x_n < x < x_n\} = 1 - q$$

находится истинное значение оцениваемого параметра (q – уровень значимости; x_n , x_n – нижняя и верхняя границы интервала).

Доверительные границы результатов измерений определяются как наибольшее и наименьшее значения результатов измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение результата измерений.

Вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ в доверительном интервале от $x_1 = \bar{x} - t_p S_x$ до $x_2 = \bar{x} + t_p S_x$ (при $|t_1| = |t_2| = t_p$) при достаточно большом количестве измерений n (СКО заранее известно) определяется

$$P\{\bar{x} - t_p S_x / \sqrt{n} < Q < \bar{x} + t_p S_x / \sqrt{n}\} = 2F(t_p) - 1, \quad (8.7)$$

где $t_p = \frac{|\bar{x} - Q|}{S_x}$ – аргумент интегральной функции нормированного нормального распределения.

Аналогично записывается вероятность P нахождения погрешности измерения среднего $\Delta = |\bar{x} - Q|$ в заданном интервале

$$P = \{|\Delta| < t_p S_x / \sqrt{n}\} = 2F(t_p) - 1.$$

Также эту вероятность можно определить и через функцию Лапласа

$$P\{\bar{x} - z_p S_x / \sqrt{n} < Q < \bar{x} + z_p S_x / \sqrt{n}\} = 2\Phi(z_p),$$

где n – число измеренных значений; z_p – аргумент функции Лапласа $\Phi(t)$, отвечающей вероятности $P/2$.

В данном случае z_p называется квантильным множителем.

Половина длины доверительного интервала

$$\varepsilon = z_p S_x / \sqrt{n}, \quad (8.8)$$

называется доверительной границей случайной погрешности результата измерений.

При отличии закона распределения случайной величины от нормального необходимо построить его математическую модель и определять доверительный интервал с ее использованием.

Рассмотренный способ нахождения доверительных интервалов справедлив для достаточно большого числа наблюдений n , когда $\sigma = S_x$. Следует помнить, что вычисляемая оценка СКО S_x является лишь некоторым приближением к истинному значению σ . Определение доверительного интервала при заданной вероятности оказывается тем менее надежным, чем меньше число наблюдений. Нельзя пользоваться формулами нормального распределения при малом числе наблюдений, если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточно большим числом наблюдений определить СКО.

Расчет доверительных интервалов для случая, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, т. е. при малом числе наблюдений n , возможно выполнить с использованием распределения Стьюдента $S(t, k)$. Оно описывает плотность распределения

отношения (дроби Стьюдента)

$$t = \frac{\bar{x} - M[x]}{S_x} = \frac{\bar{x} - Q}{S_x} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - Q}{S_x}, \quad (8.9)$$

где Q – истинное значение измеряемой величины.

Вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ в доверительном интервале (при неизвестном СКО) будет определяться распределением Стьюдента

$$P\left\{\bar{x} - z_p S_x / \sqrt{n} < Q < \bar{x} + z_p S_x / \sqrt{n}\right\} = 2 \int_0^{t_p} S(t, k) dt,$$

где $S(t, k)$ – дифференциальная функция распределения Стьюдента, зависящая от параметра $t_p = \frac{\bar{x} - Q}{S_x}$ и числа степеней свободы k , равное $(n - 1)$.

Следовательно, с помощью распределения Стьюдента можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает $\varepsilon = \Delta_p = t_p S_x = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}$. То есть для погрешности измерения можно написать следующее соотношение:

$$P\left\{|\bar{x} - Q| < t_p S_x\right\} = P\left\{|\Delta| < t_p S_x\right\} = 2 \int_0^{t_p} S(t, k) dt.$$

Величины t_p (называемые в данном случае *коэффициентами Стьюдента*) для различных значений доверительной вероятности и числа измерений, табулированы.

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной. Распределение Стьюдента применяют при числе измерений $n < 30$, поскольку уже при $n = 20 \dots 30$ оно переходит в нормальное.

Результат измерения записывается в виде

$$Q = \bar{x} \pm \frac{t S_x}{\sqrt{n}}, \text{ при } P = P_d,$$

где P_d – конкретное значение доверительной вероятности.

Полученный результат измерения не является одним конкретным числом, а представляет собой интервал, внутри которого с некоторой

вероятностью P_d находится истинное значение измеряемой величины. Выделение середины интервала $\bar{x}$ вовсе не предполагает, что истинное значение ближе к нему, чем к остальным точкам интервала. Оно может быть в любом месте интервала, а с вероятностью $1 - P_d$ даже вне его.

При отличии закона распределения случайной величины от нормального необходимо построить его математическую модель и определять доверительный интервал с ее использованием. Например, для некоторых видов распределений (распределение Лапласа ($E = 6, k = 0,4$), трапециoidalное с отношением верхнего и нижнего оснований 1:2 ($E = 2, k = 0,7$) и равномерное ($E = 1,8, k = 0,745$) применяют следующую формулу:

$$t_{ep} = 1,62 [3,8 (E-1,6)^{2/3}]^{\lg \lg [1/(1-P)]}. \quad (8.10)$$

E – эксцесс.

Если закон распределения величины неизвестен, но известна дисперсия или СКО, можно с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность превышения погрешности Δ заданного значения $\varepsilon > \Delta$

$$P\{|\Delta| > \varepsilon\} < (S_x / \varepsilon)^2, \quad (8.11)$$

где $|\Delta| = |x - m_x|$ – погрешность однократного измерения.

8.6 Интервальные оценки дисперсии

Так же как и математическое ожидание, оценка дисперсии определяется с какой-то доверительной вероятностью в области истинного значения дисперсии. Если известно (или предполагается довольно точно), что результаты измерения распределены по *нормальному закону*, то плотность вероятности величины

$$\chi_k^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \quad (8.12)$$

распределяется по закону Пирсона с $k = n - 1$ степенями свободы (рис. 8.7).

S_x^2, S_x^2 – оценка дисперсии соответственно ряда результатов измерений или среднего арифметического; σ^2 – дисперсия; χ_k^2 – аргумент в распределении Пирсона, положение которого на оси абсцисс при числе степеней свободы k определяет вероятность P .

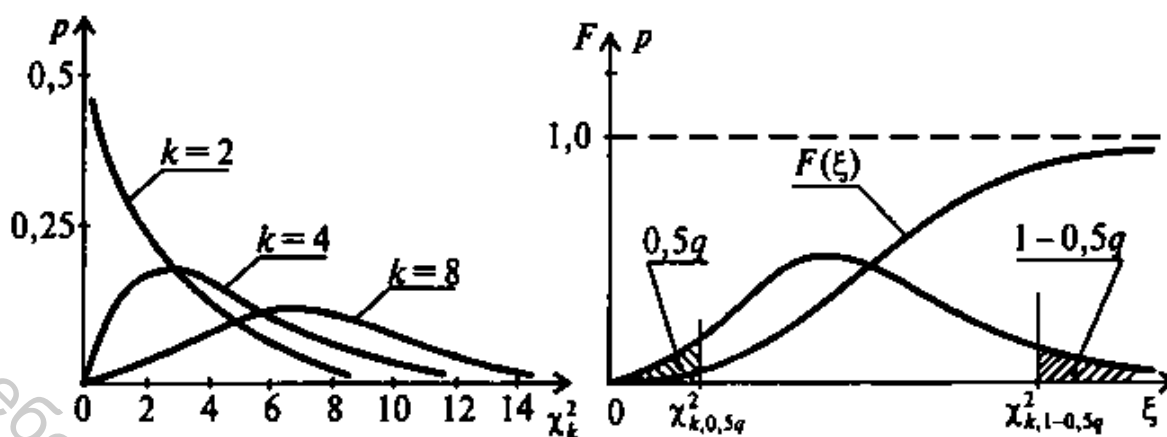


Рисунок 8.7 – Дифференциальное и интегральное распределение Пирсона

Интегральная функция распределения Пирсона определяется как вероятность того, что все значения дроби (8.12) будут меньше или равны некоторому заданному значению $\chi_{k,P}^2$

$$F(\chi_{k,P}^2) = P\left[\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} \leq \chi_{k,P}^2\right] = \int_0^{\chi_{k,P}^2} p(\chi_{k,P}^2) d\chi_{k,P}^2 = \int_0^{\chi_{k,P}^2} p(\xi) d\xi.$$

Значения этой вероятности табулированы и дифференциальная функция распределения зависит только от k. С помощью этой таблицы определяют доверительные границы попадания результатов оценки дисперсии с заданной вероятностью.

Доверительный интервал для СКО определяют как

$$P\left[\frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k; 0,5q}} > \sigma \geq \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k; 1-0,5q}}\right] = 1 - q \quad (8.13)$$

Неравенство в квадратных скобках означает, что истинное значение СКО результатов измерений с вероятностью $P = 1-q$ лежит между значениями S_1 и S_2 которые соответственно равны

$$S_1 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k; 0,5q}}; \quad S_2 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k; 1-0,5q}}. \quad (8.14)$$

При $k > 30$ для определения границ доверительных интервалов можно использовать приближенные формулы для вычисления

$$\chi_{k; 0,5q} = \sqrt{k - 0,5} - \frac{t_{0,5q}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \chi_{k; 1-0,5q} = \sqrt{k - 0,5} - \frac{t_{1-0,5q}}{\sqrt{2}},$$

где t определяется из условия $\Phi(t) = P$ по таблицам интегральной функции нормированного нормального распределения.

9 ГРУБЫЕ ПОГРЕШНОСТИ И МЕТОДЫ ИХ ИСКЛЮЧЕНИЯ

9.1 Понятие о грубых погрешностях

Грубая погрешность, или промах, – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Причиной грубых погрешностей нередко бывают резкие изменения условий измерения, кратковременные неисправности или сбои в работе средств измерений или измерительной системы, ошибки, допущенные оператором и др. К ним можно отнести:

- неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;
- неправильная запись результата наблюдений, значений отдельных мер использованного набора, например гирь;
- хаотические изменения параметров питающего СИ напряжения, например его амплитуды или частоты.

При однократных измерениях обнаружить промах не представляется возможным. Для уменьшения вероятности появления промахов измерения проводят два-три раза и за результат принимают среднее арифметическое полученных отсчетов. При многократных измерениях для обнаружения промахов используют статистические гипотезы и критерии, выбор которых зависит от *вида распределения, объема выборки и выбранной доверительной вероятности*.

Статистические гипотезы в зависимости от решаемой задачи формулируются по-разному, например:

- 1) рассматриваемый результат принадлежит массиву результатов измерений (генеральной совокупности);
- 2) массив результатов измерений распределен по нормальному закону и др.

В случае решения задачи исключения грубой погрешности *проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x , не содержит грубой погрешности, т. е. является одним из значений измеряемой величины*. Наряду с выдвинутой гипотезой, которую называют нулевой, рассматривают и противоречащую ей гипотезу.

Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удастся, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Проверку статистической гипотезы проводят для принятого уровня значимости q (принимается равным 0,1; 0,05; 0,01 и т. д.). Так принятый уровень значимости $q = 0,05$ означает, что выдвинутая нулевая статистическая гипотеза может быть принята с доверительной вероятностью $P = 0,95$.

Наибольшее сомнение могут вызвать минимальное и максимальное значение в ранжированном ряду результатов измерений, а также ряд измерений может содержать несколько грубых погрешностей и тогда их исключение производят последовательно, по одному, начиная с максимального или минимального.

9.2 Методы исключения грубых погрешностей

Критерий Шовене применяется для законов, не противоречащих нормальному, и строится на определении числа ожидаемых результатов наблюдений $n_{ож}$, которые имеют столь же большие погрешности, как и подозрительный. Гипотеза о наличии грубой погрешности принимается, если выполняется условие

$$n_{ож} \leq 0,5.$$

Порядок проверки гипотезы следующий:

1) вычисляются среднее арифметическое $\bar{x}$ и СКО S результатов наблюдений для всей выборки;

2) из таблицы интегральной функции нормированного нормального распределения $F(t)$ по величине t , характеризующей количество стандартных отклонений (СКО), на которое $x_{i\text{ под}}$ отличается от $\bar{x}$ среднего

$$t = \frac{|x_{i\text{ под}} - \bar{x}_{ц.р.}|}{S_x}$$

определяется вероятность появления подозрительного результата в генеральной совокупности чисел n :

$$P(t \cdot S < |x_{i\text{ под}} - \bar{x}_{ц.р.}|) = (1 - F(t)) \cdot 2 = 2 \cdot \Phi(t) - 1 ,$$

где $\Phi(t)$ – функция Лапласа;

3) число ожидаемых результатов $n_{ож}$ определяется по формуле

$$n_{ож} = n \cdot P \quad (9.1)$$

Критерии «трех сигм» (3σ) применяется для результатов измерений $n > 20 \dots 50$, распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью $q < 0,003$, маловероятен и его можно считать промахом, если

$$|\bar{x} - x_i| > 3S_x,$$

где S_x – оценка СКО измерений.

Сначала проверке подвергают максимальное и минимальное значения ряда измерений. Величины $\bar{x}$ и S_x вычисляют без учета экстремальных значений.

Это правило обычно считается слишком жестким, поэтому рекомендуется назначать границу цензурирования в зависимости от объема выборки: при $6 < n < 100$ она равна $4S_x$; при $100 < n < 1000$ – $4,5S_x$; при $1000 < n < 10000$ – $5S_x$.

Критерий Романовского применяется, если число наблюдений меньше 20. При этом вычисляется отношение

$$\left| \frac{(\bar{x} - x_i)}{S} \right| = \beta$$

и сравнивается с критерием β_T , выбранным по таблице 9.1. Если $\beta \geq \beta_T$, то результат досчитается промахом и отбрасывается.

Таблица 9.1 – Критерий Романовского β_T

q	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15	n = 20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Критерий вариационного размаха является одним из простых методов исключения грубой погрешности измерений (промаха). Для его использования определяют размах вариационного ряда упорядоченной совокупности наблюдений:

$$(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_n) . \quad (9.2)$$

Если какой-либо член вариационного ряда, например x_k , резко отличается от всех других, то производят проверку, используя следующее неравенство:

$$\bar{X} - z \cdot R_n < x_k < \bar{X} + z \cdot R_n , \quad (9.3)$$

где $\bar{X}$ – выборочное среднее арифметическое значение, вычисленное после исключения предполагаемого промаха; z – критериальное значение.

Нулевую гипотезу (об отсутствии грубой погрешности) принимают, если указанное неравенство выполняется. Если x_k не удовлетворяет условию (9.3), то этот результат исключают из вариационного ряда.

Коэффициент z зависит от числа членов вариационного ряда n (табл. 9.2).

Таблица 9.2 – Критерий вариационного размаха

n	5	6	7	8–9	10–11	12–15	16–22	23–25	26–63	64–150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Для более точных расчетов границ грубой погрешности для классов экспоненциальных и трапецеидальных распределений, а также распределений Стюдента при $n > 8$ (в качестве конкретных моделей, соответствующих области реально встречающихся распределений погрешностей, могут быть приняты распределение Лапласа ($E = 6, k = 0,4$), нормальное ($E = 3, k = 0,577$), трапецеидальное с отношением верхнего и нижнего оснований 1:2 ($E = 2, k = 0,7$) и равномерного ($E = 1,8, k = 0,745$)) можно использовать выражение

$$t_{zp} = 1,62 [3,8 (E-1,6)^{2/3}]^{lg lg [1/(1-P)]} . \quad (9.4)$$

После расчета параметра t_{zp} для выбранной доверительной вероятности верхняя и нижняя граница предельных значений отсчетов определяются выражениями

$$x_{\min} = \bar{X} - t_{zp} S_x , \quad x_{\max} = \bar{X} + t_{zp} S_x . \quad (9.5)$$

Отсчеты, не попадающие в рассчитанный интервал, считаются промахами и должны быть исключены из массива данных.

Для равномерного распределения за границы грубой погрешности

можно принять величину $\pm 1,8S_x$.

10 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

10.1 Алгоритм обработки прямых многократных измерений

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение. Обработка должна проводиться в соответствии с ГОСТом 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Общие положения».

Исходной информацией для обработки является ряд из n ($n > 4$) результатов измерений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, из которых исключены известные систематические погрешности.

Последовательность обработки результатов прямых многократных измерений состоит из следующих этапов.

1. Проверка равноточности результатов измерений.

Прямые многократные измерения делятся на равно- и неравноточные. *Равноточными* называются измерения, которые проводятся средствами измерений одинаковой точности по одной и той же методике при неизменных внешних условиях. При равноточных измерениях СКО результатов всех рядов измерений равны между собой. Перед проведением обработки результатов измерений необходимо удостовериться в том, что данные из обрабатываемой выборки статистически подконтрольны, группируются вокруг одного и того же центра и имеют одинаковое СКО.

Проверка допустимости различия между оценками дисперсий нормально распределенных результатов измерений выполняется с помощью критерия Фишера, при наличии двух групп наблюдений, и критерия М. Бартлетта, если групп больше.

Гипотеза о равенстве дисперсий в двух группах измерений принимается, если удовлетворяется критерий Фишера.

Критерий Бартлетта специально предназначен для оценки допустимости экспериментального рассеяния СКО для более двух групп измерений.

С помощью критерия Бартлетта можно определить допустимость рассеяния оценок дисперсий для числа групп измерений $L > 3$ и числа измерений в каждой группе $n_j > 3$. Для проведения указанной проверки вначале вычисляют оценки дисперсий всех групп от S^2_x до S^2_L , а затем среднее значение оценок дисперсии

$$S^2_{cp} = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L S_j^2 (n_j - 1),$$

где $N = \sum_{j=1}^L n_j$ S_j^2 – дисперсия j-ой группы измерений.

Затем находят значение χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \frac{2,303}{C} \left[(N-L) \lg S_{cp}^2 - \sum_{j=1}^L (n_j - 1) \lg S_j^2 \right] = \frac{B}{C};$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(L-1)} \left(\sum_{j=1}^L \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{N-L} \right).$$

Далее, задавая некоторой доверительной вероятностью P , определяют верхний предел χ^2_{max} распределения χ^2 с $L - 1$ степенями свободы при q ($\chi^2 \geq \chi^2_q$) = $1-P$. Если выполняется неравенство $\chi^2 < \chi^2_{max}$, то различия между оценками дисперсий групп допустимы.

Следует подчеркнуть, что указанные критерии устанавливают равенство дисперсий в группах измерений с определенным уровнем значимости (0,01–0,1) по экспериментальным оценкам дисперсий.

После того как установлена равнорассеянность групп измерений, необходимо оценить, используя способ последовательных разностей или метод Фишера, имеется ли в экспериментальных рядах измерений смещение (изменение) среднего арифметического, и, если оно имеется, то можно ли его признать как незначимое с заданным уровнем значимости или с заданной доверительной вероятностью.

Если устанавливается, что различия в средних и дисперсиях групп измерений допустимы (незначимы), то вычисляют общее среднее арифметическое по формуле для $\bar{x}$ и среднюю дисперсию

2. Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений.

На этом этапе определяют:

- среднее арифметическое значение $\bar{x}$ измеряемой величины;
- СКО результата измерения $S_{\bar{x}}$ и СКО среднего арифметического

значения $S_{\bar{x}}$.

В соответствии с критериями, рассмотренными в предыдущей лекции, грубые погрешности и промахи исключаются, после чего проводится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его СКО. В ряде случаев для более надежной идентификации закона распределения результатов измерений могут определяться другие

точечные оценки: коэффициент асимметрии, эксцесс и контрэксцесс, энтропийный коэффициент.

3. Определение закона распределения результатов измерений (или случайных погрешностей измерений).

Первым шагом при идентификации закона распределения является построение *ранжированного ряда* (упорядоченной выборки). В ранжированном ряду результаты измерений (или их отклонения от среднего арифметического) располагают в порядке возрастания. Далее этот ряд разбивается на оптимальное число m , как правило, одинаковых *интервалов группирования* длиной h .

Оптимальным является такое число интервалов m , при котором возможное максимальное сглаживание случайных флуктуации данных сопровождается с минимальным искажением от сглаживания самой кривой искомого распределения. Для практического применения целесообразно использовать выражения: $m_{\min} = 0,55 n^{0,4}$ и $m_{\max} = 1,25 n^{0,4}$.

Значение m должно находиться в пределах от $m_{\min}$ до $m_{\max}$, быть нечетным, так как при четном m в островершинном или двухмодальном симметричном распределении в центре гистограммы оказываются два равных по высоте столбца и середина кривой распределения искусственно уплощается. В случае, если гистограмма распределения явно двухмодальная, число столбцов может быть увеличено в 1,5–2 раза, чтобы на каждый из двух максимумов приходилось примерно по m интервалов. Полученное значение длины интервала группирования h всегда округляют в большую сторону, иначе последняя точка окажется за пределами крайнего интервала.

В каждом интервале должно быть не менее 5 отсчетов (выполнение этого требования обязательно при проверке соответствия ЗРВ экспериментальным данным по критерию согласия К. Пирсона).

Для получения гистограммы, наиболее близкой к реальному закону распределения вероятности, целесообразно построить несколько гистограмм, которые отличались бы друг от друга количеством интервалов (при этом варьирование количества интервалов должно быть в пределах рекомендуемых). Из построенных таким образом гистограмм выбирается для дальнейшего анализа гистограмма, которая отвечает максимальному числу признаков, установленных в результате предварительного анализа.

Далее определяют интервалы группирования экспериментальных данных Δx по формуле

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m},$$

где m – число интервалов гистограммы.

Наименьшее граничное значение для первого интервала будет равно $x_{\min}$. Чтобы найти вторую границу интервала, прибавляют длину интервала

Δx . Затем подсчитывают число попаданий N_i (*частоты*) результатов измерений в каждый интервал группирования. Сумма этих чисел должна равняться числу измерений. По полученным значениям рассчитывают вероятности попадания результатов измерений (*частоты*) в каждый из интервалов группирования по формуле $f_i = N_i/n$, где $i = 1, 2, \dots, m$.

Проведенные расчеты позволяют построить гистограмму, полигон и кумулятивную кривую. Для построения *гистограммы* по оси результатов наблюдений x откладываются интервалы Δx_i в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строится прямоугольник высотой N_i . Площадь, заключенная под графиком, пропорциональна числу наблюдений n . Иногда высоту прямоугольника откладывают равной эмпирической плотности вероятности p_i

$$p_i = f_i/\Delta x_i = \frac{N_i}{n \cdot \Delta x_i},$$

которая является оценкой средней плотности в интервале Δx_i . В этом случае площадь под гистограммой равна единице. При увеличении числа интервалов и соответственно уменьшении их длины гистограмма все более приближается к гладкой кривой – графику плотности распределения вероятности.

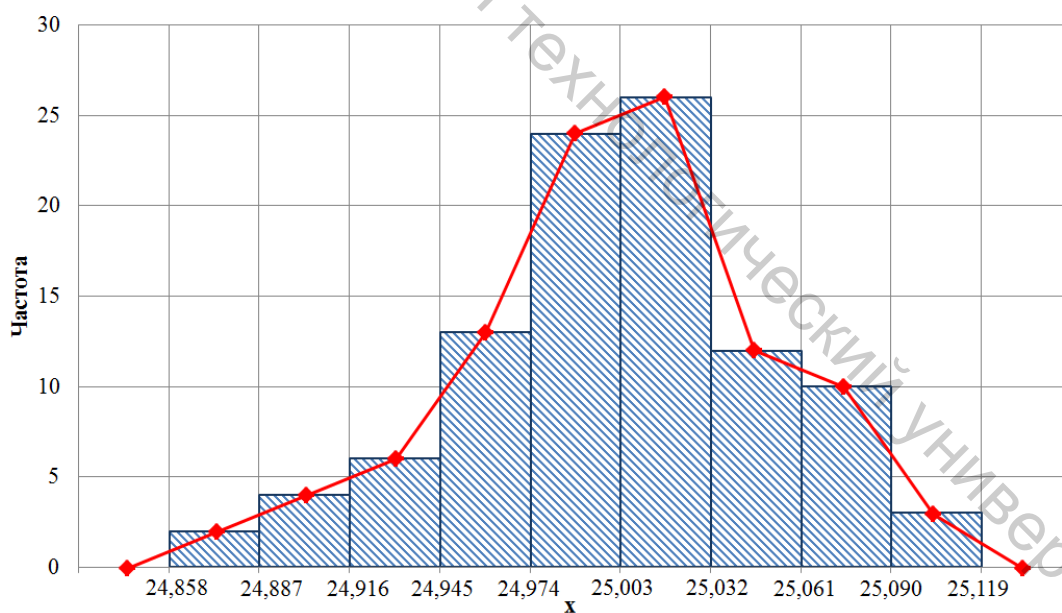


Рисунок 10.1 – Гистограмма и полигон

Полигон представляет собой ломаную кривую, соединяющую середины верхних оснований каждого столбца гистограммы. Он более наглядно, чем гистограмма, отражает форму кривой распределения. За пределами гистограммы справа и слева остаются пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс.

Эти точки при построении полигона соединяют между собой отрезками прямых линий. В результате совместно с осью x образуется замкнутая фигура, площадь которой в соответствии с правилом нормирования должна быть равна единице (или числу наблюдений при использовании частот).

По виду полигона оценивают закон распределения результатов измерения.

4. Оценка закона распределения по статистическим критериям.

По характеру гистограммы, полученным точечным оценкам выдвигается гипотеза о том, что массив полученных результатов измерений подчиняется некоторому теоретическому закону распределения (*нулевая гипотеза*).

Далее гипотезу нужно проверить путем вероятностной оценки близости данного эмпирического распределения к предполагаемому теоретическому. Для этого используют особые случайные величины, отражающие связь между эмпирическими и теоретическими частотами. Подобные величины называются критериями проверки гипотез, или просто критериями согласия. Таких критериев для поставленной задачи существует несколько (в литературе более 30), в частности критерий Колмогорова, χ^2 – критерий Пирсона, критерий Мизеса – Смирнова (ω_2) и др.

Критерии согласия позволяют оценить вероятность того, что полученная выборка не противоречит сделанному предположению о виде закона распределения рассматриваемой случайной величины. Для этого выбирается некоторая величина u , являющаяся мерой расхождения статистического и теоретического законов распределения, и определяется такое ее значение u_q , чтобы $P(u \geq u_q) = q$, где q – достаточно малая величина (уровень значимости), значение которой устанавливается в соответствии с существом задачи. Если значение меры расхождения u полученное на опыте, больше u_q , то отклонение от теоретического закона распределения считается значимым и предположение о виде закона распределения должно быть отвергнуто (вероятность отвергнуть правильное предположение о виде закона распределения в этом случае не больше q).

При числе наблюдений $n > 50$ для идентификации закона распределения используется критерий Пирсона χ^2 , критерий Колмогорова Λ или критерий Мизеса – Смирнова (ω_2). При $50 > n > 15$ для проверки нормальности закона распределения применяется составной критерий (d-критерий), приведенный в ГОСТе 8.207-76. При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному не проверяется (см. вопрос лекции 10.2).

5. Определение доверительных границ случайной погрешности.

Если удалось идентифицировать закон распределения результатов измерений, то с его использованием находят квантильный множитель z_p при заданном значении доверительной вероятности P . В этом случае доверительные границы случайной погрешности $\Delta = \pm z_p S_x$. При небольшом количестве результатов измерений вместо z_p используют параметр распределения Стьюдента или для других видов распределения, отличных от нормального, определяют t_p по специальным формулам.

При суммировании нескольких случайных составляющих прибегают к арифметическому суммированию для коррелированных величин и геометрическому, в случае некоррелированных составляющих

$$\Delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m \pm \Delta_i, \quad \Delta_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta_i^2}.$$

6. Определение границ неисклученной систематической погрешности θ результата измерений.

Под этими границами понимают найденные нестатистическими методами границы интервала, внутри которого находится неисклученная систематическая погрешность. Она образуется из ряда составляющих: как правило, погрешностей метода и средств измерений, а также субъективной погрешности. Границы неисклученной систематической погрешности принимаются равными пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если их случайные составляющие пренебрежимо малы. Поскольку функции распределения элементарных систематических погрешностей неизвестны, то при суммировании видом распределения задаются. При выборе закона распределения руководствуются следующими правилами:

- если известна оценка границ $\pm \Theta_i$, то ее распределение следует считать равномерным (наиболее распространенный случай);
- если известна оценка СКО, то распределение считают нормальным.

Доверительная вероятность при определении границ θ принимается равной доверительной вероятности, используемой при нахождении границ случайной погрешности.

7. Определение доверительных границ погрешности результата измерения Δ_p .

Данная операция осуществляется путем суммирования СКО случайной составляющей S_x и границ неисклученной систематической

составляющей θ в зависимости от соотношения θ / S_x по правилам, изложенным в вопросе 10.3

8. Запись результата измерения.

Результат измерения записывается в виде $x = \bar{X} \pm \Delta_p$ при доверительной вероятности $P = P_d$. При отсутствии данных о виде функции распределения составляющих погрешности результаты измерений представляют в виде x, S_x, n, θ при доверительной вероятности $P = P_d$.

В указанном результате наименьшие разряды должны быть одинаковы у точечной оценки и у характеристик погрешностей.

10.2 Идентификация формы закона распределения результатов измерения

Рассмотрим применение **критерия Пирсона** для идентификации формы закона распределения результатов измерения.

Идея этого метода состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе распределения, совпадение с которым определяется. Использование критерия Пирсона возможно при большом числе измерений ($n > 50$) и заключается в вычислении величины χ^2 (хи-квадрат):

$$\chi^2_q = \sum_{i=1}^m \frac{(N_{\text{экс}} - N_{\text{теор}})^2}{N_{\text{теор}}}, \quad (10.1)$$

где m – число сравниваемых частот (число интервалов, на которые разбиты все результаты измерений величины x); $N_{\text{экс}}$ – экспериментальная частота (количество отсчетов, попавших в i -й интервал); $N_{\text{теор}} = nP_i$ – теоретическая частота; n – количество отсчетов в исходном массиве результатов измерений; P_i – вероятность попадания случайной величины x в i -й интервал.

При $n \rightarrow \infty$ закон распределения χ^2_q независимо от вида закона распределения случайной величины x стремится к закону χ^2 -распределения с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где r – число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по данной выборке ($r = 2$ для нормального и равномерного распределения).

Теоретические значения интегральной функции χ^2 распределения Пирсона для различных k и P представлены в справочных таблицах.

Критерий согласия К. Пирсона χ^2 позволяет провести сравнение двух

моделей и в том случае, когда для них используется разное число столбцов.

Критерий согласия Колмогорова Λ основан на сравнении эмпирических *накопленных* частот $F(f_s)$ нулевого порядка с частотами теоретического закона распределения $F(f_r)$. Чем меньше будут абсолютные величины разностей, тем ближе друг к другу будут сравниваемые законы. За меру расхождения экспериментального (статистического) и теоретического законов распределения принимается наибольшее значение d этих разностей. Опытное значение величины d определяется формулой

$$d = \max |F(f_s) - F(f_r)|, \quad (10.2)$$

где $F(f_s)$ – накопленная экспериментальная (статистическая) частота, а $F(f_r)$ – накопленная теоретическая частота.

Экспериментальная частота определяется как

$$f_s = N_i / n,$$

где N_i – экспериментальная частота (количество отсчетов, попавших в данный интервал); n – количество отсчетов в исходном массиве.

Теоретические частоты f_r , согласно статистическому определению вероятности, являются вероятностями Δp того, что случайная величина X с законом распределения $y = f(x)$ примет значение в соответствующем частном интервале Δx . А Δp приближенно вычисляется по формуле

$$f_r = P(x - \Delta x/2 \leq X \leq x + \Delta x/2) = \Delta p \approx p(x_i) \cdot \Delta x,$$

где $p(x_i)$ – дифференциальная функция закона распределения.

А.Н. Колмогоров ввел в рассмотрение другую случайную величину Λ , тесно связанную с D

$$\Lambda = D\sqrt{n}$$

с возможными значениями

$$\lambda = d\sqrt{n}. \quad (10.3)$$

Им было доказано, что каков бы ни был закон распределения $y = f(x)$ и каково бы ни было число $\lambda > 0$, при достаточно большом числе независимых испытаний n вероятность неравенства $\Lambda \geq \lambda$, которую обозначают через $P(\lambda)$, приближенно выражается следующим образом:

$$P(\lambda) \approx 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k\lambda^2}.$$

Случайная величина Λ служит критерием согласия между

эмпирическим и теоретическим законами распределения.

При $n \rightarrow \infty$ закон распределения величины $\lambda = d\sqrt{n}$ независимо от вида закона распределения случайной величины x стремится к закону распределения Колмогорова. Выражение $P(\lambda)$ является интегральной функцией (законом) распределения случайной величины Λ . Для $P(\lambda)$ составлены справочные таблицы значений.

Из таблиц видно, что чем меньше λ , а следовательно и d , тем больше $P(\lambda)$, т. е. тем вероятнее, что полученное расхождение между эмпирическим и выбранным теоретическим законами распределения при условии нулевой гипотезы является случайным. Наоборот, большему значению λ и, следовательно, большему d соответствует малая вероятность $P(\lambda)$ этого расхождения.

Если уровень значимости q принять равным 5 %, то критической областью критерия Колмогорова Λ явится область тех значений λ , для которых $P(\lambda) \leq 0,05$. Согласно таблице, это будут значения $\lambda > 1,40$. Соответственно, при уровне значимости 0,3 % критической областью критерия Колмогорова станут значения λ , для которого $P(\lambda) \leq 0,003$, то есть $\lambda > 1,80$.

На основании сказанного можно так сформулировать правило применения критерия Колмогорова.

Если найденное по формуле (10.3) значение λ окажется меньше 1,40, то с риском ошибки в 5 % можно утверждать, что выбранный теоретический закон распределения не противоречит экспериментальным данным. Если же $\lambda > 1,40$, то с риском ошибки в 5 % можно утверждать, что теоретический закон не соответствует данным и надо находить другой закон.

Для применимости критерия Колмогорова должно быть $n > 40 \div 50$.

При небольшом числе наблюдений ($n < 50$) проверка гипотезы о принадлежности результатов наблюдений к нормальному распределению проводится **по составному критерию** (по ГОСТу 8.207-76). При проверке задаются уровнем значимости q .

Первоначально вычисляют отношение $\bar{d}$ (критерий 1)

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n S_x^*}, \quad (10.4)$$

где S_x^* – смещенная оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (10.5)$$

Результаты наблюдений группы можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q_1/2} \leq \bar{d} \leq d_{q_1/2},$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ – квантили распределения, указанные в приложении к ГОСТ 8.207, причем q_1 – заранее выбранный уровень значимости критерия.

Далее выполняем проверку по критерию 2. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более m разностей $|x_i - \bar{x}|$ превзошли значение $z_{p/2} \cdot S_x$, где S_x – оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле (10.5), $z_{p/2}$ – верхняя квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающая вероятности $P/2$.

Значение верхнего квантиля распределения нормированной функции Лапласа находится по таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Квантили $z_{p/2}$ интегральной функции Лапласа.

P	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

В случае если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считают, что распределение результатов наблюдений группы не соответствует нормальному.

10.3 Определение доверительных границ погрешности результата измерения

При проведении многократных измерений случайная погрешность может быть уменьшена во много раз. Однако погрешность усредненного результата будет определяться не этой весьма малой случайной погрешностью, а не зависящей от числа усредняющих отсчетов систематической погрешностью.

Механизм суммирования систематической и случайной составляющих погрешности отличается от механизма суммирования случайных погрешностей. Согласно ГОСТу 8.207, погрешность результата измерения определяется по следующим правилам.

В случае, если отношение $\frac{\theta}{S_x} < 0,8$, то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными

пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \varepsilon = t_p S_{\bar{x}}$ ср, где t_p – параметр закона распределения, зависящий от вида распределения, доверительной вероятности P и числа проведенных измерений.

Если $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} > 8$, то случайной погрешностью по сравнению с

систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \Theta$.

В случае, если указанные неравенства не выполняются, то границу погрешности результата измерения следует вычислить по формуле

$$\Delta = K S_{\Sigma},$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей; S_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}.$$

Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{S_{\bar{x}}^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3}}}.$$

10.4 Обработка результатов однократных измерений

Прямые многократные измерения в большей мере относятся к лабораторным измерениям. Для производственных процессов более характерны однократные измерения. Однократные прямые измерения являются самыми массовыми и проводятся, если: при измерениях происходит разрушение объекта измерения, отсутствует возможность повторных измерений, имеет место экономическая целесообразность. Эти измерения возможны лишь при определенных условиях:

- объем априорной информации об объекте измерений такой, что модель объекта и определение измеряемой величины не вызывают сомнений;

- изучен метод измерения, его погрешности либо заранее устранены, либо оценены;

- средства измерений исправны, а их метрологические характеристики соответствуют установленным нормам.

За результат прямого однократного измерения принимается полученная величина. До измерения должна быть проведена априорная оценка составляющих погрешности с использованием всех доступных данных. При определении доверительных границ погрешности результата измерений доверительная вероятность принимается, как правило, равной 0,95.

Методика обработки результатов прямых однократных измерений приведена в рекомендациях МИ 1552-86 «ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей результатов измерений». Данная методика применима при выполнении следующих условий: составляющие погрешности известны, случайные составляющие распределены по нормальному закону, а неисключенные систематические, заданные своими границами Θ_i , – равномерно.

Составляющими погрешности прямых однократных измерений являются:

- погрешности СИ, рассчитываемые по их метрологическим характеристикам;

- погрешность используемого метода измерений, определяемая на основе анализа в каждом конкретном случае;

- личная погрешность, вносимая конкретным оператором. Если последние две составляющие не превышают 15 % погрешности СИ, то за погрешность результата однократного измерения принимают погрешность используемого СИ. Данная ситуация весьма часто имеет место на практике.

Названные составляющие могут состоять из неисключенных систематических и случайных погрешностей. При наличии нескольких систематических погрешностей, заданных своими границами $\pm \Theta_i$, либо доверительными границами $\pm \Theta_i(P)$, доверительная граница результата измерения соответственно может быть рассчитана по формуле

$$\Theta_i(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2}.$$

Случайные составляющие погрешности результата измерений выражаются либо своими СКО S_{x_i} , либо доверительными границами $\pm \varepsilon_i(P)$. В первом случае доверительная граница случайной составляющей погрешности результата прямого однократного измерения определяется через его СКО S_x :

$$\varepsilon = z_p S_x = z_p \sqrt{\sum_{i=1}^k S_{xi}^2},$$

где z_p – точка нормированной функции Лапласа, отвечающей вероятности P .

При $P = 0,95$ $z_p = 2$.

Если СКО S_{xi} определены экспериментально при небольшом числе измерений ($n < 30$), то в данной формуле вместо коэффициента z_p следует использовать коэффициент Стьюдента, соответствующий числу степеней свободы i -й составляющей, оценка которой произведена при наименьшем числе измерений.

Найденные значения Θ и $\varepsilon(P)$ используются для оценки погрешности результата прямых однократных измерений. В зависимости от соотношения Θ и S_x суммарная погрешность определяется по одной из формул:

- 1) если $\Theta / S_x < 0,8$, то $\varepsilon(P)$;
- 2) если $0,8 \leq \Theta / S_x \leq 8$, то $k_p (\varepsilon(P) + \Theta)$ ($k_p =$ от 0,76 до 0,81 при $P = 0,95$);
- 3) если $\Theta / S_x > 0,8$, то Θ .

Прямые однократные измерения с приближенным оцениванием погрешностей правомочны, если доказана возможность пренебрежения случайной составляющей погрешности измерения, т. е. можно обосновано считать, что среднее квадратическое отклонение S_x случайной составляющей меньше $1/8$ суммарной границы неисклученных систематических составляющих погрешности результата измерения.

В простейшем случае, когда влияющие величины соответствуют нормальным условиям, погрешность результата прямого однократного измерения равна пределу основной погрешности средства измерения $\Delta_{СИ}$, определяемой по нормативно-технической документации. Результат измерения запишется в виде $\Delta = \pm \Delta_{СИ}$. Доверительная вероятность не указывается, но, как правило, подразумевается, что она равна 0,95. При проведении измерений в условиях, отличных от нормальных, необходимо определять и учитывать пределы дополнительных погрешностей.

11 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Косвенные измерения – это измерения, при которых искомое значение физической величины Y находят на основании известной зависимости

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m), \quad (11.1)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_m$ – результаты измерений аргументов (обычно это результаты прямых измерений).

Функция f должна быть известна из теоретических предпосылок или установлена экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь. Она может обозначать линейную и нелинейную зависимость измеряемой величины Y от аргументов $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных, совместных измерений. Сведения об аргументах могут быть взяты из справочной литературы, технической документации.

При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95 или 0,99.

В теоретической метрологии разработаны подходы определения результатов косвенных измерений и оценки их погрешности:

- 1) при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями изменений аргументов;
- 2) при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;
- 3) для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

Методы обработки результатов косвенных измерений при линейной функции хорошо разработаны. При этом используется подход, основанный на *раздельной обработке результатов измерений аргументов* X и их погрешностей.

Методы обработки результатов косвенных измерений при нелинейной функции сводятся, как правило, к *линеаризации* зависимости (11.1). При таком подходе делается оценка возможности линейного приближения, а также определяются дополнительные погрешности. Реже используются *метод приведения* и *метод перебора* (необходимо построение функции распределения отдельных значений измеряемой величины. В лекции не рассматривается).

Для решения задачи косвенных измерений необходимо, чтобы были известны: вид функции, результаты измерений аргументов $x_1, x_2, \dots, x_m$, и оценки их погрешностей.

11.1 Косвенные измерения при линейной зависимости между аргументами

Линейная зависимость – простейшая форма связи между измеряемой величиной и аргументами. Она может быть записана в виде

$$Y = \sum_{i=1}^m b_i X_i,$$

где b_i – коэффициент X_i -го аргумента; m – число аргументов.

Погрешности линейных косвенных измерений оценивают *методом, основанным на раздельной обработке аргументов и их погрешностей*.

1. Результат косвенного измерения Y определяют по формуле

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^m b_i \bar{X}_i, \quad (11.2)$$

где $\bar{X}_i$ – оценка результата измерения i -го аргумента, полученная путем обработки многократных прямых измерений.

Например, общее сопротивление ряда последовательно соединенных между собой резисторов определяется по формуле

$$R_{\Sigma} = 2R_1 + 4R_2 + 6R_3, \text{ где соответственно } b_1 = 2; b_2 = 4; b_3 = 6.$$

Каждый из аргументов R_1, R_2, R_3 должен иметь оценку в виде среднего значения и погрешность измерения $\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3$.

2. Среднее квадратическое отклонение результата косвенного измерения $S_{\bar{Y}}$ *при отсутствии корреляционной связи между аргументами* равно

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 S_{\bar{X}_i}^2}, \quad (11.3)$$

где b_i – коэффициент X_i -го аргумента (в общем случае они вычисляются $b_i = dF/dX_i$); $S_{\bar{X}_i}$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения i -го аргумента.

При наличии корреляционной связи между аргументами, которая возникает чаще всего в тех случаях, когда их измерения проводятся одновременно и подвергаются одинаковому влиянию внешних условий, необходимо учесть степень их корреляции через соответствующий коэффициент.

3. При большом числе измерений $n > 25-30$ доверительные границы случайной погрешности ε находят

$$\varepsilon = \pm Z_{P/2} S_{\bar{Y}}, \quad (11.4)$$

где $Z_{P/2}$ – квантиль функции нормированного нормального распределения при вероятности $P/2$; $S_{\bar{Y}}$ – стандартное отклонение результата косвенного измерения.

При меньшем числе измерений используют распределение Стьюдента

$$\varepsilon = \pm t S_{\bar{Y}}, \quad (11.5)$$

где t – коэффициент Стьюдента; $S_{\bar{Y}}$ – стандартное отклонение результата косвенного измерения.

Коэффициент Стьюдента t находят по доверительной вероятности P и эффективному числу степеней свободы f , которое рассчитывают по формуле

$$f = \left(\sum_{i=1}^m \frac{b_i^4 S_{x_i}^2}{n_i + 1} \right)^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^m b_i^2 S_{x_i}^2 \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^m \frac{b_i^4 S_{x_i}^2}{n_i + 1} \right) \right], \quad (11.6)$$

где n_i – число измерений при определении X_i -го аргумента.

Если предполагается, что распределение результата измерения не противоречит нормальному, то результат косвенного измерения записывается в виде

$$Y = \bar{Y} \pm \varepsilon(P) \text{ при } P = P_d.$$

Если при измерении аргументов X_i имеют место систематические погрешности, то они должны быть исследованы и, по возможности, устранены. Однако, как известно, полностью устранить систематические погрешности не удастся и остаются неисключенные систематические погрешности аргументов x_i и результата измерения Y .

4. Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата линейного косвенного измерения $\Theta(P)$, в случае, если неисключенные систематические погрешности аргументов заданы границами Θ_i , вычисляют по формуле

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \Theta_i^2}, \quad (11.7)$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью P и числом m составляющих Θ_i . Его значения приведены в таблице 11.1.

Таблица 11.1 – Значения коэффициентов k при $m > 4$

P	0,90	0,95	0,98	0,99
k	0,95	1,1	1,3	1,4

Если число суммируемых слагаемых $m \leq 4$, то значение коэффициента k определяют по таблице 11.2. Под L здесь понимают отношение наибольшей длины интервала $(b_i \Theta_i)_{\max}$ одного из слагаемых к длине $b_i \Theta_i$ остальных.

Таблица 11.2 – Значения коэффициента k при $m = 2, 3, 4$

L	$P = 0,98$			$P = 0,99$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	1,22	1,28	1,30	1,28	1,38	1,41
2	1,16	1,23	1,26	1,22	1,31	1,36
3	1,11	1,17	1,20	1,16	1,24	1,28
4	1,07	1,12	1,15	1,12	1,18	1,22
5	1,05	1,09	1,12	1,09	1,14	1,18

Если границы неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов заданы их доверительными границами $\Theta_i(P_i)$, соответствующими вероятностям P_i , то границу $\Theta(P)$ определяют по формуле

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \Theta_i^2(P_i) / k_i^2}. \quad (11.8)$$

Коэффициенты k_i определяются так же, как поправочный коэффициент k .

5. Суммарную погрешность результата косвенного измерения оценивают на основе композиции распределений случайных и систематических погрешностей.

$$\text{Если } \frac{\Theta(P)}{S_{\bar{Y}}} < 0,8, \quad \text{то } \Delta = \varepsilon; \quad (11.9)$$

$$0,8 \leq \frac{\Theta(P)}{S_{\bar{Y}}} \leq 8, \quad \text{то } \Delta \rightarrow k_p[\varepsilon(P) + \Theta(P)]; \quad (11.10)$$

$$\frac{\Theta(P)}{S_{\bar{Y}}} > 8, \quad \text{то } \Delta = \Theta(P), \quad (11.11)$$

где k_p – коэффициент, который находят по таблице 11.3.

Таблица 11.3 – Зависимость k_p от отношения $\Theta(P)/S_x$ при различной доверительной вероятности P

$\Theta(P)/S_x$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,95}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$k_{0,99}$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

6. Представляют результат аналогично прямым многократным измерениям.

Для упрощенных расчетов можно использовать **метод сложения абсолютных погрешностей аргументов**, если есть уверенность что погрешности могут быть **зависимы** (присутствует корреляция)

$$\Delta Y = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \dots + \Delta X_m.$$

Квадратичное суммирование, которое справедливо, если предполагать, что погрешности взаимно компенсируются, случайны и **независимы** (корреляция отсутствует или незначительная), даст более точную оценку и несколько меньшую по сравнению с линейным арифметическим суммированием

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \dots + \Delta X_m^2}.$$

11.2 Косвенные измерения при нелинейной зависимости между аргументами

Рассмотрим определение результата косвенного измерения и оценки его погрешности **при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции** между погрешностями измерений аргументов, так как на практике этот случай встречается наиболее часто. Расчеты можно провести тремя методами.

Метод линеаризации основан на том, что погрешность измерения значительно меньше измеряемой величины, и поэтому вблизи средних значений $\bar{X}_j$ аргументов нелинейная функциональная зависимость линеаризуется и раскладывается в ряд Тейлора (члены высокого порядка не учитываются).

Линеаризуя функцию нескольких случайных аргументов (какими и являются результаты измерений и их погрешности), можно получить, как правило, достаточно простое выражение для вычисления оценок среднего значения и среднего квадратического отклонения функции.

Разложение нелинейной функции в ряд Тейлора имеет вид

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_m) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}_i} \Delta X_i + R. \quad (11.12)$$

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом R

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2} \right)_{\bar{X}_i} \cdot (\Delta X_i)^2. \quad (11.13)$$

Остаточным членом пренебрегают, если $R < 0,8 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2} \right)_{\bar{X}_i} \cdot S_{\bar{X}_i}^2}$, где

$S_{\bar{X}}$ – среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата измерения x_i -го аргумента.

Первое слагаемое правой части уравнения есть точечная оценка истинного значения косвенной величины, которая получается подстановкой функциональную зависимость средних арифметических $\bar{X}_i$, значений аргументов:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m).$$

Второе слагаемое $\sum_{i=1}^m \left(\frac{dF}{dX_i} \right)_{\bar{X}_i} \cdot \Delta X_i$, есть сумма составляющих погрешностей косвенного измерения, называемых частными погрешностями, а частные производные $\frac{dF}{dX_i}$ – коэффициент влияния.

Отклонения ΔX_i должны быть взяты из полученных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали выражение для остаточного члена R .

Если частные погрешности косвенного измерения не зависят друг от друга, т. е. являются некоррелированными, и известны доверительные границы погрешности аргументов при одинаковой вероятности, то предельная погрешность (без учета знака) косвенного измерения вычисляется по формуле

$$\Delta_{\bar{Y}} = \sum_{j=1}^m \left| \frac{dF}{dx_j} \right| \cdot \Delta \bar{X}_j, \quad (11.14)$$

где $\frac{dF}{dx_j}$ – значения частных производных функциональной зависимости

определяются при средних значениях аргументов $\frac{dF}{dx_j} = \frac{dF}{dx_j}$.

Этот метод, называемый максимум-минимум, дает значительно завышенное значение погрешности косвенного измерения.

Относительно правильная оценка погрешности косвенного измерения получается по методу квадратического суммирования

$$\Delta_{\bar{Y}} = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{dF}{dX_j} \right)^2 \cdot \Delta X_j^2} . \quad (11.15)$$

Метод приращений измеряемой величины по ее аргументам

В этом случае предварительно вычисляют значение оценки измеряемой величины $Y = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)$, а затем вычисляют погрешности, приносимые каждым аргументом через приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{X1} &= \left| F(\bar{X}_1 + \Delta_{X1}, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m) - F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m) \right|, \\ \Delta Y_{X2} &= \left| F(\bar{X}_1, \bar{X}_2 + \Delta_{X2}, \dots, \bar{X}_m) - F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m) \right| \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Полная суммарная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta Y_{X1}^2 + \Delta Y_{X2}^2 + \dots + \Delta Y_{Xm}^2} . \quad (11.16)$$

Метод сложения относительных погрешностей аргументов

Если функция $Y = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)$ является произведением или частным, а величины $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ измерены с погрешностями $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_m$ и погрешности независимы и случайны, то суммарная погрешность результата косвенного измерения вычисляется

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X_1}{X_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta X_m}{X_m} \right)^2} . \quad (11.17)$$

Если величина X измеряется с погрешностью ΔX и измеренное значение используется для вычисления степени этого числа $Y = X^n$, то относительная погрешность Y в n раз будет больше относительной погрешности X

$$\frac{\Delta Y}{Y} = n \frac{\Delta X}{X} .$$

11.3 Косвенные измерения при коррелированных погрешностях измерений аргументов

При наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов для определения результатов косвенного измерения и его погрешности используют **метод приведения**, который предполагает наличие ряда отдельных значений измеряемых аргументов, полученных в результате многократных измерений. Этот метод можно также применять при неизвестных распределениях погрешностей измерений аргументов.

Метод основан на приведении ряда отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду прямых измерений. Получаемые сочетания отдельных результатов измерений аргументов подставляют в формулу (11.1) и вычисляют отдельные значения измеряемой величины Y : $Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_L$.

Результат косвенного измерения $\bar{Y}$ вычисляют по формуле

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^L \frac{Y_i}{L}, \quad (11.18)$$

где L – число отдельных значений измеряемой величины; Y_i – i -е отдельное значение измеряемой величины, полученное в результате подстановки i -го сочетания согласованных результатов измерений аргументов в формулу (11.1).

Например, при измерении средней плотности жидкости, когда каждая проба дает пару аргументов: массы m_i и объема V_i . По этим величинам вычисляется отдельное значение плотности $\rho_i = m_i / V_i$. Все полученные значения плотности образуют группу, которую можно обрабатывать методами, разработанными для прямых измерений.

Среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{L(L-1)}}.$$

Доверительные границы случайной погрешности для результата измерения вычисляют по формуле

$$\Delta = t \cdot S_{\bar{Y}},$$

где t – коэффициент зависящий от вида распределения отдельных значений измеряемой величины Y и выбранной доверительной вероятности. При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы случайных погрешностей вычисляют в соответствии с ГОСТ 8.207.

12 НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

12.1 Возникновение и суть концепции неопределенности

Появление *концепции неопределенности результата измерения* является попыткой сформулировать более общий, по сравнению с понятием «погрешность», универсальный подход к *оценке качества измерений*. Введение в метрологическую практику понятия «неопределенность» стало возможным после накопления огромного опыта практического применения понятия «погрешность» и является формой его естественного развития и обобщения. Разница в технике расчетов минимальна, в конечных результатах различия небольшие, поскольку методы оценивания и погрешностей, и неопределенностей имеют единую базу – аппарат теории вероятностей и математической статистики.

В целях обеспечения единства по выражению неопределенности в измерениях при участии семи международных организаций было разработано и опубликовано *Руководство по выражению неопределенности в измерении* (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*).

В разработке концепции принимали участие:

- Международное бюро мер и весов (*BIPM*);
- Международная организация законодательной метрологии (*OILM*);
- Международная организация по стандартизации (*ISO*);
- Международная электротехническая комиссия (*IEQ*);
- Международный союз по чистой и прикладной физике (*IUPAP*);
- Международный союз по чистой и прикладной химии (*IUPAC*);
- Международная федерация клинической химии (*IFCQ*).

Целью документа являлось следующее:

- обеспечить полную информацию по составлению отчетов о неопределенностях измерений;
- предоставить основу для международного сличения результатов измерений;
- предоставить универсальный метод для выражения и оценивания неопределенности результата измерения, применимый ко всем видам измерений и всем типам данных, используемых при измерениях.

К сегодняшнему дню *Руководство* приобрело статус неформального международного стандарта, который признан в большинстве развитых стран мира. Подписанная в 1999 г. договоренность о взаимном признании национальных эталонов и сертификатов калибровки обязывает всех участников использовать *Руководство* в процессе международных (ключевых) сличений национальных эталонов. На основе *Руководства* разрабатываются документы более узкого назначения.

Понятие и термин «неопределенность измерений» официально введен в систему обеспечения единства измерений Республики Беларусь РМГ 29-

2013, а в России стандартом ГОСТ Р 8.000-2000 «ГСИ. Основные положения».

В настоящий момент в Республике Беларусь применяются:

ГОСТ 34100.1-2017/ISO/IEC Guide 98-1:2009 «Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по выражению неопределенности измерения»;

ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения»;

РМГ 91-2019 «Государственная система обеспечения единства измерений. Использование понятий «погрешность измерения» и «неопределенность измерений». Общие принципы»;

РМГ 115-2019 «Государственная система обеспечения единства измерений. Калибровка средств измерений. Алгоритмы обработки результатов измерений и оценивания неопределенности»;

СТБ ISO 21748-2019 «Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценивании неопределенности измерений».

Учитывая тот факт, что Республика Беларусь активно участвует в процессе интеграции международного сообщества, остро стоит вопрос о гармонизации отечественных стандартов, в том числе в области метрологии, с международными нормативными документами.

Согласно Руководству принципиальными отличиями при оценке точности результата измерения являются:

- отказ от использования понятий «погрешность» и «истинное значение измеряемой величины» в пользу понятий «неопределенность» и «оцененное значение измеряемой величины»;

- переход от классификации погрешностей по природе из проявления на случайные и систематические к другому делению – по способу оценивания неопределенностей измерений (по типу А – методами математической статистики и по типу В – другими методами).

Основным понятием, используемым в Руководстве, является понятие «неопределенность измерения» (от англ. *uncertainty* – неуверенность, неизвестность, неопределенность). Неопределенность измерения трактуется в двух смыслах – широком и узком.

В широком смысле «неопределенность» трактуется как «сомнение», например: «...когда все известные или предполагаемые составляющие погрешности оценены и внесены соответствующие поправки, все еще остается неопределенность относительно истинности указанного результата, то есть сомнение в том, насколько точно результат измерения представляет значение измеряемой величины».

В узком смысле «неопределенность измерения есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине».

По существу, неопределенность результата измерения отражает

отсутствие точного знания о значении измеряемой величины. Результат измерения поэтому является только *оценкой* значения измеряемой величины. Такая оценка будет полной только в том случае, если рядом с результатом измерения указана установленная неопределенность. Предложенный в *Руководстве* метод оценки неопределенности позволяет указать такой интервал на шкале измерений (в частности, интервал с определенным уровнем доверия), в пределах которого находится значение измеряемой величины.

Руководство рассматривает следующие виды неопределенности:

- **стандартная неопределенность $u(x)$** – неопределенность результата измерения, выраженная в форме стандартного отклонения каждой влияющей величины: $u(x) = S(x)$;

- **суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$** – стандартная неопределенность результата измерения;

- **расширенная неопределенность U** – величина, определяющая ширину интервала вокруг результата измерения, в пределах которого находится большая часть распределения значений, которые с достаточной вероятностью могут быть приписаны измеряемой величине.

Руководство предлагает единый подход к методам оценки неопределенностей для всех видов измерений прямых и косвенных, однократных и многократных.

12.2 Алгоритм оценивания неопределенности результатов измерения

Как изложено в *Руководстве*, прежде чем приступить к расчету неопределенности должны быть внесены поправки «на все значимые систематические эффекты» и исключены «грубые ошибки».

Процесс оценивания неопределенности может быть представлен в виде следующих этапов.

1. *Описание измерения, составление его модели и выявление источников неопределенности.*

Любой процесс измерения можно представить в виде последовательности выполняемых операций. Поэтому для описания измеряемой величины и выявления источников неопределенности целесообразно представить цепь преобразования измеряемой величины в виде схемы, отображающей последовательность процесса измерений.

В большинстве случаев измеряемая величина Y не является прямо измеряемой, а зависит от m других измеряемых величин $X_1, X_2 \dots X_m$ и выражается через функциональную зависимость

$$Y = f(X_1, X_2 \dots, X_m),$$

где $X_1, \dots, X_m$ – входные величины (непосредственно измеряемые или

другие величины, влияющие на результат измерения); m – число этих величин; f – вид функциональной зависимости; Y – выходная величина.

При постановке измерительной задачи необходимо дать краткое описание измерения, т. е. как определяется измеряемая величина Y , включая:

- метод и/или методику измерения;
- схему или план измерения;
- используемое оборудование;
- условия измерения.

Входные величины $X_1, X_2 \dots X_m$, от которых зависит выходная величина Y , являются непосредственно измеряемыми величинами и сами могут зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты

$$X_1 = f(Z_1, Z_2 \dots Z_l), X_2 = f(W_1, W_2 \dots W_k) \text{ и т. д.}$$

Описание измеряемой величины в виде функциональной зависимости (математической модели), связывающей измеряемую величину с параметрами, от которых она зависит, называется разработкой модели измерения.

Стадия моделирования является чрезвычайно важной, так как от правильности и тщательности составления модели измерения, которая определяется необходимой точностью, зависит количество источников неопределенности.

С целью обобщения источников неопределенности измеряемую (выходную) величину и выявленные источники неопределенности: входные величины и величины, на них влияющие можно представить в виде причинно-следственной диаграммы:

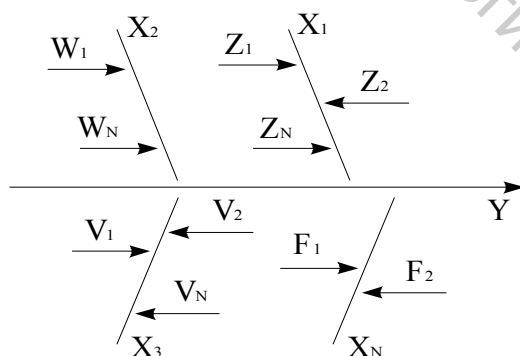


Рисунок 12.1 – Причинно-следственная диаграмма

Неопределенность в результате измерения обычно состоит из нескольких составляющих, которые могут быть вызваны следующими причинами:

– неполное представление о влияющих величинах и несовершенство измерения этих величин (условия измерений, отбор проб и условия их хранения, чистота реактивов);

- субъективные погрешности оператора;
- аппаратные эффекты (погрешность применяемых СИ, разрешающая способность СИ, порог чувствительности);
- погрешности вычисления (неточные значения констант и других параметров, полученных из внешних источников и используемых в алгоритме обработки данных наблюдений, округление).

2. *Оценивание значений и стандартных неопределенностей входных величин.*

Следующим этапом после выявления источников неопределенности является количественное описание неопределенностей, возникающих от этих источников. Это может быть сделано двумя путями:

- оцениванием неопределенности, возникающей от каждого отдельного источника с последующим суммированием составляющих;
- непосредственным определением суммарного вклада в неопределенность от некоторых или всех источников с использованием данных об эффективности метода в целом.

Показатели эффективности метода устанавливают в процессе его разработки и межлабораторных или внутрилабораторных исследований. К показателям эффективности относятся правильность, характеризуемая смещением, и прецизионность, характеризуемая повторяемостью, воспроизводимостью и промежуточной прецизионностью.

Оценки эффективности могут включать не все факторы, поэтому влияние любых оставшихся следует оценить отдельно и затем просуммировать.

Если используется первый подход, то для каждой входной величины необходимо определить оценку и стандартную неопределенность. При этом все входные величины вследствие того, что их значения не могут быть точно известны, являются случайными непрерывными. Тогда оценки входных величин $X_1, X_2 \dots X_m$ обозначают малыми буквами $x_1, x_2 \dots, x_m$, и в качестве *оценки* x_i ($i = 1, \dots, m$) принимают *математическое ожидание*, а в качестве *стандартной неопределенности* $u(x_i)$ входной величины – стандартное отклонение. Оценку входной величины x_i и связанную с ней стандартную неопределенность $u(x_i)$ получают из закона распределения вероятности входной величины.

Различают два *типа* вычисления стандартной неопределенности:

- **вычисление по типу А** (u_A) – путем статистического анализа результатов многократных измерений (применяется хорошо развитый математический аппарат теории вероятностей и математической статистики);
- **вычисление по типу В** (u_B) – с использованием других способов.

Исходными данными для вычисления u_A являются результаты многократных измерений $x_1, x_2 \dots, x_m$ ($i = 1, \dots, m$).

Стандартная неопределенность $u(x_i)$ вычисляется по формуле

$$u(x_i) = u_A(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{g=1}^n (x_{ig} - \bar{x}_i)^2}. \quad (12.1)$$

для результата измерения $x_i = \bar{x}_i$, вычисленного как среднее арифметическое.

Исходными данными для оценивания стандартной неопределенности по типу В u_B является следующая априорная информация:

- данные предшествовавших или предварительных измерений величин, входящих в уравнение измерения;
- сведения о виде распределения вероятностей;
- данные, основанные на опыте исследователя (экспертные оценки) или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих приборов и материалов;
- неопределенности констант и справочных данных;
- данные поверки, калибровки, сведения изготовителя о приборе и др.

Имеющуюся информацию о величинах x_i необходимо правильно описать с помощью функции распределения вероятностей. Для определения стандартной неопределенности входных величин необходимо воспользоваться законом распределения вероятностей x_i .

Если оценка x_i берется из паспорта на прибор, свидетельства о поверке, справочника или другого источника, то неопределенность обычно дается как интервал $\pm a_i$ отклонения входной величины от ее оценки. Наиболее распространенный способ формализации неполного знания о значении величины заключается в постулировании равномерного закона распределения возможных значений этой величины в указанных (нижней и верхней) границах $[(a_{i-}, a_{i+}]$ для i -й входной величины. При этом стандартную неопределенность, вычисляемую по типу В – $u_B(x_i)$, определяют по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{a_{i+} - a_{i-}}{2\sqrt{3}}, \quad (12.2)$$

а для симметричных границ ($\pm a_i$) – по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}. \quad (12.3)$$

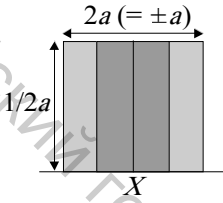
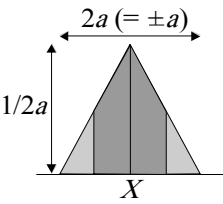
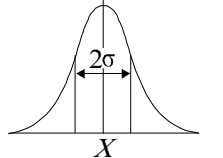
Применение прямоугольного распределения является разумным по умолчанию при отсутствии любой другой информации. Но если известно, что значения рассматриваемой величины более вероятны у центра, чем у границ интервала, будет лучшим вариантом использование треугольного или нормального распределения.

В случае других законов распределения формулы для вычисления

неопределенности по типу В будут иными.

Формулы и способы применения представлены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Формулы расчета стандартной неопределенности

Вид функции плотности вероятности	Способ применения	Стандартная неопределенность
Прямоугольное распределение		
	– об измеряемой величине известно только, что ее значение наверняка лежит в определенной области и что каждое значение между границами этой области с одинаковой вероятностью может приниматься в расчет; – сертификат или другой документ дает пределы без определения уровня доверия (например, 25мл ± 0,05 мл); – оценка получена в форме максимальных значений ($\pm a$) с неизвестной формой распределения	$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Треугольное распределение		
	– доступная информация относительно значений величины менее ограничена, чем для прямоугольного распределения. Значения возле среднего значения более вероятны, чем у границ; – оценка получена в форме максимальных значений диапазона ($\pm a$), описанного симметричным распределением вероятностей; – когда величина является суммой или разностью двух величин, распределение вероятностей значений которых описывается прямоугольным законом с одинаковыми диапазонами	$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$
Нормальное распределение		
	Оценка получена из повторных наблюдений случайно изменяющегося процесса. Неопределенность дана в форме: – стандартного отклонения наблюдений; – относительного стандартного отклонения $S/\bar{x}$; – коэффициента дисперсии CV% без установления вида распределения. Неопределенность дается в форме 95%-го или другого интервала доверия Q без указания вида распределения	$u(x) = S$ $u(x) = S$ $u(x) = x \cdot (S/\bar{x})$ $u(x) = \frac{CV\%}{100} x$ $u(x_i) = \frac{Q}{2}$ (при $P = 0,95$).

3. Анализ корреляций.

Две входные величины могут быть независимы или связаны между собой (коррелированы). В концепции неопределенности имеется в виду корреляция «логическая», а не математическая. Например, может существовать значительная корреляция между двумя входными величинами, если при их определении используют один и тот же измерительный прибор, физический эталон или справочные данные, имеющие значительную стандартную неопределенность.

Мерой взаимной зависимости или корреляции двух случайных величин является *ковариация*. Ковариация, связанная с оценками двух входных величин X_i и X_j , может устанавливаться равной нулю или рассматриваться как пренебрежимо малая, если:

а) обе входные величины X_i и X_j являются независимыми друг от друга, например, если они в различных, независимых один от другого экспериментах многократно, но не одновременно наблюдались или если они представляют (описывают) результирующую величину различных, независимых друг от друга проведенных исследований;

б) одна из входных величин X_i и X_j может рассматриваться как константа;

в) исходя из наших знаний и предположений просто не имеется никаких оснований для корреляции между входными величинами X_i и X_j .

Если две входные величины X_i и X_j являются коррелированными в определенной степени, то есть они являются зависимыми друг от друга тем или иным способом, то при оценивании суммарной стандартной неопределенности должна учитываться их ковариация $u(x_i, x_j)$, которая оценивается по следующей формуле:

$$u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \text{ при } (i \neq j), \quad (12.4)$$

где $u(x_i)$, $u(x_j)$ – стандартные неопределенности; $r(x_i, x_j)$ – коэффициент корреляции.

Для расчета коэффициента корреляции используются согласованные пары измерений (x_{ik}, x_{jk}) ; $k = 1, \dots, n$

$$r(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \bar{x}_j)^2}}.$$

4. Расчет оценки выходной величины.

Оценка выходной величины y является результатом измерения. Эту оценку получают из уравнения связи, заменяя входные величины X_i их оценками x_i .

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

5. Расчет суммарной стандартной неопределенности выходной величины.

Стандартная неопределенность выходной величины Y представляет собой стандартное отклонение оценки выходной величины или результата измерения и характеризует разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине. Определяется суммированием стандартной неопределенности входных величин $u(x_i)$ и является суммарной, или комбинированной стандартной неопределенностью, обозначаемой $u_c(y)$.

Применяемый для суммирования метод в терминах концепции неопределенности называется законом распределения неопределенностей, или корнем из суммы квадратов.

В случае некоррелированных входных величин суммарная стандартная неопределенность рассчитывается по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}, \quad (12.5)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – частная производная функции f по аргументу x_i ; $u(x_i)$ – стандартная неопределенность, оцененная по типу А или В.

В случае коррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}, \quad (12.6)$$

где $u(x_i, x_j)$ определяется по формуле (12.4).

Уравнения (12.5) и (12.6) базируются на аппроксимации функции модели $Y = f(X_1, \dots, X_m)$ рядом Тейлора первого порядка. Это справедливо только для линейных функций.

Частные производные называются коэффициентом чувствительности c_i и показывают, как выходная оценка y изменяется с изменением значения входных оценок x_i : $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Однако на практике частные производные оцениваются как

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_m} \quad (12.7)$$

С учетом (12.7) формулы (12.5) и (12.6) преобразуются в следующие выражения:

– в случае некоррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2 u_i^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y)}; \quad (12.8)$$

– в случае коррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m u_i(y) u_j(y) r(x_i, x_j)}, \quad (12.9)$$

где $r(x_i, x_j)$ – коэффициент корреляции; $u_i(y)$ – вклад в стандартную неопределенность, связанную с оценкой y выходной величины, который получается из стандартной неопределенности, связанной с оценкой входной величины x_i , по следующей формуле:

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (12.10)$$

Во многих случаях общие выражения для суммирования неопределенностей сокращаются до гораздо более простых формул.

Так, если функция модели f является суммой или разностью некоррелированных входных величин X_i , например, $y = (x_1 + x_2 + \dots)$, то суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ определяется выражением

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + \dots}. \quad (12.11)$$

Коэффициенты чувствительности в данном случае равны 1.

Если функция модели f является произведением или отношением некоррелированных входных величин X_i , то суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ определяется выражением

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \dots}. \quad (12.12)$$

где $u(x_i)/x_i$ – неопределенности параметров, выраженные в виде относительных стандартных отклонений.

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (12.8), но с суммарной стандартной неопределенностью, выраженной как относительная суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)/|y|$ ($|y| \neq 0$) и стандартными неопределенностями входных величин $u(x_i)$, выраженных как относительные стандартные неопределенности $u(x_i)/|x_i|$ ($|x_i| \neq 0$).

Для наглядности и систематизации результатов проведенного анализа и расчетов часто составляют сводную таблицу – *бюджет неопределенности*.

Величина X_i	Единица измерений	Значение оценки, x_j	Интервал	Тип неопределенности	Вид распределения вероятностей	Стандартная неопределенность, $u(x_i)$	Коэффициент чувствительности, c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$	Процентный вклад, %
X_1		x_1				$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$	
...		...				...	...		
X_n		x_n				$u(x_n)$	c_n	$u_n(y)$	
Y		y				$u(y)$			

6. Расчет расширенной неопределенности U

Расширенную неопределенность U получают путем умножения стандартной неопределенности выходной величины $u_c(y)$ на коэффициент охвата k .

$$U = k \cdot u_c(y). \quad (12.13)$$

При выборе значения коэффициента охвата следует учитывать:

- требуемый уровень достоверности;
- какую-либо информацию о предполагаемом распределении;
- информацию о количестве наблюдений, использованных для оценки случайных эффектов.

Коэффициент охвата k при оценивании расширенной неопределенности выбирают в соответствии со следующими рекомендациями.

В случаях, когда измеряемой величине может приписываться нормальное распределение вероятностей, коэффициент охвата k определяется как квантиль нормированного нормального распределения при уровне доверия P (табл. 12.2).

Таблица 12.2 – Значения коэффициента охвата k при уровне доверия P

Уровень доверия P , %	Коэффициент охвата, k
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Часто на практике принимают $k = 2$ для интервала, имеющего уровень доверия $P = 95$ % и $k = 3$ для интервала, имеющего уровень доверия $P = 99$ %.

Если все стандартные неопределенности, оцененные по типу А, определялись на основании ряда наблюдений, количество которых

менее 10, то распределение вероятностей результата измерения описывается распределением Стьюдента (t-распределением) с эффективной степенью свободы ν_{eff} .

В общем случае $k = t_p(\nu_{eff})$, где $t_p(\nu_{eff})$ – квантиль распределения Стьюдента с эффективным числом степеней свободы ν_{eff} и уровнем доверия P . Эффективное число степеней свободы рассчитывается по формуле

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u^4(x_i)}{\nu_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^4}, \quad (12.14)$$

где $\nu_i = n-1$ – число степеней свободы при определении оценки i -ой входной величины для оценивания неопределенностей по типу А (n – число результатов измерений); $\nu = \infty$ для определения неопределенности по типу В.

Значения коэффициента охвата, который равен квантилю распределения Стьюдента $k = t_p(\nu_{eff})$ можно найти в таблице 12.3.

Таблица 12.3 – Коэффициенты охвата k для различных степеней свободы ν_{eff}

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k_{95}	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00
k_{99}	235,8	19,21	9,22	6,22	5,51	4,90	4,53	4,28	3,96	3,42	3,16	3,00

Когда вклад источника неопределенности входной величины, имеющей прямоугольное распределение, является доминирующим (в три и более раз, чем все остальные вместе взятые) k равно:

1,65 при $P = 95 \%$

1,71 при $P = 99 \%$.

7. Представление конечного результата измерений.

Представляют полный результат измерений, состоящий из оценки y измеряемой величины Y и расширенной неопределенности U в форме

$$Y = y \pm U$$

с указанием единиц измерений для Y и y .

Графическая интерпретация расширенной неопределенности измерений при нормальном законе распределения величины показана на рисунке 12.1.

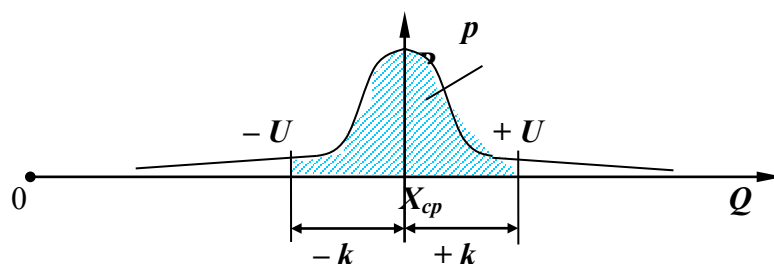


Рисунок 12.1 – Графическая интерпретация расширенной неопределенности измерений (при нормальном законе распределения величины)

12.3 Неопределенность и погрешность

В *Руководстве* неоднократно подчеркивается различие понятий «погрешность» и «неопределенность».

«Термины «погрешность» и «неопределенность» – не синонимы и представляют собой совершенно различные понятия; их не следует путать друг с другом или неправильно использовать». Измеряемая величина не может быть полностью описана: для этого необходимо неограниченное количество информации. Из-за неполного описания (неадекватности объекта измерения приписываемой ему модели) «истинное» значение измеряемой величины уже имеет неопределенность, которая принципиально не может быть устранена (например, уменьшением погрешности средства измерений). Поэтому единственное «истинное» значение измеряемой величины, а вместе с ним и погрешность, являются идеализированными понятиями, которые никогда не могут быть известны точно. Ведь **погрешность измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.**

Понятие «неопределенность» сосредотачивает внимание на результате измерения и оценке его качества (через оценку значения неопределенности). **Неопределенность результата измерения** (в количественном смысле) есть параметр, который **может быть обоснованно приписан измеряемой величине.**

Экспериментальное стандартное отклонение среднего арифметического значения рядов наблюдений $S(\bar{x})$ не является случайной погрешностью. На самом деле, это мера неопределенности среднего значения, обусловленная случайными эффектами. Погрешность, возникшая от неполной компенсации систематического эффекта, не может быть известна точно. Неопределенность поправки не является

систематической погрешностью (часто называемой смещением). На самом деле, это мера неопределенности результата измерений из-за неполного знания требуемого значения поправки. Неизвестный систематический эффект не может быть учтен в оценке неопределенности результата измерения, но он вносит вклад в его погрешность.

Классификация неопределенностей на категории *A* и *B* не совпадает с разделением погрешностей на случайные и систематические. Неопределенность от внесения поправки на известный систематический эффект может быть получена в одних случаях как оценка по типу *A*, а в других – как оценка по типу *B*, также как и неопределенность, характеризующая случайный эффект.

На основании всего изложенного выше можно предложить следующие выводы.

Как изложено в Руководстве, **неопределенность** должна быть единственной характеристикой точности конкретного результата измерения в большинстве следующих метрологических ситуаций: для измерений, проводимых при сличении национальных эталонов; при градуировке и калибровке средств измерений; при построении поверочных схем; при определении точностных характеристик МВИ в процессе или после их разработки. Неопределенность стала обязательной как характеристика точности определения фундаментальных физических постоянных, а также вводится как метрологическая характеристика для каждого государственного эталона.

Погрешностью могут характеризоваться *нормативы точности средств измерений, измерительных и контрольных процедур: предельная погрешность результата измерения в МВИ; при поверке СИ*, когда неопределенности, связанные с рабочим эталоном и процедурой сравнения, пренебрежимо малы по сравнению с допустимой погрешностью СИ.

Сравнительный анализ процедур оценивания характеристик погрешности и вычисления неопределенности измерений детально приведен в РМГ 91-2019 «Государственная система обеспечения единства измерений. Использование понятий “погрешность измерения” и «неопределенность измерений». Общие принципы».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бавыкин, О. Б. Метрология : учебник / О. Б. Бавыкин [и др.] ; под общ. ред. С. А. Зайцева. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2020. – 522 с.
2. Бурдун, Г. Д. Основы метрологии : уч. пособие для вузов / 3-е изд., перераб. / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – М. : Изд-во стандартов, 1985. – 256 с.
3. Гвоздев, В. Д. Прикладная метрология: Величины и измерения : учеб. пособие / В. Д. Гвоздев. – Москва : МИИТ, 2015. – 74 с.
4. Ефремова, Н. Ю. Оценка неопределенности в измерениях : практическое пособие / Н. Ю. Ефремова. – Минск, БелГИМ, 2003. – 50 с.
5. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных сотрудников / А. И. Кобзарь. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
6. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника : учебное пособие / К. К. Ким, Г. Н. Анисимов, В. Ю. Барбарович; под ред. К. К. Кима. – СПб. : Питер, 2006. – 368 с.
7. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоиздат, 1991.
8. Пронкин, Н. С. Основы метрологии: практикум по метрологии и измерениям : уч. пособие для вузов / Н. С. Пронкин. – Москва : Логос, 2007. – 392 с.
9. Сергеев, А. Г. Метрология : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – Москва : Логос, 2000, 2001. – 408 с.
10. Схиртладзе, А. Г. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник / А. Г. Схиртладзе, Я. М. Радкевич. – 2-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 539 с.
11. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1985. – 272 с.
12. Тюрин, Н. И. Введение в метрологию : учеб. пособие / Н. И. Тюрин. – М. : Изд-во стандартов, 1985.
13. Фридман, А. Э. Основы метрологии. Современный курс / А. Э. Фридман. – СПб. : НПО Профессионал, 2008. – 284 с.
14. Цитович, Б. В. Метрология. Лабораторный практикум : учебно-методическое пособие для студентов приборостроительного факультета / Б. В. Цитович. – Мн. : БНТУ, 2006. – 153 с.
15. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология : учебник для вузов / И. Ф. Шишкин. В 2 ч. Ч. 1. Общая теория измерений. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Питер, 2010. – 192 с.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

КУРС ЛЕКЦИЙ

Составитель:

Петюль Ирина Анатольевна

Редактор *Т.А. Осипова*

Корректор *А.В. Пухальская*

Компьютерная верстка

Подписано к печати 01.06.2022. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Усл. печ. листов 7,6.

Уч.-изд. листов 9,7. Тираж 65 экз. Заказ № 146.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.