МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА.
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Практикум

для студентов второго курса специальностей
1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)», 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций», 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-28 01 01«Экономика электронного бизнеса», 1-40 05 01-10 «Информационные системы и технологии (в бизнес-менеджменте)»

Витебск
2021

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол № 3 от 30.11.2021.

Математика. Случайные события в вероятностном пространстве : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2021. – 106 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по трём разделам курса «Математика» для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-43 01 07, дисциплины «Высшая математика» для студентов специальности 1-53 01 01-01 и дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальностей 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10: элементы комбинаторики и операции над событиями, классическое вероятностное пространство, зависимые и независимые события. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов второго курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплин «Математика», «Высшая математика» и «Теория вероятностей и математическая статистика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих специалистов механико-информационных и экономико-информационных специальностей. Среди рассмотренных в практикуме типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов четырёх специальностей факультета информационных технологий и робототехники и двух специальностей факультета экономики и бизнес управления. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена или зачёта, содержание и тематика практических занятий по указанным курсам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплин «Математика», «Высшая математика» и «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов механико-технологических и экономических специальностей второго года обучения.

В практикуме рассмотрены три раздела курсов «Математика», «Высшая математика», «Теория вероятностей и математическая статистика»: элементы комбинаторики и операции над событиями, классическое вероятностное пространство, зависимые и независимые события. Каждая тема практикума представляет собой методический материал для проведения практического занятия, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия, а также задания для выполнения контролируемой самостоятельной работы. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем практикума, а также их структура построены в соответствии с учебными программами дисциплин «Математика» «Высшая математика» и «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальностей: 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-53 01 01-01, 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в практикуме теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий. Предложенная методическая разработка поможет студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена подразумевают электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСАМ «МАТЕМАТИКА», «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА», «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-53 01 01-01, 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10 (ВТОРОЙ КУРС, ТРЕТИЙ СЕМЕСТР)

1. Вероятностный эксперимент. Предмет и задачи теории вероятностей.
2. Основные формулы комбинаторики.
3. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.
4. Классификация событий.
5. Аксиоматическое, классическое, геометрическое и статистическое определение вероятностей случайных событий.
6. Свойства вероятностей случайных событий.
7. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
8. Формула полной вероятности.
9. Формула Байеса.
10. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли.
11. Наивероятнейшее число.
12. Теорема Пуассона.
13. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
14. Интегральная теорема Муавра – Лапласа.
15. Закон больших чисел в схеме Бернулли.
16. Понятие случайной величины.
17. Функция распределения, её свойства.
18. Плотность вероятности, её свойства.
19. Дискретные случайные величины.
20. Непрерывные случайные величины.
21. Характеристики, описывающие центр распределения случайной величины (математическое ожидание, мода и медиана), их свойства.
22. Характеристики, описывающие рассеивание случайной величины (дисперсия и среднее квадратическое отклонение), их свойства.
23. Одноточечное и двухточечное распределение.
24. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.
25. Биномиальный закон распределения.
26. Равномерный закон распределения.
27. Показательный закон распределения.
28. Нормальный закон распределения.
29. Правило трех сигм для нормального закона распределения.
30. Определение многомерных случайных величин. Понятие о моделях распределения многомерных случайных величин.
31. Распределение вероятностей многомерных дискретных случайных величин.
32. Функция распределения многомерной случайной величины.

33. Непрерывные многомерные случайные величины. Плотность распределения вероятностей многомерной случайной величины.

34. Распределения составляющих многомерной случайной величины.

35. Условные распределения составляющих многомерных случайных величин.

36. Зависимые и независимые случайные величины.

37. Числовые характеристики многомерных случайных величин.

38. Функции (преобразования) двумерной случайной величины.

39. Двумерное нормальное распределение.

40. Предмет и задачи математической статистики.

41. Генеральная и выборочная совокупность.

42. Статистический ряд. Статистическое распределение случайной величины.

43. Эмпирическая функция распределения.

44. Графическое изображение статистических рядов.

45. Классификация точечных оценок.

46. Метод моментов.

47. Метод наибольшего правдоподобия.

48. Интервальные оценки параметров распределения. Точность нахождения точечных оценок. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

49. Доверительные интервалы для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение при известном среднем квадратическим отклонении.

50. Доверительные интервалы для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение при неизвестном среднем квадратическим отклонении.

51. Доверительные интервалы для среднего квадратического отклонения случайной величины, имеющей нормальное распределение.

52. Статистическая проверка параметрических гипотез.

53. Статистический критерий значимости проверки нулевой гипотезы.

54. Статистическая проверка непараметрических гипотез.

55. Критерий согласия χ^2.

56. Критерий согласия λ Колмогорова.

57. Основные задачи регрессионного и корреляционного анализа.

58. Линейная регрессия.

59. Коэффициент корреляции.

60. Линейный корреляционный анализ. Модели регрессий.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Содержание: основное правило комбинаторики, перестановки, размещения, размещения с возвращением (повторением), сочетания, сочетания с возвращением (повторением), виды событий, основные операции над событиями, пространство элементарных событий, алгебра событий.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

1.1.1 Элементы комбинаторики

Раздел математики, в которой изучаются задачи о подсчёте числа способов, с помощью которых осуществляется событие или числа способов, которыми можно упорядочить данную совокупность, называется *комбинаторикой*.

Основное правило комбинаторики. Пусть имеется m множеств: первое множество содержит n_1 элемент, второе – n_2 элемента, третье – n_3 элемента и так далее, m-ое множество содержит n_m элементов. Составляются комбинации из m элементов таким образом, чтобы в каждую комбинацию входило лишь по одному элементу из каждого множества. Число всех комбинаций такого типа определяется *основным правилом комбинаторики*:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_m . \qquad (1.1.1.1)$$

Перестановки. *Перестановкой* P_n из n элементов называется расположение этих элементов в определённом порядке. Они вычисляется по формуле

$$P_n = n! \qquad (1.1.1.2)$$

Перестановки с повторением (с возвращением). Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – натуральные числа, причём $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Представим множество A из n элементов в виде суммы k множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, содержащих соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_k$ элементов. Число различных способов такого разбиения на группы определяется по формуле

$$\overline{P}_n = P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!}. \quad (1.1.1.3)$$

Размещение. Требуется составить комбинацию m элементов из n элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком. *Размещение* вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.1.1.4)$$

Размещение с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различные исходами будут m элементарные наборы, которые отличаются, либо составом, либо порядком. *Размещение с повторением* вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (1.1.1.5)$$

Сочетание. Требуется составить m элементарные наборы из множества n чисел, которые отличаются лишь составом, без учёта порядка. *Сочетание* вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \quad (1.1.1.6)$$

Сочетания с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различные исходами будут m элементарные наборы, которые отличаются, лишь составом, без учёта порядка. В этом случае число таких наборов определяется по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (1.1.1.7)$$

1.1.2 Операции над событиями

При проведении эксперимента E можно выделить некоторое элементарное событие (исход), которое характеризуется тем, что любой повторный эксперимент может закончиться одним и только одним из этих взаимно исключающихся элементарных событий.

Определение 1.1.2.1 *Элементарным событием* ω называется любой мыслимо возможный исход эксперимента.

Совокупность всех элементарных событий ω образуют множество Ω.

Определение 1.1.2.2 *Пространством элементарных событий*, которые отвечают эксперименту E, называется множество Ω всех его мыслимо взаимоисключающих исходов эксперимента.

Определение 1.1.2.3 *Событием* называется любое подмножество пространства элементарных событий.

Определение 1.1.2.4 *Достоверным событием* называется событие, которое совпадает с пространством элементарных событий.

Определение 1.1.2.5 *Невозможным событием* называется событие, которое совпадает с пустым множеством.

Математическая формализация модели случайного эксперимента включает в себя:

1) построение множества элементарных исходов Ω;

2) описание поля событий для данного эксперимента;

3) задание вероятностного распределения на поле событий.

Построение Ω осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного эксперимента могли быть однозначно описаны на основе построенного множества. Совокупность всех наблюдаемых событий составляет поле событий для данного эксперимента.

Так как Ω отождествляется с множеством, то над событием можно совершать все операции, выполняемые над множествами. Рассмотрим основные операции над событиями.

Определение 1.1.2.6 *Противоположным событием* к событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее из всех элементарных исходов, которые не входят в событие A, то есть событие $\overline{A}=\{\omega | \omega \notin A\}$.

Определение 1.1.2.7 *Суммой двух событий* A и B называется событие $A+B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат первому событию A или второму событию B, то есть событие $A+B=\{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$.

Определение 1.1.2.8 *Произведением двух событий* A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и событию B, одновременно, то есть событие $A \cdot B=\{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Определение 1.1.2.9 События называются A и B *несовместными*, если в результате эксперимента их произведение дает невозможное событие. В противном случае события называются совместными.

Определение 1.1.2.10 *Разностью двух событий* A и B называется событие $A \setminus B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и не принадлежат событию B, то есть событие $A \setminus B=\{\omega | \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.

Определение 1.1.2.11 Класс событий F называется *алгеброй событий*, если выполняются следующие два условия:

1) $\Omega \in F$;

2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат *F*.

Определение 1.1.2.12 Класс событий F называется σ – *алгеброй событий*, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in F$;

2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат *F*;

3) если каждое событие A_k конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, ...$ принадлежит классу *F*, то и сумма этих событий принадлежит этому классу.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков не превосходит 5, B – событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала 1. Составить пространство элементарных событий Ω, связанное с данным опытом, и описать события: $A \cdot B$, $A + B$, $A \setminus B$.

Решение. Пространство элементарных событий, связанное с данным опытом, состоит из конечного числа элементарных событий: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots\dots, (2,1), (2,2), ..., (6,6)\}$. Опишем все события, которые отвечают проводимому опыту:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\};$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\};$$

$$A \cdot B = \{(1,1), (1,2), (1,3), 1,4), (2,1), (3,1), (4,1)\};$$

$$A + B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(5,1),(6,1)\};$$

$$A \setminus B = \{(2,2), (2,3), (3,2)\}.$$

1.2.2 Персональный менеджер обслуживает трёх клиентов. Событие *A* – первый клиент обратится к менеджеру в течение суток, *B* – второй клиент обратится к менеджеру в течение суток, *C* – третий клиент обратится к менеджеру в течение суток. Что означают события: а) $A + B + C$; б) ABC; в) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + +AB\overline{C}$; г) $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$; д) $A + B + C - ABC$; е) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Решение. Опишем указанные события:

а) $A + B + C$={хотя бы один клиент обратится к менеджеру в течение суток};

б) ABC={все три клиента обратятся к менеджеру в течение суток};

в) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$={два клиента обратятся к менеджеру в течение суток};

г) $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$={один клиент обратится к менеджеру в течение суток};

д) $A + B + C - ABC$={не менее одного, но не более двух клиентов обратятся к менеджеру в течение суток};

е) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$={ни один клиент не обратился к своему менеджеру в течение суток}.

1.2.3 Игральная кость подбрасывается два раза. Найти общее число исходов эксперимента.

Решение. Исход опыта состоит в выборе одного числа из шести $\{1,2,...,6\}$, два раза. По формуле (1.1.1.1), находим число исходов опыта: $N = 6 \cdot 6 = 36$.

1.2.4 Сколькими способами можно рассадить пять человек за столом?

Решение. Воспользуемся формулой (1.1.1.2). Требуется расположить пять человек на пять мест: $N = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

1.2.5 Сколько можно составить различных расписаний отправления автобусов на различные дни недели, если необходимо, чтобы: 3 дня отправлялось по 2 автобуса в день, 2 дня – по 1 автобусу в день, 2 дня – по 3 автобуса в день?

Решение. Количество автобусов, отправляемых в день (числа 1, 2, 3), – это три группы одинаковых элементов, из которых составляется выборка. При этом в расписании на неделю число 1 повторяется 2 раза, число 2 повторяется 3 раза, а число 3 повторяется 2 раза. Тогда число различных расписаний (формула 1.1.1.3) равно $N = \overline{P}_n = P_7(2,3,2) = \dfrac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

1.2.6 Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр (могут быть все нули)?

Решение. Осуществляем выбор 6 цифр из 10 с учётом порядка. Число таких комбинаций (формула 1.1.1.4) равно $N = A_{10}^6 = \dfrac{10!}{(10-6)!} = \dfrac{10!}{4!} = 151200$.

1.2.7 Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 4 символа?

Решение. Так как используются четыре символа, то выборка содержит четыре элемента, которые могут повторяться. Таким образом, число различных выборок, каждая из которых представляет какую-нибудь букву, согласно формуле (1.1.1.5), равно $N = \overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

1.2.8 В кредитном отделе банка работают 6 человек с высшей категорией и 4 – с первой. Сколькими способами из отдела на общее собрание можно отправить 5 человек, из которых три имеют высшую категорию?

Решение. Исход опыта состоит в выборе трёх человек из шести, которые имеют высшую категорию, и двух человек из четырёх, которые имеют первую категорию, причём порядок здесь не имеет значения. Следовательно, общее число различных выборок определяем по формуле (1.1.1.6): $N = C_6^3 \cdot C_4^2 = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} \times \times \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

1.2.9 В библиотеке имеются книги по 25 разделам науки. Сколькими способами можно выполнить 5 заказов на литературу?

Решение. Число всех исходов эксперимента равно числу сочетаний с повторениями из 25 элементов по 5 (формула 1.1.1.7), то есть

$$N = \overline{C}_{25}^{5} = C_{25+5-1}^{5} =$$
$$= C_{29}^{5} = \frac{29!}{5!\cdot(29-5)!} = \frac{29!}{5!\cdot 24!} = \frac{25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 5\cdot 13\cdot 9\cdot 7\cdot 29 = 118755.$$

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Относительно событий, которые указаны в каждой из задач, определить, образуют ли они полную группу событий. Являются ли в данном эксперименте события несовместными и равновозможными?

1. Эксперимент – бросание монеты; события: $A_1 = \{$выпал герб$\}$; $A_2 = \{$выпала решка$\}$.
2. Эксперимент – бросание двух монет; события: $B_1 = \{$выпало два герба$\}$; $B_2 = \{$выпали две решки$\}$.
3. Эксперимент – бросание двух игральных костей; события: C_1={на одной из костей выпала четвёрка, на другой – нет}; $C_2 = \{$на обеих костях выпала четвёрка$\}$; $C_3 = \{$четвёрка не выпала ни на одной из костей$\}$.
4. Эксперимент – передача двух сигналов по каналу связи; события: $D_1 = \{$хотя бы один сигнал искажён$\}$; $D_2 = \{$хотя бы один сигнал не искажён$\}$.
5. Эксперимент – извлечение двух карт из колоды; E_1={обе карты чёрной масти}; $E_2 = \{$среди вынутых карт есть король пик$\}$; $E_3 = \{$среди вынутых карт есть шестёрка треф$\}$.
6. Эксперимент – бросание двух монет; события: $B_1 = \{$выпало два герба$\}$; $B_2 = \{$выпали две решки$\}$, $B_3 = \{$выпали один герб и одна решка$\}$.
7. Эксперимент – выстрел по мишени; события: $F_1 = \{$попадание$\}$; $B_2 = \{$промах$\}$.

1.3.2 Событие A – хотя бы одно из четырёх изделий бракованное, B – все четыре изделия доброкачественные. Что означает событие: а) $A+B$; б) $A\cdot B$.

1.3.3 Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков не превосходит 8, B – произведение числа очков на двух костях, не менее 10.

1.3.4 Контактная схема, состоящая из трёх элементов a, b и c, построена согласно логической формуле $a \vee (b \wedge c)$. Выход из строя элемента a представляет собой событие A, элемента b – событие B, элемента c – событие C. Составить пространство элементарных событий Ω, связанное с данным экспериментом. Записать выражение для D и $\overline{D}$, если D означает разрыв цепи.

1.3.5 На предприятии имеются три склада готовой продукции. Событие A – в течение суток товар отгружается с первого склада, B – в течение суток товар отгружается со второго склада, C – в течение суток товар отгружается с третьего склада. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) в течение суток товар отгружали со всех трёх складов; б) в течение суток товар отгружали хотя бы с одного склада; в) в течение суток товар отгружали хотя бы с двух складов; г) в течение суток товар отгружали ровно с двух складов; д) в течение суток товар отгружали ровно с одного склада; е) в течение суток товар был не отгружен со складов.

1.3.6 Сколькими способами можно расставить 4 книги на полке?

1.3.7 Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?

1.3.8 Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если все цифры номера различны?

1.3.9 На железнодорожной станции имеется 9 путей. Сколькими способами можно расставить на них 5 составов?

1.3.10 В колоде 36 карт. Сколькими способами можно сдать 6 карт так, чтобы среди них оказалось два короля?

1.3.11 Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

1.3.12 Сколько различных комбинаций букв можно получить из слова «СТАТИСТИКА»?

1.3.13 На книжной полке стоит собрание сочинений в 10 томах. Сколькими различными способами их можно переставить, чтобы: а) тома 1 и 2 стояли рядом; б) тома 9 и 10 рядом не стояли?

1.3.14 Сколькими различными способами могут сесть 5 человек за стол?

1.3.15 Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать пять символов?

1.3.16 В теннисном турнире участвуют 12 мужчин и 10 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

1.3.17 В аудитории находятся 15 студентов, из которых 5 юношей. Сколько различных групп по пять человек можно составить из студентов, чтобы в группе оказалось ровно 2 юноши?

1.3.18 На складах предприятия находятся 16 видов продукции. Сколькими способами можно сделать 4 заказа на продукцию предприятия?

1.3.19 Номер автомобиля состоит из четырех цифр и трёх букв. Сколько всего существует различных номеров, если используются 26 букв латинского алфавита?

1.3.20 При игре в бридж между четырьмя игроками распределяется колода в 52 карты по 13 карт каждому. Сколько существует способов раздать карты?

1.3.21 Сколько существует таких перестановок восьми студентов, при которых 3 определённых студента находятся рядом друг с другом?

1.3.22 Сколько существует таких перестановок 13 карт одной масти, при которых между картой двойка и туз окажутся ровно три другие карты?

1.3.23 Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр $1; 1; 1; 2; 2$?

1.3.24 В почтовом отделении имеются открытки 12 видов. Сколькими способами можно купить в нем: а) 6 открыток, б) 6 различных открыток?

1.3.25 После победы в матче по футболу все 11 игроков команды обменялись друг с другом рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

1.3.26 На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

1.4.1.1 Переплётчик должен переплести 15 различных книг в синий, зеленый и красный переплёт. Сколькими способами он может это сделать?

1.4.1.2 Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры не повторяются?

1.4.1.3 Сколько различных комбинаций букв можно получить из букв слова «АБРАКАДАБРА»?

1.4.1.4 Сколько трёхкнопочных комбинаций существует на кодовом замке из 10 цифр, если все три кнопки нажимаются одновременно?

1.4.1.5 В кондитерском магазине продаются пять видов пирожных. Сколькими способами можно купить девять пирожных?

1.4.1.6 Сколькими способами четыре юноши могут пригласить четверых из шести девушек на танец?

1.4.1.7 Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

1.4.1.8 Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

1.4.1.9 Восемнадцати студентам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить студентов в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был одинаковый вариант?

1.4.1.10 Сколькими способами при бросании 12 игральных костей каждое из значений 1,2, 3, 4, 5 выпадет дважды?

1.4.1.11 У одного студента имеется 5 книг по экономике, а второго – восемь. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

1.4.1.12 Лифт с шестью пассажирами останавливается на 11 этажах. Каждый пассажир может равновозможно выйти на любом этаже. Сколько может быть различных вариантов освобождения лифта?

1.4.1.13 В железнодорожном вагоне имеется 9 купе. Сколькими способами можно рассадить в вагон 6 пассажиров, чтобы они ехали в различных купе?

1.4.1.14 Клавиатура содержит 45 клавиш. Определить число попыток, необходимых для того, чтобы напечатать строку из 30 знаков, не имеющих повторений. Расположение клавиш на клавиатуре для пользователя не известно.

1.4.1.15 На шахматную доску ставятся две ладьи – белая и чёрная. Сколькими способами можно их расставить, чтобы они не смогли сбить друг друга?

1.4.1.16 Сколько шестибуквенных слов можно образовать из слова «КОРОНА» так, чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

1.4.1.17 Сколько различных комбинаций букв можно получить из слова «РЕФРИЖЕРАТОР»?

1.4.1.18 При игре в домино четыре игрока делят поровну между собой 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

1.4.1.19 Сколько различных букетов по 7 цветков в каждом можно составить, используя цветы 5 имеющихся видов?

1.4.1.20 В лотереи разыгрывается 20 билетов, из которых 8 являются выигрышными. Сколькими способами участник лотереи из четырёх билетов достанет хотя бы один выигрышный?

1.4.1.21 Сколько существует различных шестизначных номерных знаков автомобиля, который содержит две буквы из алфавита в 26 буквы и 4 цифры?

1.4.1.22 Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы ни одна из них не могла сбить друг друга? Каждая из ладей может сбить другую ладью по обычным правилам шахмат.

1.4.1.23 На полке стоят 24 книги, причём 21 книга – разных авторов, а три книги – одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

1.4.1.24 Сколько различных испытаний могут привести к 52 выпадениям герба при 100 подбрасывании монеты? Испытанием считается серия опытов из 100 подбрасываний. Два испытания считаются различными, если не совпадают результаты хотя бы двух подбрасываний?

1.4.1.25 Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы одна восьмёрка?

1.4.1.26 Сколько различных наборов по 9 мороженых в каждом можно составить, используя 5 видов мороженых?

1.4.1.27 Сколькими способами можно распределить 8 операторов по пяти перенумерованным приборам, которые они могут обслуживать?

1.4.1.28 Сколькими способами можно распределить 5 телеграмм по 8 каналам связи?

1.4.1.29 На одной книжной полке стоят 6 книг, а на второй – 12. Сколькими способами можно выбрать две книги, одну с первой полки, а вторую – со второй полки?

1.4.1.30 Сколько различных браслетов можно сделать из 6 одинаковых изумрудов, 5 одинаковых рубинов и 4 одинаковых сапфиров (в браслет входят все 15 камней)?

2 КЛАССИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Содержание: аксиоматическое определение вероятностей, классическое определение вероятностей, вычисление вероятностей элементарных событий.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

2.1.1 Аксиоматическое определение вероятностей

Пусть пространство элементарных событий Ω есть произвольное множество. Выделим систему подмножеств множества Ω, которое образует $\sigma-$ алгебру событий F. Если определено множество Ω и $\sigma-$ алгебра его подмножеств, то говорят, что построено измеримое пространство (Ω, F).

Определим на измеримом пространстве (Ω, F) числовую функцию (*вероятностную меру*) $\mu(A)$ для измерения объективной возможности наступления события $A \in F$ таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

1) $\mu(A) \geq 0$;
2) $\mu(\Omega) = 1$;
3) $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$;
4) $\mu\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Определение 2.1.1.1 *Вероятностью* на измеримом пространстве (Ω, F) называется числовая функция P, которая определена на множестве из алгебры событий F и удовлетворяет аксиомам Колмогорова:

1) для любого события $A \in F$ справедливо неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) для любого конечного или счётного множества попарно несовместных событий $A_i \in F$ справедливо равенство $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Определение 2.1.1.2 Пространство элементарных событий Ω с выделенной в нём $\sigma-$ алгеброй событий F и определённой на измеримом пространстве (Ω, F) вероятностью $P(A)$, где $A \in F$ называется *вероятностным пространством* (Ω, F, P).

2.1.2 Классическое определение вероятностей

Несколько событий $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то есть их сумма есть достоверное событие или в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий с помощью вероятностей элементарных событий. Но при этом вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий не рассматривается. Дадим классическое определение вероятности.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ пространство элементарных событий с конечным числом исходов n. Так как, элементарные события образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$. Вследствие того, что элементарные события несовместны, то по аксиоме (3),сложения вероятностей получаем следующее равенство:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1.$$

Так как элементарные исходы равновозможные, то вероятность наступления каждого из них одна и та же, а именно $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$. Пусть событие $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$ содержит m элементарных исходов. Следовательно, по аксиоме сложения вероятностей, имеем:

$$P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Определение 2.1.2.1 (классическое определение вероятностей) Если все элементарные события ω_i равновозможные, то вероятность наступления любого события $A \in F$ равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу всех элементарных исходов.

Согласно классическому определению вероятностей получаем формулу вычисления вероятностей элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (2.1.2.1)$$

где n – общее число исходов эксперимента, а m – число исходов эксперимента, благоприятствующих данному событию.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 В студенческой группе, состоящей из 24 студентов, шесть студентов занимаются научной деятельностью. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент группы занимается научной деятельностью?

Решение. Рассмотрим событие: A={наудачу выбранный студент, из 24 студентов группы, занимается научной деятельностью}. Исход опыта состоит в выборе одного студента из 24 студентов группы. Одного студента из 24 выбираем $n = 24$ способами. Благоприятный исход состоит в выборе одного студента, который занимается научной деятельностью, из шести студентов, занимающихся этим видом деятельности. Одного студента из шести студентов, которые занимаются научной деятельностью, выбираем $m = 6$ способами. Тогда, согласно классическому определению вероятностей, вероятность исходного события равна: $P(A) = m/n = 6/24 = 1/4 = 0,25$.

2.2.2 Бросают две игральные кости. Какое событие более вероятно: сумма очков на выпавших гранях равна 10 (событие A) или сумма очков на выпавших гранях равна 6 (событие B)?

Решение. Исход эксперимента: выбор одной цифры из 6, при первом бросании кости, и выбор одной цифры из шести, при втором бросании кости $(n = 6 \cdot 6 = 36)$. Благоприятный исход событию A: выбор одной пары из трёх возможных пар $(4;6)$, $(5;5)$ и $(6;4)$. Число таких исходов равно $m_A = 3$. Тогда вероятность наступления события A равна: $P(A) = m_A/n = 3/36 = 1/12 = 0,08(3)$. Благоприятный исход событию B: выбор одной пары из четырёх возможных пар $(1;5)$, $(2;4)$, $(3;3)$, $(4;2)$ и $(5;1)$. Число таких исходов равно $m_B = 5$. Тогда вероятность наступления события B равна $P(B) = m_B/n = 5/36 = 0,13(8)$. Так как, $P(B) = 0,13(8) > P(A) = 0,08(3)$, то событие B более вероятно.

2.2.3 Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд карточек, на которых написаны буквы а, а, а, н, н, с, получается слово ананас?

Решение. Рассмотрим событие $A =$ {из шести букв (а, а, а, н, н, с), может быть составлено слово ананас}. Исход эксперимента: расположение 6 карточек на 6 мест в ряд $(n = P_6 = 6!)$. Благоприятный исход эксперимента: расположение трёх карточек с буквой «а» на три места и расположение двух карточек с буквой «н» на два места, и расположение одной карточки с буквой «с» на одно место $(m = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 = 3! \cdot 2! \cdot 1!)$. Тогда вероятность заданного события равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 1!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{120} \approx 0,0083.$$

2.2.4 Из 20 строительных рабочих 12 – штукатуры, а 8 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 6 рабочих. Какова вероятность того, что среди них 4 штукатура и 2 маляра?

Решение. Событие $A=${в бригаде из 6 человек присутствуют 4 штукатура и 2 маляра}. Исход эксперимента: осуществляем выбор 6 рабочих из $20\left(n=C_{20}^{6}\right)$. Благоприятный исход эксперимента: осуществляем выбор четырёх штукатуров из 12 штукатуров и двух маляров из 8 имеющихся маляров$\left(m=C_{12}^{4}\cdot C_{8}^{2}\right)$. В данном эксперименте выбор рабочих осуществляется без повторений и не учитывается порядок выбора рабочих. Находим вероятность того, что в бригаде из шести рабочих окажется 4 штукатура и два маляра:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{12}^{4}\cdot C_{8}^{2}}{C_{20}^{6}}=\frac{\dfrac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\dfrac{8!}{2!\cdot 6!}}{\dfrac{20!}{6!\cdot 14!}}=\frac{\dfrac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\dfrac{7\cdot 8}{1\cdot 2}}{\dfrac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}=\frac{9\cdot 5\cdot 11\cdot 7\cdot 4}{15\cdot 8\cdot 17\cdot 19}\approx 0{,}36.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря не високосного года соответствует первому числу месяца?

2.3.2 Найти вероятность того, что наудачу выбранное число от единицы до двадцати четырёх окажется делителем числа двадцать четыре?

2.3.3 Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число делится на 5?

2.3.4 Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков чётная; B – событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной кости выпала 5; C – событие, состоящее в том, что сумма числа очков не менее 8; D – событие, заключающее в том, что произведение числа очков не менее 7. Найти вероятности указанных событий.

2.3.5 Бросают три игральных кости, подсчитывается сумма очков, которые выпали на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 6 или 7 очков?

2.3.6 В урне 6 белых и 9 жёлтых шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

2.3.7 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белый.

2.3.8 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

2.3.9 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.

2.3.10 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар за другим, кроме одного и не глядя откладывают в сторону. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

2.3.11 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны не глядя вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что третьим был вынут белый шар.

2.3.12 В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность того, что три из них будут белыми, а два – чёрными.

2.3.13 В кредитный отдел банка поступило 15 кредитных заявок, из которых 5 не одобрено отделом безопасности банка. Найти вероятность того, что при случайной проверке 6 заявок две оказались одобренные банком, а 4 – нет.

2.3.14 Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 6 студентов. Какова вероятность того, что будут выбраны по два студента с каждого курса?

2.3.15 В розыгрыше первенства по футболу участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 8 команд в каждой. Среди участников первенства имеется 4 команды высокого класса. Найти вероятность следующих событий: $A = \{$все команды высокого класса попадут в одну и ту же группу$\}$; $B = \{$три команды высокого класса попадут в одну группу, а одна – в другую$\}$.

2.3.16 Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу несколько карт. Сколько карт необходимо вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей 0,4, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

2.3.17 Некоторый человек купил карточку лотереи и отметил в ней 6 из имеющихся 36 номеров, после чего в тираже разыгрывается 6 «выигравших» номеров. Найти вероятность следующих событий: $A_3 = \{$верно угаданы 3 выигравших номера из 6$\}$; $A_4 = \{$верно угаданы 4 номера из 6$\}$; $A_5 = \{$верно угаданы 5 номеров из 6$\}$; $A_6 = \{$верно угаданы все 6 номеров$\}$.

2.3.18 На десяти карточках написаны буквы: $\{А, А, Т, Т, Т, С, С, И, И, К\}$. После перестановки карточек, вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из карточек получится слово «*СТАТИСТИКА*».

2.3.19 На семи карточках написаны буквы: $\{О, О, О, Т, Л, М, К\}$. После перестановки карточек, вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из карточек получится слово «*МОЛОТОК*».

2.3.20 Известно, что при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первом бросании?

2.3.21 В партии из 200 радиоприёмников, отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных. Найти относительную частоту бракованных радиоприёмников в партии.

2.3.22 При стрельбе по заданной цели частота попаданий равна $W = 0,4$. Найти общее число выстрелов по заданной цели, если получено 18 попаданий.

2.3.23 Найдите частоту появления герба при 10 подбрасываниях симметричной монеты.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

2.4.1.1 Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма числа очков не превосходит 5.

2.4.1.2 В ящике имеется 16 деталей, шесть из которых окрашены. Наугад достаём 6 деталей. Найти вероятность того, что четыре из них окрашены, а две – нет.

2.4.1.3 В урне 10 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность достать из урны чёрный шар?

2.4.1.4 В партии из 10 деталей 7 являются стандартными. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу 5 изделий два изделия стандартны?

2.4.1.5 Монету бросают три раза. Какова вероятность того, что все три раза выпала цифра?

2.4.1.6 Какова вероятность выигрыша в лотереи (угадать 3 номера из 45)?

2.4.1.7 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение числа очков на обеих костях не превосходят 8?

2.4.1.8 На книжной полке находятся 6 книг по менеджменту и 8 книг по маркетингу. Какова вероятность того, что книги по каждой дисциплине стоят рядом?

2.4.1.9 Какова вероятность получения одного туза при сдаче шести карт из колоды в 52 карты?

2.4.1.10 При перевозке 30 деталей, из которых 7 были забракованы, утеряна одна стандартная деталь. Найти вероятность того, что после этого наудачу извлечённая деталь оказалась стандартной?

2.4.1.11 В соревнованиях по баскетболу участвуют 12 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 6 команд. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

2.4.1.12 Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд десяти карточек с буквами А, А, А, М, М, Т, Т, К, И, Е, получится слово «МАТЕМАТИКА»?

2.4.1.13 Имеются 8 билетов в театр, 5 из которых на места из первого ряда. Какова вероятность того, что из трёх наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

2.4.1.14 Имеются 7 изделий первого сорта, 8 изделий второго сорта, 5 изделий третьего сорта и 6 изделий четвёртого сорта. Для контроля наудачу берут 10 изделий. Найти вероятность того, что среди них 2 изделия первого сорта, 3 – второго, 4 – третьего и одно изделие четвёртого сорта.

2.4.1.15 Среди 12 лотерейных билетов 7 выигрышных. Наудачу выбрали 5 билетов. Определить вероятность того, что среди них 3 выигрышных.

2.4.1.16 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение числа очков на обеих костях делится на 4?

2.4.1.17 Из партии, содержащей 14 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно изделие бракованное.

2.4.1.18 Бросается 8 игральных костей. Найти вероятность того, что выпадут три единицы, три тройки и две пятёрки.

2.4.1.19 В шахматном турнире участвуют 8 гроссмейстеров, 5 международных мастеров и 7 мастеров. Соперники для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяется путём жеребьёвки. Найти вероятность того, что за столиком № 1 встретятся между собой шахматисты одной и той же категории.

2.4.1.20 На складе хранится 1000 аккумуляторов. Известно, что после года хранения 40 штук выходит из строя. После шести месяцев хранения было изъято 12 аккумуляторов, ставших неисправными. Найти вероятность того, что наугад взятый после года хранения аккумулятор окажется исправным.

2.4.1.21 Среди 24 студентов группы, в которой 13 юношей, разыгрывается пять билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется три девушки.

2.4.1.22 Группа состоит из пяти мужчин и десяти женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке по три человека в каждой группе будет мужчина.

2.4.1.23 Какова вероятность выигрыша в лотереи (угадать 4 номера из 49)?

2.4.1.24 В урне 12 зелёных и 8 синих шаров. Из урны достаём 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно 2 синих шара?

2.4.1.25 Из шести карточек с буквами А, Б, В, Г, Д, Е наугад одну за другой выбирают три карточки и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «ЕДА»?

2.4.1.26 Наудачу называется одна из 10 цифр. Какова вероятность того, что она является корнем уравнения $x^3 - 10x^2 + 21x = 0$?

2.4.1.27 В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров, семь из которых нуждаются в общей настройке. Мастер берёт любые 7 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей настройке?

2.4.1.28 Наудачу называется трёхзначное натуральное число. Какова вероятность того, что последовательность цифр этого числа возрастает?

2.4.1.29 На десяти карточках написаны различные цифры (на каждой карточке одна цифра). Найти вероятность того, что случайно составленное с помощью этих карточек двузначное число делится на 12.

2.4.1.30 В группе спортсменов 8 конькобежцев и 12 лыжников. Найти вероятность того, что среди случайно выбранных пяти человек ровно три лыжника.

3 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Содержание: классический (лапласовский) метод задания вероятностей, геометрический метод задания вероятностей, статистический метод задания вероятностей, метод экспертных оценок.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

3.1.1 Классический (лапласовский) метод задания вероятностей

Теоретический материал по данному вопросу рассмотрен в предыдущем параграфе.

3.1.2 Геометрическое определение вероятностей

Пусть пространство Ω эксперимента E содержит несчётное множество элементарных событий ω. Предположим, что элементарные события можно трактовать, как координаты точки в пространстве $\square^{n}$, а события, как некоторые области этого пространства. Пусть Ω, а, следовательно, и событие $A \subseteq F$ имеют конечную геометрическую меру: $\square^{1}$ – длина, $\square^{2}$ – площадь, $\square^{3}$ – объём.

Геометрические меры множеств $A \subseteq F$ можно принять за вероятностные меры этих множеств. Необходимо только, чтобы геометрические меры удовлетворяли аксиомам Колмогорова. Для этого геометрические меры нормируют, то есть принимают геометрическую меру Ω за единицу, а вероятностная мера события $A \subseteq F$ будет пропорциональна мере области A. Тогда

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{мера области } A}{\text{мера области } \Omega}.$$

3.1.3 Статистическое определение вероятностей

Часто не всегда известно число элементарных событий пространства элементарных событий Ω, которые необходимы при классическом методе задании вероятности. Также не всегда известны геометрические меры множеств, которые необходимы для геометрического метода задания вероятностей. Статистический метод задания вероятностей не требует знания задания этих величин.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, которое отвечает условиям эксперимента E. Если эксперимент продублировать n раз при одних и тех же условиях S, то относительная частота появления события A определяется по формуле $W(A) = \dfrac{m}{n}$. Тогда относительную частоту принимают за оценку вероятности появления события A: $P(A) = P(A|S) \approx W(A|S) = \dfrac{m}{n}$. Таким образом, статистический метод задания вероятностей состоит в том, что в качестве оценки вероятностей появления события $A \subseteq F$ принимаем с некоторой точностью ε относительную частоту появления этого события: $P(A) = W(A) + \varepsilon$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Рассмотрим множество, составленное из первых десяти букв русского алфавита. Выбираем из этого множества 4 буквы без возвращения и записываем слово в порядке поступления букв. Найти вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой а?

Решение. Рассмотрим событие $A = \{$наудачу составленное четырёхбуквенное слово из алфавита в 10 букв будет оканчиваться буквой а$\}$. Исход эксперимента: осуществляем выбор 4-х различных букв из десяти буквенного алфавита без возращения. Это можно сделать $n = A_{10}^4$ способами. Благоприятный исход эксперимента: размещение на последнее место в четырёхбуквенном слове единственной буквы «а» и размещение на три оставшихся места по одному символу из 9 (символ «а» исключён из рассмотрения). Число благоприятных исходов опыта равно $m = A_9^3 \cdot 1 = A_9^3$. Находим вероятность заданного события.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{9!/(9-3)!}{10!/(10-4)!} = \frac{9!\cdot 6!}{10!\cdot 6!} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

3.2.2 Четыре телеграммы случайным образом распределяются по 6 каналам связи. Найти вероятность того, что на каждый канал придётся не больше одной телеграммы.

Решение. Событие $A = \{$на каждый из 6-и каналов придётся не более одной телеграммы$\}$. Исход опыта: выбор одного канала связи из шести для каждой из 4 телеграмм. Число исходов опыта равно $n = 6^4$. Благоприятный исход опыта: выбор четырёх каналов связи из 6 возможных, и распределение каждой из 4-х телеграмм на 4 выбранных канала связи. Число благоприятных исходов опыта равно $m = C_6^4 \cdot 4!$. Вероятность исходного события равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^4\cdot 4!}{6^4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{6^4}=\frac{3\cdot 5\cdot 4\cdot 6}{6^4}=\frac{5\cdot 2}{6^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}\approx 0,278.$$

3.2.3 В библиотеке имеются книги по 18 разделам экономических дисциплин. Студент делает 5 заказов на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A=\{$заказаны книги из одного и того же раздела$\}$, $B=\{$заказаны книги из различных разделов$\}$.

Решение. Исход опыта: выполнить с повторением 5 заказов на литературу из имеющихся 18 разделов $\left(n=\overline{C}_{18}^5=C_{18+5-1}^5=C_{22}^5\right)$. Благоприятный исход эксперимента для события A: выбрать один раздел из 18 возможных $\left(m_A=C_{18}^1\right)$. Тогда вероятность того, что будут заказаны книги из одного и того же раздела, равна

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{C_{18}^1}{C_{22}^5}=\frac{18!/1!\cdot 17!}{22!/5!\cdot 17!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}=\frac{1}{19\cdot 7\cdot 11}=\frac{1}{1463}\approx 0,00068.$$

Благоприятный исход эксперимента для события B: выбрать 5 различных разделов без возвращения из 18 возможных разделов $\left(m_A=C_{18}^5\right)$. Тогда вероятность того, что будут заказаны книги из различных разделов, равна

$$P(A)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_{18}^5}{C_{22}^5}=\frac{18!/5!\cdot 13!}{22!/5!\cdot 17!}=\frac{14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{18\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}=\frac{4\cdot 17}{19\cdot 11}=\frac{68}{209}\approx 0,325.$$

3.2.4 В купе вагона находятся 4 пассажира. Каждый из них с равной вероятностью выходит на одной из восьми станций. Какова вероятность того, что на одной из станций выйдут три пассажира, а один на какой-то другой?

Решение. Событие $A=\{$на одной из станций выйдут три пассажира из четырёх, а один на какой-то другой станции$\}$. Исход эксперимента: выбор каждым пассажиром одной станции из 8 имеющихся станций $\left(n=8^4\right)$. Благоприятный исход опыта: выбор одной станции из 8 и выбор второй станции из 7, и выбор трёх пассажиров из четырёх, и выбор одного пассажира из одного $\left(m=8\cdot 7\cdot C_4^3\cdot 1\right)$. Вероятность исходного события равна

$$P(A)=\frac{8\cdot 7\cdot C_4^3}{8^4}\approx 0,055.$$

3.2.5 Имеется 13 игральных карт одной масти от «двойки» до «туза». Карты раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между картами «двойка» и «туз» будут находиться ровно четыре другие карты?

Решение. Событие $A = \{$между картами «двойка» и «туз» находятся ровно четыре другие карты$\}$. Исход опыта: расположение 13 карт на 13 мест $(n = 13!)$.

Благоприятный исход эксперимента: расположение карты «двойка» на шестое, седьмое или восьмое место ряда, и карты «туз» на два возможных при этом места, или расположение карты «двойка» на оставшиеся десять мест и карты «туз» на одно возможное при этом место, и расположение оставшихся 11 карт на любое из 11 свободных мест $\left(m = (3 \cdot 2 + 10 \cdot 1) \cdot 11! = 16 \cdot 11!\right)$.

Вероятность заданного события равна $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{16 \cdot 11!}{13!} = \dfrac{4}{39} \approx 0{,}103$.

3.2.6 На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата 6 см наудачу бросается монета радиуса 2 см. Найти вероятность того, что при случайном бросании монеты на бесконечную шахматную доску монета попадёт целиком внутрь одного квадрата.

Решение. Пусть $(x; y)$ – координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата, записываем множество элементарных исходов пространства элементарных событий, которое соответствует данному эксперименту: $\Omega = \left\{(x; y) \middle| 0 \le x \le 6,\, 0 \le y \le 6\right\}$. Множество элементарных исходов, которые соответствуют заданному событию A, имеет вид $A = \left\{(x; y) \middle| 2 \le x \le 4,\, 2 \le y \le 4\right\}$, то есть является квадратом со стороной 2 см. По формуле геометрической вероятности находим $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)} = \dfrac{2^2}{6^2} = \dfrac{1}{9}$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти вероятность того, что все студенты группы, состоящей из 25 человек, родились в разные дни года (считать, что все студенты группы родились в один и тот же не високосный год).

3.3.2 Телефонный номер состоит из шести цифр (номер может состоять из всех нулей). Найти вероятность того, что все цифры телефонного номера различны (событие A) и все цифры номера нечётные (событие B).

3.3.3 В студенческой столовой имеется десять видов пирожных. Студент выбил чек на 6 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что студент заказал: а) пирожные разных видов; б) пирожные одного вида; в) по два пирожных различных видов.

3.3.4 В почтовом отделении продаются открытки 20 видов. Очередному покупателю необходимо приобрести 14 поздравительных открыток. Считая, что любой набор поздравительных открыток равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A = \{$приобретены открытки различных видов$\}$, $B = \{$приобретены открытки одного вида$\}$.

3.3.5 Восемь человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

3.3.6 Та же задача, но стол прямоугольный, и 8 человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

3.3.7 На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, …, 9. Карточки раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 0 и 9 будут находиться ровно три другие карточки?

3.3.8 В лифт десятиэтажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на четвёртом этаже; в) на разных этажах.

3.3.9 В условии задачи 3.3.8 найти вероятность того, что на одном из этажей выйдут два пассажира, а на другом – три.

3.3.10 На остановке четыре пассажира. К остановке подходят пять микроавтобусов. Найти вероятность того, что пассажиры войдут: а) в разные микроавтобусы; б) в первый микроавтобус (все 4 пассажира); в) в один и тот же микроавтобус (все 4 пассажира).

3.3.11 Пятнадцать шаров размещают случайным образом в 6 лузах биллиардного стола. В каждую лузу можно поместить любое число шаров. Какова вероятность того, что в одной из луз будет 4 шара, в другой – 5, а в третьей – 6?

3.3.12 На один ряд, состоящим из девяти мест, случайным образом садятся девять студентов. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.

3.3.13 На отрезок единичной длины наудачу бросается материальная точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/7$.

3.3.14 В круг радиуса 16 см наудачу ставится материальная точка. Найти вероятность того, что она попадёт в одну из непересекающихся фигур, расположенных в круге, площади которых равны 2,6 и 8,4 см^2.

3.3.15 Два студента X и Y договорились встретиться в определённом месте между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждёт второго в течение 15 мин, после чего уходит. Найти вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равновозможно в течение указанного часа.

3.3.16 Стержень длины 1 произвольным образом разламывается на три части. Определить вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

3.3.17 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше 1, а их произведение не больше $3/16$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

3.4.1.1 На складе завода имеются 4 токарных и 8 фрезерных станков, которые случайным образом необходимо распределить в два цеха по 6 станков в каждый. Найти вероятность того, что: а) в одном из цехов окажутся все токарные станки; б) токарные станки будут расположены в разных цехах; в) ровно три токарных станка будут расположены в одном из цехов.

3.4.1.2 На номере двигателя «сбиты» четыре различные последние цифры. Найти вероятность верной записи номера двигателя, который состоит из 12 символов, причём все символы известны, кроме последних четырёх.

3.4.1.3 Восемь человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных человека окажутся рядом.

3.4.1.4 Из 16 команд, которые участвуют в розыгрыше первенства по футболу, случайным образом формируется две группы с одинаковым количеством команд в каждой. Среди участников первенства имеется 6 команд высокого класса. Найти вероятность того, что: а) ровно две команды высокого класса попадут в одну из групп; б) все команды высокого класса попадут в одну и ту же группу; в) команды высокого класса попадут в разные группы.

3.4.1.5 Телефонный номер состоит из пяти цифр. Абонент забыл номер телефона, но помнит, что все цифры номера различны. С какой вероятностью абонент может дозвониться до адресата с первого звонка?

3.4.1.6 Десять человек случайным образом рассаживаются за прямоугольным столом (люди рассаживаются случайно вдоль одной стороны стола). Найти вероятность того, что два фиксированных человека окажутся рядом.

3.4.1.7 В партии из 14 транзисторов исправными являются 8 транзисторов. Для определения неисправных транзисторов их случайным образом в равном количестве отдают двум радиотехникам. Найти вероятность того, что: а) все неисправные транзисторы окажутся у одного и того же радиотехника; б) два неисправных транзистора окажутся у одного радиотехника; в) неисправные транзисторы попадут к обоим радиотехникам.

3.4.1.8 В инструментальном ящике 7 перенумерованных тормозных колодок с номерами от 1 до 7. Из ящика 4 раза вынимают наугад по одной колодке, её номер записывается, и колодка возвращается обратно в ящик. Найти вероятность того, что все записанные номера на колодках будут различны.

3.4.1.9 В ящике содержатся 10 одинаково занумерованных конденсаторов, от 1 до 10. Найти вероятность того, что номера извлечённых конденсаторов появятся в убывающем порядке.

3.4.1.10 В ящике имеются 4 элемента 1-го типа, 6 элементов 2-го типа и 8 элементов 3-го типа. Наугад из ящика выбирают 8 элементов. Найти вероятность того, что: а) все выбранные элементы 3-го типа; б) среди выбранных элементов нет элементов 3-го типа; в) среди выбранных элементов присутствуют все элементы 2-го типа.

3.4.1.11 Пассажир сдал багаж в автоматическую камеру хранения, каждая ячейка которой имеет четырёхзначный номер. Пассажир набрал четыре различные цифры номера ячейки и записал их в блокнот. Найти вероятность того, что пассажир откроет ячейку с первого раза, если блокнот с номером ячейки утерян.
3.4.1.12 При испытании партии триодов относительная частота годных ламп оказалась равной 0,8. Найти число годных триодов, если всего было проверено 150 ламп.
3.4.1.13 Завод КПД производит в течение определённого периода времени 5 бетонных плит марки ФБС 9.4.6, 3 плиты марки ФБС 24.40.6 и 8 плит марки ФБС12.3.6. Произведена отгрузка 5 плит. Найти вероятность того, что: а) отгружены все плиты марки ФБС 9.4.6; б) отгружены все плиты марки ФБС 24.40.6; в) отгружены 2 бетонные плиты марки ФБС 9.4.6, 1 плита марки ФБС 24.40.6 и 2 плиты марки ФБС12.3.6.
3.4.1.14 В компьютерном классе установлено 13 пронумерованных компьютеров. Найти вероятность того, что группа студентов в количестве 11 человек займёт от второго до тринадцатого компьютерного места.
3.4.1.15 На десяти карточках написаны буквы Е, К, М, О, О, П, Р, Р, С, С. После перестановки вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из всех указанных десяти букв будет составлено слово из орфографического словаря.
3.4.1.16 Телевизионный завод в течение некоторого времени произвёл телевизоры трёх марок, при этом за указанный период произведено 14 телевизоров первой марки, 10 телевизоров второй марки и 5 телевизоров третьей марки. После проверки изготовленных телевизоров на качество 15 телевизоров отгружено на склад. Найти вероятность того, что: а) отгружены все телевизоры первой марки; б) отгружены 5 телевизоров первой марки, 7 телевизора второй марки и 3 телевизора третьей марки; в) отгружены все телевизоры второй и третьей марки.
3.4.1.17 В коробке имеется 6 занумерованных диодов с номерами 1, 2,…,6. Из коробки достаём 3 раза по одному диоду, его номер записываем, и диод обратно возвращаем в коробку. Диоды из коробки достаём случайным образом. Найти вероятность того, что все записанные номера различны.
3.4.1.18 Четверо стрелков ведут огонь по десяти мишеням. Каждый стрелок выбирает себе цель случайно и независимо от других стрелков. Найти вероятность того, что все стрелки будут стрелять по разным мишеням.
3.4.1.19 На оптовую базу поступила однотипная продукция с четырёх заводов. В этой партии имеется 6 изделий, изготовленных первым заводом, 8 изделий изготовлено вторым заводом, 7 и 9 изделий изготовлено третьим и четвёртыми заводами соответственно. Оптовая база отправляет 16 вышеуказанных изделий в магазины. Найти вероятность того, что: а) отправленные изделия изготовлены только третьим и четвёртыми заводами; б) в магазины отправлены все изделия второго и третьего завода; в) в магазины отправлены 2 изделия первого завода, 4 изделия второго завода, по 5 изделий третьего и четвёртого завода, соответственно.

3.4.1.20 Имеется 8 операторов и 10 пронумерованных приборов, которые они могут обслуживать. Каждый оператор выбирает случайным образом и с одинаковой вероятностью любой прибор. Один прибор может обслуживаться только одним оператором. Найти вероятность того, что будут выбраны для обслуживания приборы с номерами 1, 2,…, 8.

3.4.1.21 В лифт десятиэтажного дома на первом этаже вошли шесть человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на десятом этаже; в) на разных этажах.

3.4.1.22 В ящике находятся 3 транзистора марки 1КТ106, 4 транзистора марки 2Т208, 5 транзисторов марки ГТ404Б и 10 транзисторов марки КТ608А. Из ящика случайным образом берут 9 транзисторов. Найти вероятность того, что: а) выбраны все возможные транзисторы марок 1КТ106 и ГТ404Б; б) выбраны все транзисторы марки 2Т208 и марки ГТ404Б; в) выбран 1 транзистор марки 1КТ106, 2 транзистора марки 2Т208, 3 транзистора марки ГТ404Б и 3 транзистора марки КТ608А.

3.4.1.23 В отделение связи поступило 5 телеграмм, при этом имеется 5 каналов связи. Телеграммы случайным образом распределяются по каналам связи, причём каждая телеграмма может передаваться по любому каналу связи. Найти вероятность того, что на один из каналов попадут 4 телеграммы, на другой – одна телеграмма, а три оставшихся канала окажутся не загруженными.

3.4.1.24 В лифт двенадцатиэтажного дома на первом этаже вошли восемь человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на двенадцатом этаже; в) на разных этажах.

3.4.1.25 На базе имеются покрышки фирмы Pirelle пяти маркировок: четыре покрышки маркировки R13/65/195, 8 покрышек маркировки R15/60/205, 12 – R16/60/215, 4 – R17/50/230, 5 – R19/45/260. Некоторое предприятие сделало заказ на 22 покрышки. Найти вероятность того, что: а) сделан заказ на все покрышки маркировок R13/65/195, R15/60/205 и R16/60/215; б) сделан заказ на все возможные покрышки маркировок R16/60/215, R17/50/230 и R19/45/260; в) сделан заказ на 2 покрышки маркировки R13/65/195, 4 покрышки маркировки R15/60/205, 8 – R16/60/215, 4 – R17/50/230, 4 – R19/45/260.

3.4.1.26 «Секретный» замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделён на 6 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определённое пятизначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

3.4.1.27 В лифт пятнадцатиэтажного дома на первом этаже вошли семь человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что на одном из этажей выйдут четыре человека, а на другом – три.

3.4.1.28 В инструментальном ящике хранятся 8 рожковых ключей на 14 (под шестигранную гайку 14 мм), 10 рожковых ключа на 15, 7 рожковых ключей на

17, 6 рожковых ключей на 18 и 9 рожковых ключей на 19. Наугад достаём из инструментального ящика 24 рожковых ключей. Найти вероятность того, что: а) достали все возможные рожковых ключи на 15, 17 и 18; б) достали из ящика три рожковых ключа на 14, 5 – на 15, 4 – на 17, 5 – на 18 и 7 рожковых ключей на 19; в) достали все рожковые ключи на 14, 17 и 19.

3.4.1.29 На десяти карточках написаны цифры 0 до 9. Две из них вынимают наугад и укладывают в порядке появления, затем читают полученное число. Найти вероятность того, что число будет нечётным.

3.4.1.30 Девять человек рассаживаются в произвольном порядке за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица X и Y сядут рядом, причём человек Y будет сидеть справа от человека X.

3.4.2 Решить предложенную задачу своего варианта.

3.4.2.1 Шесть шариков случайно разбрасываются по 6 лункам. В одну лунку может попасть любое число шариков. Найти вероятность того, что в каждой лунке окажется по одному шарику.

3.4.2.2 В ящике содержатся 20 деталей, известно, что среди них 8 бракованных. Все 20 деталей случайным образом раскладывают в два новых ящика с одинаковым количеством деталей в каждый. Найти вероятность того, что: а) в одном из ящиков окажутся все бракованные детали; б) все бракованные детали будут находиться в разных ящиках; в) в одном из ящиков будет находиться ровно 5 бракованных деталей.

3.4.2.3 Имеется одиннадцать занумерованных шаров с номерами от 1 до 11. Шары случайным образом помещают в 11 луз, которые расположены вдоль одной стороны стола, по одному в каждую лузу. Какова вероятность того, что между шарами с номерами 5 и 7 будут находиться ровно четыре шара?

3.4.2.4 Номер компрессора состоит из 5 различных цифр. По накладной необходимо выбрать компрессор с конкретно указанным номером. Найти вероятность того, что номер случайно взятого компрессора совпадёт с номером в накладной.

3.4.2.5 На складе магазина имеются 10 телевизоров марки «Витязь» и 12 телевизоров марки «Горизонт», которые необходимо доставить в равном количестве в два торговых зала случайным образом (в торговых залах телевизоры этих марок отсутствуют). Найти вероятность того, что: а) три телевизора марки «Витязь» попадут в один из торговых залов; б) все телевизоры марки «Витязь» попадут в один и тот же торговый зал; в) телевизоры марки «Витязь» попадут в различные торговые залы в равном количестве.

3.4.2.6 Имеется девять диодов и двенадцать спичечных коробок. В каждый спичечный коробок можно поместить любое число диодов. Какова вероятность того, что в одном спичечном коробке окажется пять диодов, а в другом остальные диоды.

3.4.2.7 На полке лежат 8 перенумерованных головок блока цилиндра с номерами от 001 до 008. С полки 5 раз снимаем наугад по одной головке блока цилиндра, её номер записываем, и головку блока возвращаем обратно на полку.

Найти вероятность того, что все записанные номера на головке блока цилиндра будут различны.

3.4.2.8 В наличии имеется 12 макетов пирамид и 4 макета призм, которые необходимо расставить на двух пустых полках случайным образом и в равном количестве. Найти вероятность того, что: а) все призмы окажутся на одной и той же полке; б) ровно две призмы окажутся на одной из полок; в) призмы окажутся на разных полках.

3.4.2.9 Автобус, в котором находятся восемь пассажиров, делает остановки в пятнадцати населённых пунктах. Каждый из пассажиров выходит с равной вероятностью на любой из остановок. Найти вероятность того, что все восемь пассажиров сойдут на разных остановках.

3.4.2.10 Девять операторов обслуживают 12 пронумерованных компьютеров. Каждый оператор выбирает случайным образом и с одинаковой вероятностью любой компьютер. Один компьютер обслуживается только одним оператором. Найти вероятность того, что будут выбраны для обслуживания компьютеры с номерами 4, 5, 6,…, 12.

3.4.2.11 Завод КПД отгрузил 6 машин с бетоном марки М150, 10 машин марки М200 и 8 машин марки М300. В первый рейс с завода отправили 10 машин. Найти вероятность того, что: а) все машины с бетоном марки М300 отправлены первым рейсом; б) все отправленные машины загружены бетоном марки М200; в) ни одна машина, загруженная бетоном марки М200, не отправлена этим рейсом.

3.4.2.12 На бильярдном столе, с шестью лузами, находится 16 шаров. После удара одним из шаров по остальным пятнадцати шарам девять шаров залетели в лузы. Какова вероятность того, что в одну из луз попали четыре шара, в другую – три шара, в третью – два шара, в остальные лузы шары не попали.

3.4.2.13 Номера изделий в партии состоят из четырёх цифр, три из которых различны, а четвёртая совпадает с одной из них. Рабочий берёт наугад одно изделие из этой партии. Найти вероятность того, что выбранное рабочим наугад изделие будет иметь тот же номер, что и предложил ему мастер цеха.

3.4.2.14 В ящике имеется 12 диодов, 10 транзисторов и 14 резисторов. Произвольным образом выбираем 12 из перечисленных выше элементов. Найти вероятность того, что: а) выбраны все резисторы; б) выбраны 3 диода, 5 транзисторов и 4 резистора; в) выбраны все транзисторы.

3.4.2.15 Имеется пятнадцать занумерованных шаров с номерами от 1 до 15 и бильярдный стол, который переоборудован под 15 луз. После первого удара непронумерованным шаром все пронумерованные шары попали в лузы, по одному в каждую. Найти вероятность того, что между шарами с номерами 1 и 1 находятся ровно пять шаров.

3.4.2.16 Номера деталей в партии состоят из четырёх цифр, три из которых различны, а четвёртая совпадает с двумя из них. Учащийся берёт наугад одно изделие из этой партии. Найти вероятность того, что выбранное учащимся наугад изделие будет иметь тот же номер, что и предложил ему преподаватель.

3.4.2.17 Часовой завод в течение некоторого времени произвёл часы трёх типов. За указанный период произведено 9 часов первого типа, 4 часов второй типа и 12 часов третьего типа. После проверки изготовленных часов на качество, 13 часов отправлено в магазин. Найти вероятность того, что: а) в магазин отправили часы только первого и второго типа; б) в магазин отправили все часы третьего типа; в) в магазин отправили 6 часов первого типа, 2 часов второй типа и 5 часов третьего типа.

3.4.2.18 На двенадцати карточках написаны буквы А, Е, Е, И, Ж, О, Р, Р, Р, Р, Т, Ф. После перестановки вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из всех указанных двенадцати букв будет составлено слово из орфографического словаря.

3.4.2.19 В пункт приёма поступило 6 радиограмм, которые надо передать в штаб. Имеется 4 канала передачи радиограмм. Радиограммы случайным образом распределяются по каналам передачи радиограмм, причём каждая радиограмма может передаваться по любому из каналов. Найти вероятность того, что на один из каналов попадут 4 радиограммы, на другой – две радиограммы, а два оставшиеся канала окажутся не загруженными.

3.4.2.20 В автопарке некоторой организации имеются трактора пяти модификаций: 8 тракторов модели Беларус-570, 6 тракторов модели Беларус-80.1, 5 тракторов модели Беларус-892, 8 тракторов модели Беларус-1021 и 7 тракторов модели Беларус-1221.2. В течение некоторого периода времени из них было использовано 20 тракторов. Найти вероятность того, что были использованы: а) все возможные трактора моделей Беларус-570, Беларус-80.1 и Беларус-892; б) все трактора моделей Беларус-80.1, Беларус-1021 и Беларус-1221.2; в) 5 тракторов модели Беларус-570, 4 трактора модели Беларус-80.1, 3 трактора модели Беларус-892, 6 тракторов модели Беларус-1021 и 2 трактора модели Беларус-1221.2.

3.4.2.21 Скорый поезд «Витебск – Минск» делает остановки на пяти станциях Богушевская, Орша, Толочин, Борисов и Минск. В межобластной вагон на станции Витебск вошли пятнадцать пассажиров, каждый из которых может с равной вероятностью выйти на любой из станций. Найти вероятность того, что на одной из станций выйдут пять пассажиров, на другой – четыре, на третьей – три, на четвёртой – два, на пятой один пассажир.

3.4.2.22 В ящике имеется 8 занумерованных транзисторов с номерами 11, 12,…,18. Из ящика достаём 5 раз по одному транзистору, его номер записываем, и транзистор обратно возвращаем в ящик. Транзисторы берутся случайным образом. Найти вероятность того, что все записанные номера различны.

3.4.2.23 В коробке находятся 4 резистора марки ОМЛТ-2, 4 резистора марки ПТМН-1, 6 резисторов марки ПТМН-2 и 7 резисторов марки УЛМ. Из коробки случайным образом извлекают 11 резисторов. Найти вероятность того, что: а) извлечены 2 резистора марки ОМЛТ-2, 2 резистора марки ПТМН-1, 1 резистор марки ПТМН-2 и 5 резисторов марки УЛМ; б) извлечены все возможные резисторы марки ПТМН-1 и марки ПТМН-2; в) извлечены все резисторы марок ОМЛТ-2 и УЛМ.

3.4.2.24 Из колоды, которая содержит 52 карты, выбирают карты червонной масти и случайным образом их раскладывают в одну линию. Какова вероятность того, что между двойкой и тузом окажутся пять карт.

3.4.2.25 «Секретный» замок содержит на общей оси 7 дисков, каждый из которых разделён на 6 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определённое семизначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

3.4.2.26 На складе авторемонтной мастерской имеются в наличии рулевые наконечники пяти фирм, причём число рулевых наконечников, изготовленных фирмой Asmetoll, равно 3, фирмой Fenox равно 8, фирмой Boge – 7, Febbe – 6, Stehnorod – 5. Со склада в цеха автомастерской доставили 16 рулевых наконечников. Найти вероятность того, что: а) все 16 рулевых наконечников изготовлены фирмами Asmetoll, Boge и Febbe; б) в цеха доставлен 1 рулевой наконечник фирмы Asmetoll, 3 – фирмы Fenox, 4 – фирмы Boge, 5 – фирмы Febbe, и 3 – фирмы Stehnorod; в) со склада доставлены все возможные рулевые наконечники фирмами Asmetoll, Boge и Stehnorod.

3.4.2.27 На столе в гараже лежат предметы автомобиля: бензонасос, карбюратор, редуктор, замок зажигания, распределительный вал, зеркало заднего вида. Автолюбитель располагает эти предметы в ряд на полке стеллажа в случайном порядке. Найти вероятность того, что бензонасос и карбюратор окажутся рядом.

3.4.2.28 Набирая номер телефона, абонент забыл последние 4 цифры. При этом известно, что эти цифры различны. Абонент набрал номер телефона наудачу. Найти вероятность того, что номер телефона и номер набранный абонентом совпадут.

3.4.2.29 В инструментальном ящике хранится 6 торцовых ключей на 8 (под шестигранную гайку 8 мм), 7 торцовых ключей на 10, 9 торцовых ключей на 12 и 8 торцовых ключей на 13. Наугад достаём из инструментального ящика 16 торцовых ключей. Найти вероятность того, что: а) достали 3 торцовых ключа на 8, 5 торцовых ключей на 10, 6 торцовых ключей на 12 и 2 торцовых ключа на 13; б) достали все торцовые ключи на 10 и 12; в) достали все ключи на 8 и 12.

3.4.2.30 В восьми боксах случайным образом размещают восемь автомобилей Opel. Какова вероятность того, что в один из боксов поместили пять автомобилей, в другой – два, в третий – один автомобиль, а остальные боксы остались пустыми.

3.4.3 Решить предложенную задачу своего варианта.

3.4.3.1 Тринадцать человек рассаживаются в произвольном порядке за круглым столом. Найти вероятность того, что между двумя фиксированными лицами X и Y сядут четыре человека.

3.4.3.2 Некоторый человек, не глядя на номер серии, купил лотерейный билет, номер серии, которой состоят из шести чисел, пять первых, из которых различны, а шестая совпадает с одной из них. Он задумал шестизначное число, которое удовлетворяет условию данной серии лотерейных билетов. Найти вероятность того, что задуманное человеком число совпадёт с серией билета, который он купил.
3.4.3.3 В цехе работают 14 человек, из которых 6 женщин. Коллектив цеха случайным образом разбивают на две бригады, каждая из которых содержит одинаковое число человек. Найти вероятность того, что: а) в одной из бригад окажутся все женщины; б) все женщины будут находиться в разных бригадах; в) в одной из бригад будет находиться ровно 4 женщины.
3.4.3.4 В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли девять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что на одном из этажей выйдут три человека, на другом – два, на третьем – четыре человека, а на остальных не выйдут ни одного человека.
3.4.3.5 На станцию № 1 поступило 4 блока кодированных сигналов, которые надо передать на станцию № 2. На станции № 1 имеется 7 радиопередатчиков кодированных сигналов. Блоки кодированных сигналов случайным образом распределяются по радиопередатчикам, причём каждый блок сигналов может передаваться по любому из радиопередатчиков любое количество раз. Найти вероятность того, что один из радиопередатчиков передаст 4 блока кодированных сигналов, другой – три блока кодированных сигналов, третий – два блока кодированных сигналов, а четыре оставшиеся окажутся не загруженными.
3.4.3.6 Автопарк предприятия имеет 5 автомобилей марки «МАЗ» и 7 автомобилей марки «ГАЗ», которые случайным образом необходимо разместить в двух пустых боксах по 6 автомобилей в каждом. Найти вероятность того, что: а) ровно три автомобиля марки «МАЗ» попадут в один из боксов; б) все автомобили марки «МАЗ» попадут в один и тот же бокс; в) автомобили марки «МАЗ» попадут в различные боксы.
3.4.3.7 В маршрутное такси село девять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из двенадцати остановок. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных остановках.
3.4.3.8 На полке лежит 9 занумерованных редукторов с номерами 221, 222,…,229. С полки 7 раз берём по одному редуктору, его номер записываем, и редуктор обратно возвращаем на полку. Редукторы берутся случайным образом. Найти вероятность того, что все записанные номера различны.
3.4.3.9 Девять ламп мощностью 60W и 7 ламп мощностью 40W, случайным образом и в равном количестве для проверки на работоспособность распределены между двумя контролёрами. Найти вероятность того, что: а) все лампы мощностью 40W попадут к одному и тому же контролёру; б) ровно 4 лампы мощностью 60W попадут к одному контролёру; в) все лампы мощностью 40W будут у разных контролёров.

3.4.3.10 В лифт тринадцатиэтажного дома на первом этаже вошли десять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на втором этаже.

3.4.3.11 Абонент забыл семизначный номер телефона, но при этом известно, что все цифры номера нечётные. Абонент набрал номер телефона наудачу. Найти вероятность того что, номер телефона и номер, набранный абонентом, совпадут.

3.4.3.12 На платформах железнодорожного состава находится 12 машин Opel, 10 машин BMW и 8 машин Ford. Случайным образом произведена отгрузка 10 машин с различных платформ. Найти вероятность того, что: а) отгружены все машины типа BMW; б) отгружены все машины типа Ford; в) ни одна машина типа BMW не отгружена с платформы.

3.4.3.13 Скорый поезд «Витебск – Минск» делает остановки на пяти станциях Богушевская, Орша, Толочин, Борисов и Минск. В межобластной вагон на станции Витебск вошли семь пассажиров, каждый из которых может с равной вероятностью выйти на любой из станций. Найти вероятность того, что на одной из станций выйдут четыре пассажира, на другой – три пассажира.

3.4.3.14 Номер двигателя состоит из 6 различных цифр и 3-х различных букв из множества {A, B, C, D, E, F, V, U, W, X, Y, Z}. По накладной необходимо выбрать двигатель с конкретно указанным номером. Найти вероятность того, что номер случайно выбранного двигателя совпадёт с номером в накладной.

3.4.3.15 Имеются 7 изделий 1-го сорта, 9 изделий 2-го сорта и 13 изделий 3-го сорта. Наугад выбирают 9 изделий. Найти вероятность того, что: а) выбраны все изделия первого сорта; б) все выбранные изделия второго сорта; в) среди выбранных изделий имеются 3 изделия первого сорта, 4 изделия второго сорта и 2 изделия третьего сорта.

3.4.3.16 На одиннадцати карточках написаны буквы А, А, А, А, А, Б, Б, Д, К, Р, Р. После перестановки вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из всех указанных одиннадцати букв будет составлено слово из орфографического словаря.

3.4.3.17 Некоторый человек, не глядя на номер серии, купил лотерейный билет, номер серии которой состоит из пяти чисел, четыре первых из которых различны, а пятая совпадает с одной из них. Он задумал пятизначное число, которое удовлетворяет условию данной серии лотерейных билетов. Найти вероятность того, что задуманное человеком число совпадёт с серией билета, который он купил.

3.4.3.18 Завод холодильных установок в течение некоторого времени выпустил холодильники трёх типов. За указанный период произведено 14 холодильников одной марки, 6 холодильников второй марки и 9 холодильников третьей марки. После проверки изготовленных холодильников на качество 15 телевизоров отгружено на склад. Найти вероятность того, что: а) на склад отгружено 8 холодильников первой марки, 3 холодильника второй марки и 4 холодильника третьей марки; б) на склад отгружены холодильники третьей и второй марки; в) на склад отгрузили все холодильники первой марки.

3.4.3.19 При испытании партии конденсаторов относительная частота годных конденсаторов оказалась равной 0,7. Найти число годных конденсаторов, если всего было проверено 300 конденсаторов.

3.4.3.20 Шесть рабочих обслуживают 12 пронумерованных станков. Каждый рабочий выбирает случайным образом и с одинаковой вероятностью любой станок. Один станок может обслуживаться только одним рабочим. Найти вероятность того, что будут выбраны для обслуживания станки с номерами 7, 8,…, 12.

3.4.3.21 В коробке находятся 7 диодов марки Д214, 6 диодов марки 2Т231, 5 диодов марки 2Г202 и 8 диодов марки 2Г202А. Из коробки случайным образом берут 15 диодов. Найти вероятность того, что: а) выбраны все диоды марок 2Т231 и 2Г202А; б) выбраны 4 диода марки Д214, 3 диода марки 2Т231, 2 диода марки 2Г202 и 6 диодов марки 2Г202А; в) выбраны все диоды марки Д214 и марки 2Г202А.

3.4.3.22 В ящике содержится 12 одинаково занумерованных резисторов от 1 до 12. Найти вероятность того, что номера извлечённых резисторов появятся в возрастающем порядке.

3.4.3.23 После розыгрыша в лотерею выигрышным оказался номер, у которого все шесть цифр различны. Найти вероятность того, что номер угадан случайным человеком, который предварительно заполнил карточку лотереи.

3.4.3.24 Имеются изделия четырёх сортов, причём число изделий 1-го сорта равно 7, число изделий 2-го сорта равно 5, число изделий 3-го сорта равно 6, а число изделий 3-го сорта равно 8. Для проверки изделий на качество выбирают 13 изделий. Найти вероятность того, что: а) выбраны все изделия 2-го и 3-го сорта; б) выбраны все возможные изделия 1-го и 2-го сорта; в) выбраны 3 изделия 1-го сорта, одно изделие 2-го сорта, 4 изделия 3-го сорта и 5 изделий 4-го сорта.

3.4.3.25 Восемь человек случайным образом рассаживаются за прямоугольным столом (люди рассаживаются случайно вдоль одной стороны стола). Найти вероятность того, что между двумя фиксированными людьми окажутся два человека.

3.4.3.26 На десяти карточках написаны цифры от 1 до 9. Две из них вынимают наугад и укладывают в порядке появления, затем читают поученное число. Найти вероятность того, что число будет чётным.

3.4.3.27 На складе имеются редукторы цилиндрические двухступенчатые пяти модификаций: 8 редукторов модели Ц2У100, 9 редукторов модели Ц2У125, 5 редукторов модели Ц2У160, 6 редукторов модели Ц2У200 и 7 редукторов модели Ц2У250. Со склада в ремонтную мастерскую передали 19 редукторов. Найти вероятность того, что в мастерскую были переданы: а) все редукторы моделей Ц2У100, Ц2У160 и Ц2У200; б) 3 редуктора модели Ц2У100, 5 редукторов модели Ц2У125, 2 редуктора модели Ц2У160, 4 редуктора модели

Ц2У200 и 5 редукторов модели Ц2У250.; в) все возможные редукторы моделей Ц2У160, Ц2У200 и Ц2У250.

3.4.3.28 Девять человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что между двумя фиксированными людьми окажутся три человека.

3.4.3.29 На номере кузова автомобиля «сбиты» пять различных цифр из 17 символов номера. Найти вероятность верной записи номера кузова автомобиля, если 12 символов номера из 17 известны.

3.4.3.30 В инструментальном ящике хранится 8 накидных ключей на 17 (под шестигранную гайку 17 мм), 4 накидных ключа на 19, 5 накидных ключей на 22, 6 накидных ключей на 24 и 8 накидных ключей на 27. Наугад достаём из инструментального ящика 18 накидных ключей. Найти вероятность того, что: а) достали из ящика три накидных ключа на 17, 2 – на 19, 3 – на 22, 4 – на 24 и 6 накидных ключей на 27; б) достали все накидные ключи на 19, 24 и 27; в) достали все возможные накидные ключи на 17, 19 и 22.

3.4.4 Решить предложенную задачу своего варианта. Описать и сделать чертёж пространства элементарных событий, которое отвечает условию эксперимента, а также самого события, вероятность которого необходимо найти в данной задаче.

3.4.4.1 В квадрат со стороной 8 см помещён равнобедренный треугольник с боковыми сторонами длиной $\sqrt{20}$ см и основанием длиной 4 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в квадрат, окажется вне треугольника.

3.4.4.2 Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 4 см. На плоскость наудачу брошена монета радиуса 1,5 см. Найти вероятность того, что монета пересечёт одну из прямых.

3.4.4.3 На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. На плоскость наудачу брошена монета радиуса 2 см. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадрата.

3.4.4.4 На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусов 8 см и 2 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт в кольцо, образованное указанными выше окружностями.

3.4.4.5 Внутрь круга радиуса 8 см наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

3.4.4.6 Внутрь круга радиуса 9 см наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

3.4.4.7 Быстро вращающийся диск радиуса 8 см разделён на чётное число секторов, которые попеременно окрашены в синий и красный цвет. В диск произведён выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадёт в один из красных секторов.

3.4.4.8 На отрезке OA длиною, равной 9 см числовой оси Ox, наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше длины отрезка OB.

3.4.4.9 На отрезке OA длиною, равной 18 см числовой оси Ox, наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке.

3.4.4.10 На отрезке OA длиною, равной 12 см числовой оси Ox, наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше 6 см.

3.4.4.11 На отрезке OA длиною, равной 24 см числовой оси Ox, наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше 12 см.

3.4.4.12 На отрезке OA длиною, равной 6 см числовой оси Ox, наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трёх получившихся отрезков можно построить треугольник.

3.4.4.13 В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причём поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью 120 минут. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 15 минут. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за 120 минут, если каждое устройство отправит по одному сигналу.

3.4.4.14 Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\dfrac{y}{x}$ не больше двух.

3.4.4.15 Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

3.4.4.16 В отрезке длиной 4 см наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит 0,25 см.

3.4.4.17 Моменты начала двух событий наудачу распределены между 16^{00} и 18^{00} часами. Одно из событий длится 15 минут, а второе 20 минут. Определить вероятность того, что события «перекрываются» по времени.

3.4.4.18 Моменты начала двух событий наудачу распределены между 19^{00} и 20^{00} часами. Одно из событий длится 10 минут, а второе 15 минут. Определить вероятность того, что события «не перекрываются» по времени.

3.4.4.19 Шарик брошен внутрь круга радиуса 6 см. Найти вероятность того, что точка прикосновения шарика к плоскости круга находится от центра на расстоянии, меньшем 2 см.

3.4.4.20 На бесконечную шахматную доску, сторона каждой клетки которой равна 8 см, бросают монету радиуса 3 см. Найти вероятность того, что монета попадёт целиком внутрь одной произвольной клетки.

3.4.4.21 Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p \in [0;1], q \in [0;1]$. Найти вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

3.4.4.22 На отрезок AB длиною 8 см наугад «бросают» точку M. Какова вероятность того, что площадь квадрата, построенного на AM, будет больше 25 см^2 и меньше 49 см^2.

3.4.4.23 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше 2/9.

3.4.4.24 Стержень длиной 10 см произвольным образом разламывается на три части. Найти вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

3.4.4.25 По радиоканалу в течение времени 60 минут передаются два сигнала в течении 10 минут, каждый из которых начинается в любой момент времени указанных 60 минут. Если сигналы перекроют друг друга, хотя бы частично, они будут искажены, а, следовательно, их принять невозможно. Найти вероятность того, что оба сигнала будут приняты без искажений.

3.4.4.26 Имеется магнитофонная лента длиной 500 метров, на обеих сторонах которой записаны сообщения. На одной стороне ленты записано сообщение длиной 60 метров, а на другой стороне длина записи равна 90 метров, при этом местоположение записей на сторонах ленты неизвестно. В связи с повреждением ленты необходимо было удалить участок длиною 20 метров, который начинается на расстоянии 100 м от начала ленты. Найти вероятность того, что обе записи не повреждены.

3.4.4.27 На круглом экране радиолокатора радиуса 60 см имеет точечное изображение объекта, занимающее случайное положение в пределах экрана. Найти вероятность того, что расстояние от точки, которая изображает объект, до центра экрана будет меньше 20 см.

3.4.4.28 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше трёх, а их произведение не меньше 68/49.

3.4.4.29 В прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см помещён круг радиуса $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ см. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в прямоугольник, окажется внутри круга.

3.4.4.30 Имеется магнитофонная лента длиной 300 метров, на обеих сторонах которой записаны сообщения. На одной стороне ленты записано сообщение длиной 80 метров, а на другой стороне длина записи равна 60 метров, при этом местоположение записей на сторонах ленты неизвестно. В связи с повреждением ленты пришлось удалить участок длиною 30 метров, который начинается на расстоянии 120 м от начала ленты. Найти вероятность того, что первая запись повреждена, а вторая не повреждена.

4 СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ

Содержание: основные свойства вероятностей, теоремы сложения, условная вероятность, теорема умножения вероятностей.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

4.1.1 Основные свойства вероятностей

1. Для любого события A выполняется неравенство $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$.
3. Вероятность невозможного события равна 0, т. е. $P(\varnothing) = 0$.
4. Для любых двух несовместных событий A и B вероятность суммы равна сумме вероятностей, т. е. $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
5. Если событие $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$ и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
6. Вероятность противоположного события равна разности достоверного события и вероятности самого события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
7. Теорема сложения. Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного наступления, т. е. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
8. Вероятность суммы трёх произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий и вероятности одновременного их наступления минус вероятности попарного наступления этих событий:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

9. Вероятность суммы m произвольных событий равна вероятности достоверного события минус вероятность одновременного наступления этих событий: $P(A_1 + A_2 + ... + A_m) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_m)$.

4.1.2 Условная вероятность. Теорема умножения

Пусть (Ω, F, P) – математическая модель вероятностного эксперимента. Это означает, что наступление любого события будет иметь некоторую вероятность. Вероятность любого события A связано с комплексом условий эксперимента и может менять свою величину с изменением этого комплекса условий.

Например, при бросании игральной кости вероятность выпадения числа очков больше трёх, равна $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Если при этом произошло событие, выпадение чётного числа очков, то вероятность изменится и станет равна $\frac{2}{3}$.

Определение 4.1.2.1 Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P), и A, B произвольные события. Если $P(B)>0$, то *условной вероятностью* события A, при условии, что событие B произошло, называется вероятность, которая определяется по формуле $P_B(A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Аналогично определяется условная вероятность события B, при условии, что событие A произошло: $P_A(B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$.

Легко показать, что условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности.

Если умножить последние два равенства на знаменатели правых частей, то приходим к теореме умножения.

Теорема 4.1.2.1 Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго события при условии, что первое событие произошло.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (4.1.2.1)$$

Если событие A не зависит от события B, то $P_B(A)=P(A)$. В данном случае события называются *независимыми*. Если события A и B являются независимыми, то независимыми будут события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Тогда теорему умножения записываем в виде

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \qquad (4.1.2.2)$$

Для n произвольных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ теорему умножения можно записать в виде:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2\cdot A_3\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3\cdot ...\cdot A_n)=...$$
$$...=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)\cdot ...\cdot P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n).$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 В отделе банка по работе с корпоративными клиентами работают 4 менеджера по продажам, причём каждый из них независимо друг от друга обслуживают клиентов в течение часа с вероятностями 0,7, 0,8, 0,9 и 0,6, соответственно. Найти вероятности следующих событий: $A=$ {в течение часа клиентов будет обслуживать ровно один менеджер по продажам}, $B=$ {в течение часа клиентов будут обслуживать не менее двух, но не более трёх менеджеров}, $C=$ {клиентов будут обслуживать не более трёх менеджеров по продажам}, $D=$ {клиентов будет обслуживать, по крайней мере, один менеджер по продажам}.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в обслуживании клиентов в течение часа i-м менеджером по продажам $\left(i=\overline{1;4}\right)$. По условию, вероятности этих событий равны: $P(A_1)=0,7$, $P(A_2)=0,8$, $P(A_3)=0,9$, $P(A_4)=0,6$.

Тогда событие A можно записать в следующем виде: $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$. Все события, которые стоят в каждом слагаемом суммы, несовместны. На основании 4-го свойства вероятностей, вероятность суммы равна сумме вероятностей. В каждом слагаемом суммы стоит произведение событий, которые являются независимыми, а, следовательно, вероятность произведения равна произведению вероятностей (формула 4.1.2.2). При вычислении вероятностей воспользуемся свойством 6, нахождения вероятностей противоположного события: $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)$. Тогда вероятность события A того, что клиентов будет обслуживать один менеджер по продажам, равна $P(A)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\times$ $\times P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)=0,7\cdot0,2\cdot0,1\cdot0,4+0,3\cdot0,8\cdot0,1\cdot0,4+0,3\cdot0,2\times$ $\times0,9\cdot0,4+0,3\cdot0,2\cdot0,1\cdot0,6=0,0056+0,0096+0,0216+0,0036=0,0404.$

Событие $B=$ {в течение часа клиентов будут обслуживать не менее двух, но не более трёх менеджеров} означает, что в течение часа клиентов будет обслуживать либо только два менеджера, либо только три менеджера. Представим событие B в виде суммы попарно несовместных событий:

$B=A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+$ $+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4$, причём в каждом произведении суммы события независимы. Используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, находим вероятность заданного события B: $P(B)=0,6548$.

Событие $C=$ {клиентов будут обслуживать не более трёх менеджеров по продажам} означает, что клиентов банка в течение часа будут обслуживать либо один, либо два, либо три из четырёх менеджеров по продажам, либо все четыре менеджера не обслуживали клиентов в течение часа. Для вычисления ве-

роятности данного события перейдём к противоположному событию $\overline{C}=${все четыре менеджера по продажам будут обслуживать клиентов в течение часа}. Вероятность события C определяем по свойству 6: $P(C)=1-P(\overline{C})=$
$=1-P(A_1A_2A_3A_4)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=1-0,7\cdot 0,8\cdot 0,9\cdot 0,6=0,6976$.

Аналогично, как и для события C, для определения вероятности события D переходим к противоположному событию $\overline{D}=${ни один менеджер по продажам не будет обслуживать клиентов в течение часа}. Тогда вероятность события D равна: $P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=1-0,3\cdot 0,2\cdot 0,1\cdot 0,4=0,9976$.

4.2.2 В студенческой группе из 25 человек 12 студентов занимаются футболом (событие A_1), 9 – биатлоном (событие A_2) и 8 – шахматами (событие A_3). Футболом и биатлоном занимаются 4 студента, футболом и шахматами – 3 студента, биатлоном и шахматами – 2 студента. Всеми тремя видами спорта занимаются 3 студента. Один из студентов группы выбран на профсоюзную конференцию вуза. Найти вероятности следующих событий: $A=${студент, который выбран на конференцию, занимается футболом или биатлоном}; $B=${студент, который выбран на конференцию, не занимается ни одним вида спорта}; $C=${студент занимается только футболом}.

Решение. Событие A записываем в виде суммы двух совместных событий: $A=A_1+A_2$. Для определения вероятности этого события воспользуемся теоремой сложения (свойство 7):
$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)==12/25+9/25-4/25=17/25=0,68$.
Для вычисления вероятности события $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ используем формулу перехода к противоположному событию (свойство 6) и формулу вероятности суммы трёх событий (свойство 8):
$P(B)=$
$$=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A_1+A_2+A_3}\right)=1-P\left(A_1+A_2+A_3\right)=1-\big(P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-$$
$$-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\big)=1-\big(12/25+9/25+8/25-4/25-3/25-$$
$$-2/25+3/25\big)=1-23/25=2/25=0,08.$$

Событие C можно представить в виде $C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Используя теорему умножения 4.1.2.1, свойства условной вероятности и теорему сложения (свойство 7), получим $P(C)=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=P(A_1)\cdot P_{A_1}\left(\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=P(A_1)\cdot\left(1-P_{A_1}\left(A_2+A_3\right)\right)=$
$$=P(A_1)-P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2+A_3)=P(A_1)-P(A_1A_2+A_1A_3)=P(A_1)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)+$$
$$+P(A_1A_2A_3)=12/25-4/25-3/25+3/25=8/25=0,32.$$

4.2.3 На станцию связи за день поступило 20 телеграмм, адресованных в четыре различных пункта (по 5 в каждый пункт). Из всех телеграмм выбирается наугад 4. Найти вероятности событий: $A=${все телеграммы адресованы в разные пункты}; $B=${все телеграммы адресованы в один и тот же пункт}.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в доставке телеграммы в любой пункт i, где $i=\overline{1;4}$. Чтобы выполнялось событие A, адрес первой телеграммы может быть совершенно произвольным; второй – не таким, как у первой; третьей – не таким, как у первых двух; у четвёртой – не таким, как у первых трёх. По теореме умножения вероятностей $P(A)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)\times$

$$\times P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)=\frac{20}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}=\frac{125}{969}\approx 0{,}129.$$

Обозначим через B_j событие, состоящее в доставке j-ой телеграммы в один из пунктов, где $j=\overline{1;4}$. Чтобы выполнялось событие B, адрес первой телеграммы может быть совершенно произвольным; второй – таким же, как у первой; третьей – таким же, как у первых двух; у четвёртой – таким же, как у первых трёх. По теореме умножения вероятностей $P(B)=P(B_1B_2B_3B_4)=P(B_1)\times$

$$\times P_{B_1}(B_2)\cdot P_{B_1B_2}(B_3)\cdot P_{B_1B_2B_3}(B_4)=\frac{20}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}=\frac{4}{969}\approx 0{,}004128.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Студент во время сессии может получить удовлетворительную оценку по «Математике» с вероятностью 0,8, по «Инженерной графике» с вероятностью 0,75, по «Экономике организации (предприятия)» с вероятностью 0,99, по «Компьютерным информационным технологиям» с вероятностью 0,85 и по предмету «Программирование» с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что во время сессии студент не сдаст ровно один экзамен?

4.3.2 На автомобильный рынок одновременно пришли 3 покупателя, причём каждый из них может приобрести автомобиль с вероятностями соответственно 0,3, 0,4 и 0,6. Какова вероятность того, что автомобиль приобретут не менее одного, но не более двух покупателей?

4.3.3 В магазин поступило три партии швейных изделий. В первой партии изделия первого сорта составляют 95 %, во второй – 94 % и в третьей – 96 %. Из каждой партии наудачу берут по одному изделию. Какова вероятность того, что среди этих изделий, по крайней мере, одно изделие второго сорта?

4.3.4 В фойе установлены 100 лампочек трёх мощностей: 20 лампочек мощности 60W, 30 лампочек мощностью 100W и 50 лампочек мощностью 150W. За неделю перегорело три лампочки. Найти вероятность того, что за эту неделю перегорело не менее двух лампочек мощностью 150W.

4.3.5 На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подмётки, каблуки и верхи сапог. Дефектными оказываются 3 % подмёток, 2 % каблуков и 4 % верхов. Произведённые подмётки, каблуки и верхи сапог случайно комбинируются в цехе, где шьются сапоги. После производства, предприятие отправляет произведённую продукцию в свой фирменный магазин. Найти вероятность того, что покупатель, купив пару сапог, на них обнаружит дефект.

4.3.6 Истребитель атакует бомбардировщик и даёт по нему две независимые очереди. Вероятность сбить бомбардировщик первой очередью равна 0,3, второй – 0,4. Если бомбардировщик не сбит, он ведёт по истребителю стрельбу из орудий кормовой установки и сбивает его с вероятностью 0,15. Какова вероятность того, что в результате воздушного боя будет сбит истребитель или бомбардировщик?

4.3.7 Имеется связка из 9 ключей, четырьмя из которых можно открыть замок. Человек наудачу выбирает один ключ из связки и пытается с его помощью открыть замок. Какова вероятность того, что замок откроется с четвёртой попытки, если после каждой неудачной попытки выбранный ключ: а) возвращается обратно в связку; б) извлекается из связки и откладывается в сторону?

4.3.8 Студент поочерёдно обращается в отдел кадров четырёх предприятий, для получения направления на работу при распределении. Студент обращается в первое предприятие и если ему отказывают, он идёт во второе и больше к первому предприятию не возвращается, и так далее. В случае предложения о трудоустройстве студент прекращает поиски. Вероятность того, что первое предприятие откажет студенту в трудоустройстве, равна 0,8; для второго, третьего и четвёртого предприятия соответствующие вероятности равны 0,7, 0,9 и 0,6. Найти вероятность того, что студент сможет устроиться на работу на одно из данных четырёх предприятий.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

4.4.1.1 В каждой из четырёх коробок находятся транзисторы одной и той же маркировки с одним и тем же количеством. В первой коробке транзисторы, которые имеют брак, составляют 2 %, во второй 3 %, в третьей 4 %, в четвёртой 2 % от общего числа. Какова вероятность того, что радиотехник, взявший по одному транзистору из каждой коробки, обнаружит ровно один не содержащий брака?

4.4.1.2 После ремонта проводится проверка на работоспособность четырёх автомобильных двигателей. Вероятность того, что первый двигатель не пройдёт проверку, равна 0,03, второй 0,02, третий 0,06, четвёртый 0,05. Какова вероятность того, что ровно два автомобильных двигателя пройдут проверку на работоспособность?

4.4.1.3 Прибор, состоящий из четырёх узлов, работает только в том случае, если исправны все четыре узла. Вероятности выхода из строя узлов в течение часа соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа прибор будет работать.

4.4.1.4 Система наружного наблюдения, оборудованная четырьмя радиолокационными станциями, ведёт наблюдение за космическим объектом. Вероятность обнаружить космический объект первой радиолокационной станцией равна 0,01, второй – 0,013, третьей – 0,02, четвёртой – 0,1. Найти вероятность того, что система обнаружит космический объект ровно тремя радиолокационными станциями.

4.4.1.5 Над изготовлением изделия работают последовательно четверо рабочих; качество изделия при передаче следующему работнику не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,1, второй – с вероятностью 0,05, третий – с вероятностью 0,15, а четвёртый – с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущено не более одного брака.

4.4.1.6 Вычислительная машина состоит из четырёх блоков. Надёжность работы первого блока в течение времени T равна 0,9, второго – 0,85, третьего – 0,95, четвёртого – 0,8. Найти вероятность того, что за время T надёжно будут работать не менее трёх блоков.

4.4.1.7 Сообщение, передаваемое по каналу связи, состоит из четырёх символов. При передаче первый символ искажается с вероятностью 0,1, второй – 0,2, третий – 0,15, четвёртый – 0,1. Какова вероятность того, что в сообщении будет не более двух искажений?

4.4.1.8 Производится стрельба четырьмя ракетами по некоторой цели. Первая ракета попадает в цель с вероятностью 0,5, вторая ракета – с вероятностью 0,6, третья ракета – с вероятностью 0,8, четвёртая ракета – с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что цель будет поражена не более дух раз.

4.4.1.9 Железнодорожный состав состоит из четырёх вагонов. Первый вагон имеет дефект с вероятностью 0,12, второй вагон – с вероятностью 0,14, третий вагон – с вероятностью 0,16, четвёртый вагон – с вероятностью 0,16. Найти вероятность того, что при проверке вагонов, не более чем в трёх вагонах будет отсутствовать дефект.

4.4.1.10 Завод выпускает четыре типа компрессоров. При выпуске продукции первый тип компрессоров может иметь дефект с вероятностью 0,02, второй тип компрессоров – с вероятностью 0,04, третий тип компрессоров – с вероятностью 0,06, четвёртый тип компрессоров – с вероятностью 0,06. Найти вероятность того, что при проверке компрессоров, не менее чем в одном компрессоре будет отсутствовать дефект.

4.4.1.11 Вероятности того, что нужная рабочему деталь содержится в первом, втором, третьем или четвёртом инструментальных ящиках, соответственно равны 0,8; 0,82; 0,84; 0,86. Найти вероятность того, что нужная деталь содержится не менее чем в одном, но не более чем в двух инструментальных ящиках.

4.4.1.12 Деталь проходит четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой операции равна 0,12, при второй – 0,22, при третьей – 0,08, при четвёртой – 0,14; качество изделия при переходе от одной операции к другой не проверяется. Найти вероятность, того, что брак в детали может произойти при выполнении не менее двух, но не более трёх операций.

4.4.1.13 Вероятность успешной попытки выполнить упражнение для каждого из четырёх спортсменов соответственно равна 0,6; 0,65; 0,7; 0,75. Спортсмены выполняют попытки по очереди. Найти вероятность того, что выполнят успешно упражнение один или три спортсмена.

4.4.1.14 Инженер производит четырёхкратные измерения прибором некоторой физической величины. Вероятность того, что при считывании показаний прибора инженер допустит ошибку, соответственно равна 0,005; 0, 01; 0,05; 0,1. Найти вероятность того, что при считывании показаний прибора инженер не допустит ошибки ровно два или четыре раза.

4.4.1.15 Четыре автолюбителя одновременно зашли на автомобильный рынок для приобретения запчастей для своих автомобилей. Вероятности того, что каждый из них сделает покупку, соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Какова вероятность того, что сделают покупки только один или только четыре покупателя?

4.4.1.16 Для разрушения моста достаточно попадание ровно одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него будут сброшены 4 авиационные бомбы с вероятностями попадания 0,2; 0,1; 0,3; 0,7.

4.4.1.17 На складе завода имеются редукторы цилиндрические двухступенчатые четырёх модификаций Ц2У100, Ц2У125, Ц2У160, Ц2У200. Вероятность того, что в течение некоторого времени T, поступит заказ на редукторы Ц2У100, равна 0,7, на редукторы Ц2У125 – 0,75, на редукторы Ц2У160 – 0,8, на редукторы Ц2У200 – 0,75. Какова вероятность того, что в течение времени T поступит заказ ровно на две модификации редукторов.

4.4.1.18 Четыре исследователя, независимо один от другого, производят измерение некоторой физической величины. Известно, что первый исследователь может допустить ошибку при считывании показаний прибора в 1 % случаев измерений. Для второго, третьего и четвёртого исследователей этот процент, соответственно составляет 2 %, 3 % и 4 %. Найти вероятность того, что ровно три исследователя не допустят ошибки при измерении физической величины.

4.4.1.19 Имеется группа из четырёх космических объектов, каждый из которых может быть обнаружен радиолокационной станцией, соответственно с вероятностью 0,2; 0,7; 0,4; 0,5. Найти вероятность того, что все четыре объекта будут зафиксированы радиолокационной станцией.

4.4.1.20 При включении зажигания первый двигатель начинает работать в 99 случаев из 100, второй – в 97 случаев из 100, третий – в 95 случаев из 100, а четвёртый – в 90 случаев из 100 случаев включения зажигания. Какова вероятность того, что при включении зажигания начнут работать не более одного двигателя.

4.4.1.21 По каналу связи передаются четыре сообщения, причём каждое из них передаётся с различной степенью точности. Вероятности точной передачи сообщений соответственно равны 0,5; 0,4; 0,8; 0,6. Найти вероятность того, что не менее трёх сообщений были переданы неточно.

4.4.1.22 Четыре стрелка произвели по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Вероятности поражения цели стрелками соответственно равны 0,7; 0,8; 0,7; 0,5. Найти вероятность того, что будет поражено не более двух мишеней.

4.4.1.23 Техническое устройство, состоящее из четырёх узлов, работало в течение некоторого времени. За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью 0,15, второй – с вероятностью 0,2, третий – 0,25, четвёртый – 0,1. Какова вероятность того, что наладчик, вызванный для осмотра устройства, обнаружит неисправность не менее чем в двух узлах.

4.4.1.24 Прибор состоит из пяти блоков, выход из строя каждого блока означает выход из строя прибора в целом, причём блоки выходят из строя независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя каждого блока равна 0,8. Найти надёжность работы прибора в целом. Какова должна быть вероятность выхода из строя каждого блока для обеспечения заданной надёжности 0,00273 прибора?

4.4.1.25 Студент разыскивает нужную ему формулу в четырёх справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем, четвёртом справочнике, соответственно равна 0,4; 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что формула содержится не менее чем в одном справочнике.

4.4.1.26 Рабочий обслуживает четыре аппарата, которые работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение некоторого времени первый аппарат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, второй – 0,6, третий – 0,9, четвёртый – 0,7. Найти вероятность того, что за указанное время не менее одного, но не более двух аппаратов потребуют внимания рабочего.

4.4.1.27 На базу поступило четыре партии радиоприёмников. В первой партии брак в приёмниках составляет 0,1 %, во второй – 0,05 %, в третьей – 0,2 %, в четвёртой – 0,15 %. Выбирают для контроля по одному радиоприёмнику из каждой партии. Найти вероятность того, что, по крайней мере, один радиоприёмник из четырёх не содержит брака.

4.4.1.28 Вероятность хотя бы одного попадания в цель при пяти выстрелах равна 0,00957. Определить вероятность попадания в цель при одном выстреле. Найти вероятность того, что цель будет поражена ровно один или ровно четыре раза при стрельбе при тех же условиях.

4.4.1.29 В четырёх контейнерах находятся резисторы одной и той же маркировки и с одним и тем же количеством резисторов в каждом контейнере. В первом контейнере бракованные резисторы составляют 1 %, во втором – 2 %, в третьем – 4 %, в четвёртом – 3 % от общего числа. Какова вероятность того, что радиотехник, взявший по одному резистору из каждого контейнера, обнаружит ровно два или ровно четыре резистора, которые не содержат брака.

4.4.1.30 Четыре зенитных установки произвели по одному выстрелу, каждая по своей цели. Вероятности поражения цели зенитными установками, соответственно равны 0,6; 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что будут поражены не менее одной, но не более трёх целей.

4.4.2 Решить предложенную задачу своего варианта.

4.4.2.1. Устройство состоит из двух блоков, которые работают независимо друг от друга. В первом блоке установлены два тумблера, которые регулирует его включение в течение времени T, причём этот блок функционирует, если включен хотя бы один из тумблеров. Вероятность того, что включен первый тумблер, равна 0,3, второй – 0,2. Если первый блок не функционирует в течение времени T, то второй блок устройства сработает с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что устройство будет функционировать, если оно работает при функционировании хотя бы одного блока.

4.4.2.2. Две фабрики производят однотипные изделия. Изделие первой фабрики состоит из двух узлов и работает, если функционирует ровно один узел из двух; надёжность первого узла составляет 0,4, а второго – 0,5. Изделие второй фабрики состоит из трёх узлов и работает, если функционирует, по крайней мере, один узел, причём надёжность каждого из этих узлов равна 0,7. Выбирают по одному изделию с каждой фабрики. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одно из изделий будет работать.

4.4.2.3. Артиллерийское орудие атакует танк и даёт по нему два независимых выстрела. Вероятность подбить танк первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,3. Если танк не подбит двумя выстрелами артиллерийского орудия, то он ведёт огонь по ней и уничтожает её с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что в результате боя будет уничтожен танк или артиллерийское орудие.

4.4.2.4. Два завода производят редукторы. Редукторы первого завода могут иметь брак, по крайней мере, в одном из трёх блоков, из которых он состоит, причём вероятность брака в каждом из этих блоков равна 0,1. Редукторы, второго завода содержит брак ровно в одном из двух имеющихся блоков, из которых он состоит, причём вероятность брака в первом блоке равна 0,15, во втором – 0,05. Какова вероятность того, что пара редукторов, взятых по одному с каждого завода, будет содержать дефект?

4.4.2.5. Имеется две связки ключей, которыми можно открыть дверь. Если воспользоваться первой связкой, то дверь откроется, если использовать, по крайней мере, один из ключей. Первым ключом связки дверь открывается с вероятностью 0,4, вторым – с вероятностью 0,6. Если дверь ключами первой связки не открыта, то, используя ключи второй связки, дверь откроется с вероятностью 0,25. Какова вероятность того, что дверь будет открыта ключами первой и второй связки, если любой ключ первой связки не связан с ключами второй связки?

4.4.2.6. Две системы внешнего наблюдения проводят исследование космических объектов. Первая система обнаруживает объекты первым радаром с вероятностью 0,2, вторым – с вероятностью 0,3. Вторая система обнаруживает космические объекты, по крайней мере, одним из трёх радаров, причём вероятность обнаружения объектов каждым из них равна 0,4. Найти вероятность того, что космические объекты будут обнаружены 1-й или 2-й системой, если обнаружение объекта одной из систем исключает обнаружение этого объекта другой.

4.4.2.7. Двум бригадам, которые работают независимо друг от друга, поставлена задача: перевести железнодорожный состав большой длины с одного пути на другой. Первая бригада использует два локомотива различной мощности, причем, по крайней мере, один локомотив из двух может перегнать состав на другой путь. Первый локомотив может перегнать состав с вероятностью 0,1, второй – с вероятностью 0,7. Если первая бригада не справляется с заданием, то вторая бригада своими силами может перегнать состав с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что первая или вторая бригада перегонят состав на другой путь.

4.4.2.8. Два человека решают одну и ту же поставленную задачу в течение некоторого времени. Первый человек при решении задачи может допустить не менее одной ошибки из трёх возможных, каждую из которых он совершает с вероятностью 0,1. Второй человек может сделать только две ошибки, первую с вероятностью 0,2, вторую – с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что первый или второй человек сделают ошибки в решении задачи?

4.4.2.9. Два мастера могут производят ремонт двигателей. Первый мастер ремонтирует двигатель в 80 % случаев, второй – в 70 % случаев, от общего числа. Какова вероятность того, что двигатель будет отремонтирован, по крайней мере, одним мастером?

4.4.2.10. Первый стрелок делает два выстрела по своей мишени и поражает цель первым выстрелом с вероятностью 0,5, вторым – с вероятностью 0,7, при этом цель может быть поражена ровно один раз. Второй стрелок может поразить свою мишень не менее одного раза из трёх выстрелов, причём вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность поражения цели первым или вторым стрелком.

4.4.2.11. Две системы внешнего наблюдения проводят исследование космических объектов. Первая система обнаруживает объект, по крайней мере, одной радиолокационной станцией из двух, каждая из которых обнаруживают космические объекты с вероятностями 0,2 и 0,5, соответственно. Если первая система не обнаружит космические объекты, то включается вторая система и обнаруживает эти объекты с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что космические объекты будут обнаружены первой или второй системой наблюдения.

4.4.2.12. Техническое устройство состоит из двух узлов, работающих независимо друг от друга в течение некоторого времени *T*. За это время в первом узле может выйти из строя, по крайней мере, один элемент из трёх, с вероятностью выхода из строя каждого элемента равной 0,2. За это же время во втором узле может выйти из строя ровно один элемент из двух, причём первый элемент выходит из строя с вероятностью 0,1, второй – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что выйдут из строя первый или второй узел технического устройства.

4.4.2.13. Происходит воздушный бой между двумя истребителями. Первый истребитель атакует первым и даёт по второму истребителю две независимые очереди. Вероятность сбить второй истребитель первой очередью равна 0,5, второй – 0,3. Если второй истребитель не сбит, то он даёт по первому истребителю две независимые очереди. Вероятность сбить первый истребитель первой очередью равна 0,4, второй – 0,7. Найти вероятность того, что в результате воздушного боя будет сбит либо первый, либо второй истребитель.

4.4.2.14. Деталь проходит две стадии обработки, причём обработка детали на первой и второй стадиях не зависят друг от друга. На первой стадии над деталью произведено две операции. При выполнении первой операции брак в обработке возможен в 3 % случаев, второй – в 4 % от общего числа обрабатываемых деталей. На этой стадии, по статистике, не более одной детали оказываются бракованными. На второй стадии не более двух из трёх операций над деталью могут привести к отбраковке детали, причём каждая операция допускает брак в 5 % случаев. Найти вероятность того, что после первой или второй стадий обработки деталь будет содержать брак.

4.4.2.15. Техническое устройство состоит из двух блоков, которые работают независимо друг от друга. В первом блоке установлены два элемента, которые регулирует его включение в течение времени *T*, причём этот блок функционирует, если включен хотя бы один из элементов. Вероятность того, что включен первый элемент, равна 0,4, второй – 0,3. Если первый блок не функционирует в течение времени *T*, то второй блок устройства сработает с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что устройство будет функционировать, если оно работает при функционировании хотя бы одного блока.

4.4.2.16. Предприятие выпускает тормозные колодки. При выпуске тормозной колодки дефект может быть обнаружен в трёх точках А, В и С. В точке А дефект колодки составляет 2 %, в точке В – 3 %, в точке С – 5 %, от общего числа. Какова вероятность того, что случайная взятая пара колодок будет содержать дефект?

4.4.2.17. На предприятии имеется два бокса для хранения автомобилей. В первом боксе находится два автомобиля, первый из которых заводится с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,8. Если автомобили в первом боксе не заводятся, то используют автомобиль со второго бокса, который может завестись с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что заведется, по крайней мере, один автомобиль из первого или второго боксов.

4.4.2.18. Вычислительный центр, который производит непрерывную обработку информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Первое устройство, за некоторое время, может дать «сбой» не более одного раза из двух возможных, причём вероятность произойти первому «сбою» равна 0,2, а второму – 0,15. Второе устройство, за то же время, может дать «сбой» не более двух раз из трёх возможных, причём вероятность произойти любому из трёх «сбоев» равна 0,3. Найти вероятность того, что «сбой» произойдёт в первом или втором вычислительном устройстве, причём устройства работают независимо друг от друга.

4.4.2.19. Сейф может быть открыт либо с помощью кода, который состоит из одного либо двух символов, или с помощью ключа. Вероятность открыть сейф, набрав первую цифру на коде равна 0,3, вторую, не набирая первую, – 0,5. Если сейф не открылся набором кода, то используют ключ, вероятность открыть которым равна 0,9. Какова вероятность того, что сейф будет открыт кодом или ключом, если открыть сейф кодом и ключом одновременно невозможно?

4.4.2.20. Два спортсмена выполняют некоторое упражнение, причём первому спортсмену даны три попытки, а второму две (все попытки обоими спортсменами должны быть выполнены). Первый спортсмен может выполнить не менее двух попыток без ошибок, с вероятностью ошибки в каждой 0,2. Второй спортсмен выполняет упражнение с ошибкой в одной из попыток, причём в первой попытке он делает ошибку с вероятностью 0,1, во второй – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что первый или второй спортсмены выполнят упражнение с ошибками?

4.4.2.21. Двум отделам поставлена задача: решить некоторую проблему, используя компьютерную технику. Первый отдел решает задачу с использованием двух компьютеров, причём первый компьютер решает задачу с вероятностью 0,7, второй – с вероятностью 0,9. Если первый отдел не решает поставленной задачи, то второй отдел её решает с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что проблема будет решена первым или вторым отделом?

4.4.2.22. Две перфораторщицы набили на разных перфокартах по одинаковому комплекту перфокарт. Первая перфораторщица может сделать ошибку в одной из трёх набранных перфокарт, с одной и той же вероятностью ошибки для каждой перфокарты, равной 0,3. За то же время вторая перфораторщица набила две перфокарты. Вероятность сделать ошибку в первой перфокарте равна 0,1, во второй – 0,6. Найти вероятность того, что ошибку сделала первая или вторая перфораторщица.

4.4.2.23. Бассейн может быть наполнен из двух резервуаров. За некоторое время бассейн наполняется из первого резервуара, причём с помощью первого насоса бассейн наполняется с вероятностью 0,2, с помощью второго – с вероятностью 0,8. Если бассейн не наполнен за указанное время, то вода сливается и бассейн наполняется из второго резервуара с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что бассейн будет наполнен из первого или второго резервуаров?

4.4.2.24. Отдел технического контроля проверяет две партии изделий на стандартность. В первой партии не менее двух из трёх проверенных являются стандартными, причём вероятность стандартности каждого изделия в этой партии равна 0,8. Во второй партии ровно одно изделие из двух проверенных стандартно, причём вероятность того, что первое проверенное изделие будет являться стандартным равно 0,6, второе – 0,5. Какова вероятность того, что в первой или во второй партиях будут стандартные изделия?

4.4.2.25. На учениях разыгрывается бой между двумя пулемётчиками. Первый пулемётчик атакует первым и даёт по второму пулемётчику две независимые очереди. Вероятность уничтожить второго пулемётчика первой очередью равна 0,6, второй – 0,8. Если второй пулемётчик не уничтожен, то он даёт по первому пулемётчику две независимые очереди. Вероятность уничтожить первого пулемётчика первой очередью равна 0,4, второй – 0,7. Найти вероятность того, что в результате учебного боя будет уничтожен первый или второй пулемётчик.

4.4.2.26. Предприятие выпускает некоторые изделия, которые поступают в продажу попарно. Каждое изделие состоит из трёх деталей № 1, № 2 и № 3. Дефектными оказываются 0,2 % деталей № 1, 0,4 % деталей № 2 и 0,6 % деталей № 3. Произведённые детали случайно комбинируются в цехе, где собираются изделия. Какова вероятность того, что случайная взятая пара изделий будет содержать дефект?

4.4.2.27. Первый трактор за некоторое время может вспахать поле с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что поле будет вспахано при работе, по крайней мере, одного трактора.

4.4.2.28. На автомобильном рынке выставлены на продажу два одинаковых автомобиля. В каждом автомобиле дефект может оказаться в трёх блоках A, B, C. Блок A работает с надёжность 99,3 %, блок B – с надёжностью 99,5 %, блок C – с надёжностью 99,7 %. Найти вероятность того, что приобретённые автомобили будут содержать дефект.

4.4.2.29. Через первую трубу за некоторое время можно наполнить бассейн с вероятностью 0,6, а через вторую – с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что бассейн будет наполнен при работе, по крайней мере, одного насоса.

4.4.2.30. Редуктор состоит из трёх основных узлов. В первом узле брак может составить 1 %, во втором – 2 %, а в третьем – 1,5 %. Какова вероятность того, что человек, купивший два редуктора, обнаружит дефект.

4.4.3 Решить предложенную задачу своего варианта

4.4.3.1 Имеется связка из 18 ключей, десять из которых могут открыть замок. Берём наудачу два ключа и с их помощью пытаемся открыть замок. В каждой попытке достаём по два ключа. Какова вероятность того, что замок откроется ровно с третьей попытки, если проверенные ключи откладываются в сторону?

4.4.3.2 В коробке находятся 22 диода, из них 12 марки Д214, остальные марки 2Т231. Берём наудачу два диода и проверяем их марку. В каждой попытке достаём по два диода. Какова вероятность того, что диод марки Д214 появится ровно на четвёртой попытке, если проверенные диоды откладываются в сторону?

4.4.3.3 В контейнере находятся 26 редукторов, из них 12 марки Ц2У250, остальные марки Ц2У125. Берём наудачу два редуктора и проверяем их марку. В каждой попытке достаём по два редуктора. Какова вероятность того, что редуктор марки Ц2У250 появится ровно в пятой попытке, если проверенные редукторы откладываются в сторону?

4.4.3.4 В цехе работают 10 мужчин и 9 женщин. По табельным номерам вызывают в отдел кадров двух человек. Если все выбранные люди женщины, то повторяют тот же выбор двух человек из оставшихся людей. В каждой попытке выбираем два человека. Какова вероятность того, что мужчина будет выбран с третьей попытки, если люди после вызова в отдел кадров не возвращаются в цех?

4.4.3.5 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 26 учебников, из которых 12 в твёрдом переплёте, а 14 книг в мягком переплёте. Библиотекарь берёт наудачу два учебника. Если эти учебники оказываются в мягком переплёте, то библиотекарь берёт следующие два учебника, отложив первые два в сторону. Найти вероятность того, что учебник в твёрдом переплёте библиотекарь возьмёт с полки ровно в четвёртой попытки.

4.4.3.6 В ящике находятся 35 транзисторов, из них 15 марки ГТ404Б, остальные марки КТ608А. Берём наудачу три транзистора и проверяем их марку. В каждой попытке достаём по три транзистора. Какова вероятность того, что транзисторы марки ГТ404Б появится ровно при третьей попытке, если проверенные транзисторы после каждой попытки откладываются в сторону?

4.4.3.7 В компьютерном классе установлено 38 компьютеров, причём 20 из всех компьютеров имеют монитор 19 дюймов по диагонали, а оставшиеся 18 компьютеров имеют монитор 17 дюймов по диагонали . Подключение компьютеров к электросети в классе осуществляется таким образом, что нажатие, наугад на любой из тумблеров включает ровно три компьютера. Какова вероятность того, что компьютер с 19 дюймовым монитором включится ровно с четвёртого раза?

4.4.3.8 В коробке находятся 24 резистора марки ОМЛТ-2 и 29 резисторов марки УЛМ. Берём наудачу три резистора и проверяем их марку. При каждой попытке из коробки достаём три резистора до появления резистора марки УЛМ. Какова вероятность того, что понадобится ровно пять попыток, если проверенные резисторы, после каждой попытки откладываются в сторону?

4.4.3.9 На складе универмага находятся 22 телевизора марки «Витязь» и 24 телевизора марки «Горизонт». Со склада в торговый зал доставляются по три телевизора до появления телевизора марки «Витязь. Какова вероятность того, что будет сделано ровно три доставки телевизоров в торговый зал?

4.4.3.10 В автосалоне выставлены на продажу 26 автомобилей Ford и 20 автомобилей фирмы Opel. Для освобождения помещения автосалона под ремонт, автомобили случайным образом перемещают в новое помещение до появления автомобиля марки Opel. За каждую поездку можно перевести только три автомобиля. Какова вероятность того, что будет осуществлено ровно четыре перевозки?

4.4.3.11 На стоянке № 1 тракторного завода находятся трактора «Беларус-80.1» и «Беларус-1221.2», по 20 тракторов каждой модификации. Трём водителям поручено перегнать трактора на площадку № 2. Водители выбирают наугад трактора и перегоняют их на площадку № 2, до появления трактора «Беларус-1221.2». Какова вероятность того, что будет осуществлено ровно пять перегонов тракторов на новую площадку?

4.4.3.12 Завод выставляет на продажу 20 железобетонных плит ФБС 24.40.6 и 18 плит ФБС 12.3.6. Некоторое предприятие сделало заказ на плиты первой и второй маркировки. Вывоз осуществляется седельным тягачом с полуприцепом, который может загрузить ровно четыре плиты, до появления плиты марки ФБС 24.40.6. Какова вероятность того, что седельный тягач выполнит ровно четыре поездки?

4.4.3.13 В контейнере находится 34 триода, из которых 12 являются исправными, а 22 нет. Из контейнера наугад достаём 4 триода, тестируем их на исправность. В случае неисправности откладываем триоды в сторону. Триоды достаём до тех пор, пока не появится исправный триод. Какова вероятность того, что для этого понадобится ровно пять раз доставать диоды?

4.4.3.14 На складе имеются 14 рулевых наконечников, которые произведены фирмой Asmetoll и 28 – фирмой Stehnord. Со склада рулевые наконечники случайным образом передаются в магазин, по четыре за один раз, до того, как появятся наконечники фирмы Stehnord. Найти вероятность того, что со склада будет произведено ровно четыре передачи рулевых наконечников в магазин.

4.4.3.15 В коробке лежат 12 конденсаторов модели 682M и 30 конденсаторов марки D1622K. Из коробки каждый раз наугад достаём 4 конденсатора, записываем номер модели и откладываем в сторону. Конденсаторы достаём до тех пор, пока не появится конденсатор марки 682M. Какова вероятность для этого понадобится шесть раз доставать конденсаторы из коробки?

4.4.3.16 На стеллаже склада магазина расположены в упаковках 10 карбюраторов марки 2105-1107010 и 18 карбюраторов марки 2105-1107010-20. Продавец каждый раз берёт со стеллажа по четыре упаковки карбюраторов и проверяет их маркировку. Если среди них нет карбюраторов второй марки, то он откладывает их в сторону. Какова вероятность того, что продавец достанет хотя бы одну упаковку карбюраторов марки 2105-1107010 ровно в третьей попытке?

4.4.3.17 В инструментальном ящике имеются болты из нержавеющей стали, среди которых имеется 24 болта марки A2-50 и 15 болтов марки A4-80. Рабочий берёт каждый раз по четыре болта и проверяет их маркировку. Если среди болтов нет болтов марки A4-80, то он откладывает их в сторону и достаёт следующие четыре болта. Какова вероятность того, что рабочий достанет болты из нержавеющей стали марки A4-80 ровно с четвёртой попытки?

4.4.3.18 На стеллажах оптовой базы расположены в упаковках 14 тормозных колодок марки E290R-01143/035 и 26 колодок марки E130R-01146/015. Работник оптовой базы каждый раз снимает со стеллажей по четыре упаковки тормозных колодок и проверяет их маркировку. Если среди них нет тормозных колодок первой марки, то он откладывает их в сторону. Какова вероятность того, что тормозные колодки марки E290R-01143/035 работник достанет с пятого раза?

4.4.3.19 На складе универмага имеются телевизоры «Витязь» трёх модификаций: 16 телевизоров модификации 37CTV750-3 Zodiac, 14 – модификации 54CTV770-3 Lotos, 12 – модификации 54CTV740-7 Astra. Со склада в торговый зал каждый раз перевозят по четыре телевизора до появления телевизора модификации 54CTV740-7 Astra. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно шесть перевозок?

4.4.3.20 У продавца в наличии имеется 10 коробок с мобильными телефонами марки Samsung, 12 – марки Nokia и 20 – марки Philips. Каждый раз продавец берёт по четыре коробки, и если в них нет телефонов марки Samsung, откладывает их в сторону. Какова вероятность того, что для того чтобы достать телефон марки Samsung, продавец будет доставать телефоны ровно семь раз.

4.4.3.21 Для решения поставленной задачи студент разыскивает необходимую ему формулу в одном из четырёх справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем, четвёртом справочнике, соответственно равны 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. Студент открывает первый справочник, если формулы там нет, то он закрывает её и откладывает в сторону. После этого процедура повторяется для остальных справочников. Какова вероятность того, что студент найдёт нужную формулу в одном из справочников?

4.4.3.22 В пирамиде установлены 23 винтовки, из которых шесть имеют оптический прицел. Стрелок случайным образом берёт из пирамиды по две винтовки; если винтовки не имеют оптического прицела, то стрелок откладывает их в сторону. После этого процедура повторяется. Какова вероятность того, что стрелок достанет винтовку с оптическим прицелом ровно на седьмой раз?

4.4.3.23 Человек может найти ответ на свой вопрос на любом из семи сайтов в интернете, только которые содержат ответ на этот вопрос. Человек открывает наудачу любой из сайтов; если ответа на свой вопрос он не находит, то он закрывает этот сайт и больше к нему не возвращается. После этого человек переходит ко второму сайту, а затем продолжает процедуру. Какова вероятность того, что человек найдёт ответ на свой вопрос на только шестом сайте?

4.4.3.24 Четыре артиллерийские батареи ведут поочерёдно стрельбу по одной и той же мишени. Каждая батарея имеет два снаряда. При первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первой, второй, третьей, четвёртой батареи соответственно равны 0,3; 0,4 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что все батареи израсходуют весь боезапас.

4.4.3.25 Студент по окончании университета, получив свободное распределение, обращается в четыре фирмы для трудоустройства. Студент обращается в первую фирму и если его принимают на работу, то он прекращает поиски; если его не принимают на работу, то он обращается во вторую фирму и т. д. Вероятность трудоустройства в первую, вторую, третью, четвёртую фирму соответственно равна 0,7; 0,8; 0,3; 0,6. Какова вероятность того, что студент найдёт работу?

4.4.3.26 Железнодорожный состав доставил на станцию 18 цистерн с бензином Аи-95 и 34 цистерны с бензином Аи-92, которые случайным образом располагаются внутри состава. Для разгрузки отцепляют по пять цистерн до появления цистерн с бензином Аи-95 и перегоняют их на другие пути. Найти вероятность того, что цистерны с бензином Аи-95 будут переведены на другой путь при пятом перегоне.

4.4.3.27 На складе имеются покрышки фирмы «Pirelle», из них 10 покрышек маркировки R13/65/195 и 12 покрышек маркировки R15/60/205. Случайным образом в торговый зал доставляют по две покрышки до появления покрышек первой марки. Найти вероятность того, что в торговый зал покрышки R13/65/195 попадут только при четвёртой доставке.

4.4.3.28 На оптовой базе имеются DVD проигрыватели «Витязь» двух модификаций: 18 проигрывателей марки DVD-016M, 12 проигрывателей марки DVD-K500M. Оптовая база случайным образом перевозит проигрыватели с одного склада на другой по три проигрывателя за раз до появления проигрывателей DVD-K500M, после чего перевозка прекращается. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно четыре перевозки проигрывателей?
4.4.3.29 В гараже в случайном порядке расположено 20 радиаторов, причём восемь из них исправны. Для замены неисправного радиатора в автомобиле водитель берет любые два радиатора, которые имеются в гараже, и проверяет их на исправность. Если радиаторы неисправны, то водитель откладывает их в сторону. Какова вероятность того, что водитель найдёт исправный радиатор ровно с четвёртой попытки?
4.4.3.30 Предприятие «Атлант» после проверки на качество отправило на склад холодильники трёх модификаций: 8 холодильников модификации ХМ6001-007, 12 – модификации ХМ4307, 14 – модификации ХМ4007. Со склада предприятия в случайном порядке, по три холодильника за один раз, продукция направляется в свой фирменный магазин. Найти вероятность того, что холодильники модификации ХМ6001-007 будут отправлены в магазин с шестого раза.

5 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Содержание: гипотезы, формула полной вероятности, формула Байеса.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

5.1.1 Формула полной вероятности

Предположим, что событие A может произойти с одним из несовместных событий H_i, где $i=\overline{1,n}$, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий Ω. То есть, $\Omega=\{H_1+H_2+...+H_n\}$ и $H_i\cdot H_j=\varnothing$, если $i\neq j$. События H_i, которые удовлетворяют указанным выше условиям, называются *гипотезами*. Предположим, что заданы вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P_{H_i}(A)$ наступления события A при осуществлении каждой из указанных гипотез. Вероятность события A можно вычислить по следующей теореме.

Теорема 5.1.1.1 Вероятность события A, которое может произойти одновременно с одной из гипотез H_i, где $i=\overline{1,n}$, равна сумме попарных произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующие им условные вероятности наступления события A.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A), \qquad (5.1.1.1)$$

или используя знак суммирования, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \qquad (5.1.1.2)$$

Формулы (5.1.1.1) и (5.1.1.2) называются формулами полной вероятности.

5.1.2 Формула Байеса

Формула Байеса даёт возможность определить условные вероятности гипотез, после проведения эксперимента, если известны вероятности гипотез до проведения эксперимента, причём гипотезы образуют полную группу событий.

Теорема 5.1.2.1 Вероятность гипотезы $H_k (k = \overline{1,n})$, после проведения эксперимента равна произведению вероятности этой гипотезы до проведения эксперимента на условную вероятность события, которое произошло при испытании, делённому на полную вероятность данного события.

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \qquad (5.1.2.1)$$

Формула (5.1.2.1) называется формулой Байеса (или Бейеса).

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Прибор может работать в двух режимах: нормальном и экономном. Нормальный режим наблюдается в 60 % всех случаев работы прибора, а экономный – в 40 % случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме равна 0,04, а в экономном режиме – 0,02. Найти вероятность выхода прибора из строя за время T.

Решение. Рассмотрим событие $A = \{$прибор выйдет из строя за время $T\}$. Данное событие может произойти одновременно с одной из гипотез: $H_1 = \{$прибор работает в нормальном режиме$\}$, $H_2 = \{$прибор работает в экономном режиме$\}$. Гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу событий. Исходя из статистических данных задачи, вероятности гипотез равны:

$P(H_1) = 60/100 = 0,6$, $P(H_2) = 40/100 = 0,4$. Согласно условию задачи, соответствующие условные вероятности события A, при условии, что каждая гипотеза произошла, равны: $P_{H_1}(A) = 0,04$, $P_{H_2}(A) = 0,02$. Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности (формула 5.1.1.1):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,6 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,032.$$

5.2.2 В магазин, в продаже которого не было электрических лампочек, поставили лампочки трёх мощностей: 200 лампочек по 40W, 500 лампочек по 60W и 300 лампочек по 100W. Вероятности того, что для каждой указанной мощности, лампочка является бракованной, равна 0,1, 0,2 и 0,3, соответственно. Без проверки некоторый покупатель купил стандартную лампочку. Какова вероятность того, что покупатель приобрёл лампочку мощностью 100W?

Решение. Рассмотрим событие $A =${покупатель приобрёл стандартную лампочку}. Данное событие может произойти одновременно с одной из гипотез: $H_1 =${лампочка имеет мощность 40W}, $H_2 =${лампочка имеет мощность 60W}, $H_2 =${лампочка имеет мощность 100W}. Гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу событий. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 200/1000 = 0,2$, $P(H_2) = 500/1000 = 0,5$, $P(H_3) = 300/1000 = 0,3$. Условные вероятности события A, при условии, что каждая из гипотез произошла заданы: $P_{H_1}(A) = 0,1$, $P_{H_2}(A) = 0,2$, $P_{H_3}(A) = 0,3$. Для определения вероятности события A/H_3 воспользуемся формулой Байеса (формула 5.1.2.1):

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,3}{0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3} = \frac{0,09}{0,21} = \frac{3}{7} \approx 0,429.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Два автоматических станка производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом станке равна 0,88, а на втором – 0,96. Производительность первого станка в три раза меньше, чем второго. Найти вероятность того, что взятая с конвейера деталь является нестандартной.

5.3.2 Имеются две урны. В первой урне 3 синих и 5 красных шаров, во второй – 4 синих и 8 красных. Из первой и второй урн случайным образом берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из неё наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар синий.

5.3.3 Комиссия проверяет работу трёх торговых сетей из трёх имеющихся в городе. Обнаружить нарушения работы в каждой из торговых сетей равны 0,1, 0,2 и 0,15, соответственно. Какова вероятность того, что комиссия не обнаружит нарушения работы в торговых сетях?

5.3.4 Студенческая группа из 15 человек сдаёт тестирование по «Высшей математике». Из них 4 человека знают указанный предмет на 9 баллов, 6 студентов – на 7 баллов, и 5 – на 5 баллов. Вероятность сдать тест с первого раза для студента знающего предмет на 9 баллов равна 0,9; для студентов, знающих предмет на 7 баллов – 0,7, для студентов, знающих предмет на 5 баллов – 0,4. Для сдачи теста вызываются 2 студента. Они проходят тест. Найти вероятность того, что оба сдававших тест смогли его сдать.

5.3.5 Один из трёх стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,1, для второго – 0,2, для третьего – 0,3. Мишень поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены вторым стрелком.

5.3.6 Найти вероятность того, что в условии задачи 5.3.1 нестандартная деталь произведена вторым станком.

5.3.7 Число грузовых автомашин, проезжающих по автостраде, на которой стоит автозаправка, относится к числу легковых машин как 3:7. Вероятность того, что будет заправляться легковая машина, равна 0,8; для грузовой машины эта вероятность равна 0,3. На автозаправке произведена заправка автомобиля. Какова вероятность, что этот автомобиль является легковым?

5.3.8 В областную больницу города поступают в среднем 45 % больных с заболеванием *АГ*, 35 % с заболеванием *ИБС* и 20 % с заболеванием *БА*. В больницу больные с другими заболеваниями не поступают. Нормализация состояния здоровья после лечения болезни *АГ* составляет 80 %, после болезни *ИБС* – 70 %, после болезни *БА* – 75 %. У больного, поступившего в областную больницу, после лечения наступила нормализация состояния здоровья. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *АГ*.

5.3.9 В урне находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объёму. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости двойка появляется с вероятностью $1/7$, а тройка – с вероятностью $2/9$, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлечённая из урны игральная кость была подброшена. Найти вероятность того, что выпадет: а) пять очков, б) два очка; в) три очка.

5.3.10 В условии предыдущей задачи 5.3.9, найти вероятность того, что была подброшена: а) правильная игральная кость, б) неправильная кость.

5.3.11 При переливании крови необходимо учитывать группу крови больного и донора. Больному, имеющему четвёртую группу крови, можно переливать кровь любой группы; больному со второй или третьей группой крови можно переливать кровь либо той же группы, либо первой; больному с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Среди населения 33,5 % имеют первую, 37,9 % – вторую, 20,7 % – третью и 8,1 % – четвёртую группу крови. Найти вероятность того, что случайно выбранному больному можно перелить кровь случайно выбранного донора.

5.3.12 В условии предыдущей задачи 5.3.11, определить вероятность того, что переливание крови можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта. Дать описание события, которое отвечает условию эксперимента. Выдвинуть гипотезы, которые могут произойти одновременно с указанным событием. Оценить вероятности гипотез после проведения эксперимента.

5.4.1.1 Три автомата производят торцевые ключи, которые поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления нестандартного торцевого ключа I автоматом равна 0,07, II автоматом – 0,09, III автоматом – 0,11. Производительность второго автомата в два раза больше, чем первого, а производительность третьего в в три раза больше, чем второго. Найти вероятность того, что взятые с конвейера два торцевых ключа будут отвечать стандарту.

5.4.1.2 В группе из одиннадцати стрелков имеются пять отличных и шесть хороших стрелков. Отличный стрелок поражает цель в девяти выстрелах из десяти, а хороший – в восьми из того же числа выстрелов. На линию огня вызываются наугад три стрелка, которые делают по одному выстрелу. Найти вероятность того, что стрелки попадут в цель.

5.4.1.3 За некоторое время завод выпустил бетонные плиты трёх марок: шесть плит марки ФБС 9.4.6, восемь плит марки ФБС 24.40.6 и десять плит марки ФБС 12.3.6. Вероятность того, что плита имеет брак первой, второй и третьей марки, соответственно равна 0,1; 0,08; 0,06. Наугад выбирают две плиты. Найти вероятность того, что обе плиты имеют брак.

5.4.1.4 Некоторая фирма занимается установкой систем спутникового телевидения «НТВ Плюс». В наличии имеются 12 систем с тюнером X-540 и 14 систем с тюнером X-740 PVR. В некоторой местности отличный приём в 92 % случаев обеспечивают системы спутникового телевидения «НТВ Плюс» с тюнером X-540 и в 95 % случаев системы с тюнером X-740 PVR. Фирма произвела четыре установки систем спутникового телевидения с случайным выбором тюнера. Какова вероятность того, что все системы будут обеспечивать отличный приём?

5.4.1.5 На оптовой базе имеются телевизоры «Горизонт» трёх моделей: 12 телевизоров модели 32CD840 Classic, 10 – модели 32LCD826 Nero E, 14 – модели

26LCD840 Inspirit. Вероятность того, что корпус телевизора первой, второй, третьей марки имеет серебристый цвет, соответственно равна 0,4; 0,3; 0,6. Какова вероятность того, что взятые случайным образом два телевизора будут иметь серебристый цвет корпуса?

5.4.1.6 На складе предприятия имеются десять цилиндрических двухступенчатых редукторов марки Ц2У100 и восемь редукторов марки Ц2У250. Вероятность того, что редуктор первой марки изготовлен в цехе № 1, равна 0,7, а второй марки – 0,6. Со склада наудачу выбирают три редуктора. Какова вероятность того, что все они изготовлены в цехе № 1.

5.4.1.7 В аудитории установлены ноутбуки, которые произведены тремя фирмами HP, Acer и ASUS. Их общее количество в аудитории относится как 2:3:5. Вероятность того, что ноутбук HP находится в системе «ожидания», равна 0,2, ноутбук Acer – равна 0,3, ноутбук ASUS – равна 0,1. Человек зайдя в аудиторию, случайным образом выбирает два ноутбука. Найти вероятность того, что человек выберет два ноутбука, которые находятся в системе «ожидания».

5.4.1.8 В коробке находятся 18 триодов с маркировкой 6С19П и 9 с маркировкой 6С33С. Вероятность того, что триод 6С19П бракованный, равна 0,1, а триод 6С33С – равна 0,15. Найти вероятность того, что четыре случайно выбранных диода не являются бракованными.

5.4.1.9 Имеются зарядные устройства трёх типов, общее количество которых относится как 4:6:8. Вероятность того, что не работает устройство первого, второго, третьего типа, соответственно равна 0,4; 0,1; 0,6. Какова вероятность того, что взятые случайным образом два зарядных устройства будут работать?

5.4.1.10 В ящике находятся конденсаторы двух марок: 10 конденсаторов марки 682М и 14 конденсаторов марки 473К. По данным статистики в партии из 100 конденсаторов марки 682М, три конденсатора не проходят проверку на качество. В точно такой же партии марки 473К, пять конденсаторов не проходят проверку на качество. Из ящика наугад берут три конденсатора. Найти вероятность того, что они пройдут проверку на качество.

5.4.1.11 В наличии имеются покрышки трёх маркировок: десять покрышек, которые имеют маркировку R13/65/195; четырнадцать – маркировку R15/60/205; десять – маркировку R17/50/230. Вероятность того, что боковой порез имеет покрышка первой, второй, третьей маркировки, соответственно равна 0,1; 0,3; 0,4. Найти вероятность того, что случайно выбранная пара покрышек любой маркировки не будет иметь бокового пореза.

5.4.1.12 На складе имеются 10 рулевых наконечников одной марки и 12 наконечников другой марки. Вероятность того, что рулевой наконечник первой марки изготовлен фирмой Febbe, равна 0,4, второй – равна 0,7. Со склада наудачу берут четыре рулевых наконечника. Какова вероятность того, что все четыре наконечника изготовлены фирмой Febbe?

5.4.1.13 На площадке находятся восемь автомобилей Ford, десять автомобилей BMW и четыре автомобиля Opel. Вероятность того, что заведётся с первого раза автомобиль Ford, BMW, Opel, соответственно равна 0,94; 0,96; 0,92. Какова вероятность того, что два случайно выбранных автомобиля заведутся с первого раза?

5.4.1.14 Два автомата производят однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления стандартного изделия I автоматом равна 0,95, II автоматом – 0,9. Производительность второго автомата в три раза больше, чем первого. С конвейера наугад берут три изделия. Какова вероятность того, что эти изделия стандартны?

5.4.1.15 В автомобильном боксе в случайном порядке лежат пары тормозных колодок трёх марок. Среди них имеются 4 пары колодок марки E290R-01143/035, шесть пар колодок марки E130R-01146/015 и восемь пар колодок E990R-1012E. Вероятность того, что износ имеет пара колодок первой, второй, третьей марки, соответственно равна 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятность того, что мастер случайным образом взявший две пары колодок не обнаружит на них дефекта.

5.4.1.16 На стеллажах в случайном порядке расположены 8 карбюраторов марки 2106-1107010 и 7 карбюраторов марки 2108-1107010. Завод А производит 87 % всех карбюраторов первой марки и 80 % – второй марки. Со стеллажей наудачу взяли четыре карбюратора. Какова вероятность того, что все четыре карбюратора произведены заводом А?

5.4.1.17 В коробке находится восемь транзисторов с маркировкой 1КТ106, десять транзисторов с маркировкой 2Т208 и два транзистора с маркировкой ГТ404Б. Вероятность того, что бракованным может оказаться транзистор маркировки 1КТ106, 2Т208, ГТ404Б, соответственно равна 0,05; 0,07; 0,08. Какова вероятность того, что случайно выбранная пара транзисторов не будет содержать брака?

5.4.1.18 В торговом зале выставлены на продажу телевизоры «Витязь» двух модификаций: 13 телевизоров марки 21CTV 790-7 Delta и 12 телевизоров марки 37CTV 730-3 Micra. Вероятность того, что телевизор первой марки произведён бригадой № 2 телевизионного завода, равна 0,3, второй марки – 0,6. Некоторое предприятие сделало заказ на три телевизора произвольной марки. Какова вероятность того, что предприятие приобретёт телевизоры, которые произведены бригадой № 2?

5.4.1.19 Счётчик может зарегистрировать частицы трёх типов α, β и α. За некоторое время T появилось 12 частиц типа α, 10 частиц типа β и 6 частиц типа γ. Частицы каждого из этих типов улавливаются с вероятностями 0,2, 0,4 и 0,6, соответственно. Найти вероятность того, что счётчик отметит две частицы.

5.4.1.20 На площадке тракторного завода стоят 14 тракторов «Беларус-1021» и 12 тракторов «Беларус-1221.2». Трактора первой марки оборудованы системой навигации в 83 % случаев, второй марки – в 88 %. С площадки выезжают четыре наугад выбранные трактора. Какова вероятность того, что все четыре трактора оборудованы системой навигации?

5.4.1.21 Три рабочих изготавливают однотипные детали, которые поступают на склад. Вероятность изготовления стандартного торцевого изделия I рабочим равна 0,95, II рабочим – 0,9, III рабочим – 0,85. Производительность второго рабочего в три раза больше, чем первого, а производительность третьего в два раза больше, чем второго. Какова вероятность того, что наугад взятые со склада два изделия не будут отвечать стандарту?

5.4.1.22 В мешочке находятся 15 болтов из нержавеющей стали марки А4-60 и 13 болтов марки А4-70. По данным отдела технического контроля завода, который выпускает указанные болты, имеют повреждения в резьбе 2 % болтов А4-60 и 3 % болтов марки А4-70. Из мешочка наугад достаём три болта. Какова вероятность того, что все эти болты будут содержать повреждения в резьбе?

5.4.1.23 В продажу поступили восемь аккумуляторов 6СТ-60 Аз FORSE, пять аккумуляторов 6СТ-74 АзЕ FORSE и семь аккумуляторов 6СТ-50 Аз(1) FORSE. Вероятности того, что полностью заряжены аккумуляторы первой, второй, третьей марки, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что случайным образом приобретённый аккумулятор полностью заряжен.

5.4.1.24 Два цеха производят однотипные головки блока цилиндра, которые после производства поступают в отдел контроля. Вероятность изготовления бракованной головки блока цилиндра для первого цеха равна 0,05, для второго – 0,1. Производительность выпуска продукции второго цеха в четыре раза больше, чем первого. В отделе контроля наугад берут четыре головки блока цилиндра. Какова вероятность того, что все эти головки не являются бракованными?

5.4.1.25 В инструментальном ящике лежат семь резисторов ОМЛТ-2, девять резисторов ПТМН-1 и шесть резисторов УЛМ. Вероятность того, что неисправен резистор ОМЛТ-2, ПТМН-1, УЛМ, соответственно равна 0,4; 0,3; 0,2. Какова вероятность того, что случайно взятые два резистора будут исправны?

5.4.1.26 На склад готовой продукции некоторого завода поступили 9 бензонасосов класса A и 7 бензонасосов класса B. Вероятность того, что бензонасос класса A изготовлен в первом цехе, равна 0,7, а бензонасос класса B – 0,4. Со склада случайным образом берут три бензонасоса. Какова вероятность того, что все эти бензонасосы изготовлены в первом цехе завода?

5.4.1.27 На склад готовой продукции предприятия поступило 15 стиральных машин марки «Атлант», причём четыре имеют модификацию MULTI FUNCTION CMA60C87, пять – MULTI FUNCTION CMA60C107, шесть – MULTI FUNCTION CMA50C87. Каждую пятая, седьмая, восьмая стиральную машину соответствующих модификаций предприятие отправляется на экспорт. Найти вероятность того, что на экспорт будут отправлены две случайно выбранные со склада стиральные машины.

5.4.1.28 В продаже имеются 9 телефонных аппаратов марки «Горизонт ТА 852» и 11 аппаратов марки «Горизонт ТА 2185». Вероятность того, что аппарат первой марки имеет красный цвет корпуса, равна 0,5, второй – равна 0,4. Найти вероятность того, что среди случайно выбранных четырёх аппаратов все четыре имеют красный цвет корпуса.

5.4.1.29 На наблюдательной станции установлено 7 радиолокаторов типа А, 8 радиолокаторов типа В и 5 радиолокаторов типа С. Радиолокатор типа А обнаруживает цель в 85 случаев из 100, локатор типа В – в 90 случаях, а локатор типа С – в 92 случаев из 100. Наблюдатель наугад включает два локатора. Какова вероятность обнаружения цели?

5.4.1.30 В продажу поступило 16 радиоприёмников Philips AE2160 и 8 радиоприёмников Philips AJ3138. Вероятность того, что радиоприёмник Philips AE2160 сможет принимать передачи на коротких волнах, равна 0,8, а для радиоприёмника Philips AJ3138 эта вероятность равна 0,9. Случайным образом выбирают для покупки три радиоприёмника. Найти вероятность, что все эти радиоприёмники принимают передачи на коротких волнах.

6 СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Содержание: последовательность независимых испытаний, формула Бернулли, нахождение вероятностей событий в условиях схемы Бернулли, наивероятнейшее число наступления события в условиях схемы Бернулли.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

6.1.1 Формула Бернулли

На практике часто встречаются задачи, которые связаны с многократно повторяющимися испытаниями, в результате которых может произойти или не произойти некоторое событие A.

Событие A называется независимым в данной системе испытаний, если вероятность наступления этого события в каждом отдельно взятом испытании не зависит от исходов наступления этого события в других испытаниях.

Если в серии повторных испытаний событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, которая не зависит от номера испытания, то данная серия называется схемой Бернулли. Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеется только два исхода:

а) событие A – «успех»;

б) событие $\overline{A}$ – «неудача».

События наступают с постоянными вероятностями $P(A) = p, P(\overline{A}) = q$, а так как, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, то $p + q = 1$.

Рассмотрим задачу: в условиях схемы Бернулли определить вероятность $P_n(m)$, где $0 \le m \le n$, того, что при n испытаниях событие A, имеющее одну и ту же вероятность $P(A) = p$ для каждого отдельного испытания, появится ровно m раз.

Благоприятные серии испытаний, для события A, можно записать в виде:

$$A_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_2} \cdot A_{\alpha_3} \cdot ... \cdot A_{\alpha_n} \ \ (i = \overline{1,n}),$$

где A_{α_i} совпадает с событием A или событием $\overline{A}$. Причём событие A встречается ровно m раз, а событие $\overline{A}$ ровно $n-m$ раз. Так как испытания независимы, то вероятность реализации одной такой благоприятной серии равна $p^m q^{n-m}$, где $p = P(A),\ q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Все благоприятные серии получаются в результате выбора различных m номеров из общего количества n номеров, а, следовательно, число серий таких испытаний равно C_n^m.

Тогда, по теореме сложения вероятностей, для случая несовместных событий, получаем, что вероятность наступления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (6.1.1.1)$$

Эта формула называется биномиальной, так как её правая часть представляет собой (m+1)-й член бинома Ньютона:

$$(q+p)^n = C_n^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot q^{n-1} \cdot p + C_n^2 \cdot q^{n-2} \cdot p^2 + ... + C_n^n \cdot p^n.$$

Если числу m придавать значения $0, 1, 2, 3, ..., n$ получим соответствующую последовательность вероятностей: $P_n(0), P_n(1), P_n(2), ..., P_n(n)$. Совокупность данной последовательности вероятностей называют биномиальным законом распределения вероятностей. Так как множество $\{0,1,2,3,...,n\}$ числа появления события при n независимых испытания образуют полную группу событий, то $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(n) = 1$.

Биномиальный закон распределения вероятностей даёт возможность определить вероятность того, что событие A, в n независимых испытаниях появится не менее m_1 раз, но не более m_2 раза:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + ... + P_n(m_2 - 1) + P_n(m_2). \qquad (6.1.1.2)$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p, то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет, по крайней мере, один раз, находится по формуле

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} \qquad (6.1.1.3)$$

6.1.2 Наивероятнейшее число наступления события

Определение 6.1.2.1 Число m_0 называется *наиболее вероятным* или *наивероятнейшим числом* появления события A в серии n испытаний, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях m_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число появления события определяем из неравенства:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p. \qquad (6.1.2.1)$$

Так как $p + q = 1$, то в решении последнего неравенства найдется, по крайней мере, одно целое число m_0.

6.1.3 Полиномиальное распределение

Предположим, что в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из k попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_k$ соответственно $\left(p_1 + p_2 + ..., + p_k = 1\right)$. Обозначим через m_i число тех испытаний, в которых произошло событие A_i, где $i = \overline{1, k}$ и $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$. Тогда вероятность того, что событие A_1 наступит ровно m_1 раз, событие A_2 наступит ровно m_2 раза, …, событие A_k наступит m_k раз, в серии n независимых испытаниях определяется равенством

$$P_n\left(m_1, m_2, ..., m_k\right) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}. \qquad (6.1.3.1)$$

При значении $k = 2$ полиномиальное распределение становится биномиальным распределением.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попадания в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,2. Стрелок сделал шесть выстрелов. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$ровно одно попадание$\}$, $B = \{$ровно два попадания}, $C = \{$не менее трёх, но не более пяти попаданий$\}$, $D = \{$не более пяти попаданий$\}$.

Решение. В каждом отдельно взятом эксперименте вероятность попадания стрелком в «яблочко» при одном выстреле одна и та же, и равна $p = 0,2$. Соответственно, вероятность промаха стрелком при одном выстреле равна $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. При этом, попадание стрелком в «яблочко», при одном отдельно взятом выстреле, не зависит от попаданий в цель при других выстрелах. Поэтому данный опыт подчиняется схеме Бернулли. При нахождении вероятностей заданных событий воспользуемся формулой Бернулли (6.1.1.1). Всего произведено $n = 6$ выстрелов.

$$P(A) = P_6(1) = C_6^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{6-1} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0,2 \cdot 0,8^5 = 6 \cdot 0,2 \cdot 0,32768 = 0,393216.$$

$$P(B) = P_6(2) = C_6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{6-2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4 = 15 \cdot 0,04 \cdot 0,4096 = 0,24576.$$

$$P(C) = P_6(3 \le m \le 5) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) = C_6^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{6-3} + C_6^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{6-4} +$$

$$+ C_6^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{6-5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^3 + \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2 + \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^1 =$$

$$= 20 \cdot 0,008 \cdot 0,512 + 15 \cdot 0,0016 \cdot 0,64 + 6 \cdot 0,00032 \cdot 0,8 = 0,098816.$$

$$P(D) = P_6(0 \le m \le 5) = 1 - P_6(6) = 1 - C_6^6 \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^{6-6} = 1 - 1 \cdot 0,000064 \cdot 1 = 0,999936.$$

6.2.2 Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,9. Какова вероятность того, что среди восьми изделий не более одного нестандартного?

Решение. Пусть событие $A = \{$среди восьми изделий не более одного нестандартного$\}$, событие $B = \{$среди восьми изделий нет ни одного нестандартного$\}$, а событие C состоит в том, что среди восьми изделий только одно нестандартное. Тогда событие A можно представить в виде суммы двух несовместных событий: $A = B + C$. Воспользуемся теоремой суммы для несовместных событий и формулой Бернулли $\left(q = 0,9,\ p = 1 - q = 0,1,\ n = 8\right)$.

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = C_8^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^8 + C_8^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^7 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0,9^8 + 8 \cdot 0,1 \cdot 0,9^7 = 0,43046721 + 0,38263752 = 0,81310473.$$

6.2.3 В коридоре учебного здания установлено 6 сигнализаторов пожарной безопасности. Каждый сигнализатор срабатывает с вероятностью 0,95 на дым. Какова вероятность того, что во время задымления сработает, по крайней мере, один из сигнализаторов?

Решение. Пусть событие $A=\{$во время задымления сработает, по крайней мере, один из сигнализаторов$\}$. В данной задаче $n=6$, $1\le m\le 6$, $p=0{,}95$, $q=1-p=0{,}05$. Переходя к противоположному событию $\overline{A}=\{$во время задымления не сработает ни один из сигнализаторов$\}$, получаем

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-P_6(0)=1-C_6^0\cdot 0{,}95^0\cdot 0{,}05^6=1-0{,}05^6=0{,}999999984375.$$

6.2.4 За один час на станке изготавливается 61 деталь. За сколько часов с вероятностью 0,975 изготавливается, по крайней мере, одна бракованная деталь, если каждая деталь, изготовленная на станке, может не удовлетворять стандарту с вероятностью 0,02?

Решение. Применяя формулу (6.1.1.3), находим вначале количество изготовляемых деталей, чтобы с вероятностью $P=0{,}975$ можно было утверждать наличие, по крайней мере, одной бракованной детали, если вероятность брака одной детали равна $p=0{,}02$:

$$n\ge\frac{\ln(1-0{,}975)}{\ln(1-0{,}02)}=\frac{\ln 0{,}025}{\ln 0{,}98}\approx 183.$$

Следовательно, за время $t=183/61=3$ часа на станке с вероятностью 0,975 изготавливают, по крайней мере, одну бракованную деталь.

6.2.5 На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 – мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Найти вероятность получения трёх крупных и двух мелких выигрышей.

Решение. Рассмотрим событие $A=\{$получение трёх крупных и двух мелких выигрышей$\}$. Так как куплено всего 15 билетов, то десять билетов не подразумевают выигрыша. Условие задачи соответствует полиномиальному распределению вероятностей: $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}7$, $p_1+p_2+p_3=1$, $n=15$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=n-m_1-m_2=15-3-2=10$. Найдём вероятность события A:

$$P(A)=P_{15}(3,2,10)=\frac{15!}{3!\cdot 2!\cdot 10!}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}7^{10}=0{,}033930926.$$

6.2.6 Восемьдесят пять процентов всей произведённой продукции предприятием оказывается продукцией первого сорта. Найти наивероятнейшее число изделий первого сорта в партии из 893 случайно выбранных изделий.

Решение. Для определения невероятнейшего числа изделий первого сорта из 893 случайно выбранных изделий воспользуемся формулой (6.1.2.1), при условии $p = 0{,}85$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

$$893 \cdot 0{,}85 - 0{,}15 \le m_0 \le 893 \cdot 0{,}85 + 0{,}85 \text{ или } 758{,}9 \le m_0 \le 759{,}75.$$

Так как число изделий может быть только целым числом, то наивероятнейшее число m_0 изделий первого сорта равно 759.

6.2.7 Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шестёрки было равно 50?

Решение. Вероятность выпадения шестёрки при бросании игральной кости равна $p = 1/6$, а её не выпадения – $q = 5/6$, при однократном бросании игральной кости. Наивероятнейшее число выпадения 6, по условию задачи, равно $m_0 = 50$. Для определения числа испытаний воспользуемся формулой (6.1.2.1):

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 50 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ или } n - 5 \le 300 \le n + 1.$$

От двойного неравенства переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} n - 5 \le 300, \\ n + 1 \ge 300, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n \le 305, \\ n \ge 299. \end{cases}$$

Число бросков игральной кости может быть только целым числом. Поэтому, для того чтобы, наивероятнейшее число выпадения шестёрки равнялось 50, игральную кость необходимо подбросить от 299 до 305 раз.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Монету подбрасывают шесть раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: а) ровно один раз; б) ровно пять раз; в) не менее двух, но не более трёх раз; г) не более пяти раз.

6.3.2 Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятности того, что число три выпадет: а) ровно пять раз; б) ровно два раза; в) не менее двух раз; г) менее двух раз. Вычислить вероятность того, что число 3 не выпадет ни одного раза.

6.3.3 Техническая система состоит из 6 узлов. Вероятность нарушения работы в течение времени T для каждого узла равна 0,2. Система выходит из строя, если нарушения режима работы происходит не менее чем в 4-х узлах. Найти вероятность выхода системы из строя за время T, если нарушение режима работы для каждого узла не зависит от состояния работы в других узлах.

6.3.4 По каналу связи передаются 8 сообщений. Каждое из сообщений независимо друг от друга искажаются помехами с вероятностью 0,15. Найти вероятности следующих событий: $A=$ {из восьми сообщений ровно три будут искажены помехами}, $B=$ {не менее трёх из восьми сообщений будут переданы неискажёнными}, $C=$ {не более половины всех передаваемых сообщений будут искажены}, $D=$ {все сообщения будут приняты без искажений}; $E=$ {не менее одного сообщения будет искажено}.

6.3.5 При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено десять новых электролампочек. Каждая электролампочка в течение года перегорает с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включённых лампочек придётся заменить новыми.

6.3.6 Человек, принадлежащий к определённой группе населения, с вероятностью 0,3 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,4 – блондином, с вероятностью 0,2 – шатеном и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятность того, что в составе группы будет: а) хотя бы один рыжий; б) не меньше пяти блондинов; в) равное число блондинов и брюнетов.

6.3.7 Вероятность попадания в «яблочко» при одном выстреле равна 0,4. Сколько необходимо произвести независимых выстрелов, чтобы вероятность, по крайней мере, одного попадания в «яблочко» была больше 0,95?

6.3.8 Вероятность того, что в анкете клиента не проставлен месяц её заполнения, равна 0,6. В наличии имеется 285 анкет клиента предназначенных для заполнения. Среди этих анкет найти наивероятнейшее число анкет, в которых проставлен месяц заполнения.

6.3.9 Вероятность того, что данный гандболист забросит мяч в ворота, равна 0,7. Гандболист сделал восемь бросков по воротам. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

6.3.10 Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 60.

6.3.11 Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,9, а при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в три раза. Произведено три выстрела. Найти вероятности следующих событий: $A=$ {хотя бы одно попадание}, $B=$ {ровно одно попадание}.

6.3.12 По вертолёту производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в вертолёт при одном выстреле равна 0,2. Для выведения вертолёта из строя достаточно трёх попаданий. При одном попадании вероятность вывода вертолёта из строя равна 0,7, а при двух – 0,9. Найти вероятность того, что вертолёт будет выведен из строя.

6.3.13 На заводе производятся изделия, каждое из которых с вероятностью 0,02 являются нестандартными. Какой должен быть объём случайной выборки с возвращением, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно нестандартное изделие была не менее 0,98?

6.3.14 На отрезок AB длиной 10 см наудачу брошены шесть точек. Найти вероятность того, что четыре точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем 2 см, а две – на расстоянии, большем 2 см. В условии задачи предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

6.3.15 На предприятии по выпуску инфокиосков производятся их испытание. При каждом испытании инфокиоск выходит из строя с вероятностью 0,12. После первого испытания инфокиоск ремонтируется, после второго – признаётся негодным. Найти вероятность того, что инфокиоск окончательно выйдет из строя точно при пятом испытании.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

6.4.1.1 Вероятность того, что плита марки ФБС 9.4.6 нестандартна, равна 0,16. Имеется 15 плит. Найти наивероятнейшее число стандартных бетонных плит этой марки и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в партии будет находиться не менее 6, но не более 8 стандартных плит.

6.4.1.2 Вероятность того, что транзистор марки 1КТ106 неисправен, равна 0,14. В коробке находятся 14 транзисторов. Найти наивероятнейшее число исправных транзисторов и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в коробке находятся не менее 13 исправных транзисторов.

6.4.1.3 Вероятность того, что двухступенчатый цилиндрический редуктор имеет марку Ц2У100, равна 0,28. Наугад выбирают 13 редукторов. Найти наивероятнейшее число редукторов Ц2У100 в партии из 13 редукторов и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в партии будет не более двух редукторов Ц2У100.

6.4.1.4 Корпус телевизора «Горизонт 32 CD 840 Classic» не имеет серебристого цвета с вероятностью 0,6. Выбрано 12 телевизоров этой марки. Найти наивероятнейшее число телевизоров с корпусом серебристого цвета и соответствующую вероятность. Определить, что среди выбранных телевизоров будет не менее двух с корпусом серебристого цвета.

6.4.1.5 Вероятность того, что болт из нержавеющей стали имеет маркировку А2-50, равна 0,54. Выбирают 11 болтов. Найти наивероятнейшее число болтов этой марки и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в этой партии будет не более 9 болтов с маркировкой А2-50.

6.4.1.6 Вероятность того, что пара тормозных колодок имеет дефект, равна 0,12. В наличии имеется 10 пар тормозных колодок. Найти наивероятнейшее число колодок, не имеющих дефекта и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в партии будет находиться не менее 4, но не более 6 пар тормозных колодок, которые не имеют дефекта.

6.4.1.7 Вероятность того, что резистор ОМЛТ-2 неисправен, равна 0,18. В коробке находится 9 резисторов. Найти наивероятнейшее число исправных резисторов и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в коробке находится не менее 7 исправных резисторов.

6.4.1.8 Вероятность того, что рулевые наконечники не изготовлены на фирме Febbe, равна 0,38. Наугад выбирают 8 рулевых наконечников. Найти наивероятнейшее число рулевых наконечников фирмы Febbe и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в партии будет не более трёх рулевых наконечников фирмы Febbe.

6.4.1.9 Радиоприёмник не принимает радиоволны с диапазоном 5,9–26,1 МГц с вероятностью 0,14. Наудачу выбирают 15 радиоприёмников. Найти наивероятнейшее число радиоприёмников, принимающих радиоволны с диапазоном 5,9–26,1 МГц, и соответствующую вероятность. Определить, что среди выбранных радиоприёмников будет не менее трёх, которые принимают этот диапазон.

6.4.1.10 Вероятность того, что гаечный ключ является торцевым, равна 0,28. В наборе содержится 14 гаечных ключей. Найти наивероятнейшее число торцевых ключей в этом наборе и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в наборе будет не более 12 торцевых ключей.

6.4.1.11 Каждая из 13 покрышек маркировки R/13/65/195, которые хранятся в гараже, может иметь боковой порез с вероятностью 0,17. Найти наивероятнейшее число покрышек, которые не имеют бокового пореза, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в гараже будет находиться не менее 3, но не более 5 покрышек, которые не имеют бокового пореза.

6.4.1.12 Вероятность попадания футболистом мячом в ворота равна 0,6. Футболистом выполнено 18 ударов в направлении футбольных ворот. Найти наивероятнейшее число попаданий в ворота и соответствующую вероятность попаданий. Определить вероятность того, что футболист поразит ворота не менее 17 раз.

6.4.1.13 На выставке трактор «Беларус-80.1» не может быть представлен с вероятностью 0,4. Было представлено 11 тракторов. Найти наивероятнейшее число тракторов «Беларус-80.1», которые представлены на выставке, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди представленных на выставке тракторов будет не более двух тракторов «Беларус-80.1».

6.4.1.14 Вероятность того, что машина загружена бетоном марки М150, равна 0,13. С завода отправлено 10 машин, загруженных бетоном. Найти наивероятнейшее число машин, отправленных с завода, которые не загружены бетоном марки М300, и соответствующую вероятность. Определить, что среди отправленных машин будет не менее четырёх не загруженных бетоном указанной марки.

6.4.1.15 Тридцать процентов студентов после окончания вуза не работают по специальности. Наугад выбрано 9 выпускников вуза. Найти наивероятнейшее число выпускников работающих по специальности и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди этих выпускников не более 7 будут работать по специальности.

6.4.1.16 Вероятность того, что ноутбук фирмы Samsung в течение рабочего дня не будет подключён к сети, равна 0,13. В организации установлено 12 ноутбуков. Найти наивероятнейшее число ноутбуков, которые подключены к сети в течение рабочего дня, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в сети будет работать не менее 2, но не более 4 ноутбуков фирмы Samsung.

6.4.1.17 Вероятность того, что телефон марки LG будет приобретен покупателем, равна 0,14. За некоторый период времени приобретено 15 телефонов. Найти наивероятнейшее число телефонов марки LG, которые приобретены за этот период времени, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что за этот период времени было приобретено не менее 13 телефонов марки LG.

6.4.1.18 Вероятность того, что у частного предпринимателя находятся в наличии аккумуляторы марки «092S40050S4 Silver», равна 0,46 . Найти наивероятнейшее число аккумуляторов указанной марки из 12 выбранных аккумуляторов, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в числе выбранных аккумуляторов не более трёх аккумуляторов указанной марки.

6.4.1.19 На складе имеются карбюраторы различных марок. Вероятность того, что карбюратор имеет марку «2105-1107010-20», равна 0,67. Выбрано 12 карбюраторов. Найти наивероятнейшее число карбюраторов указанной марки и соответствующую вероятность. Определить, что среди выбранных карбюраторов будет не менее 11 карбюраторов, которые имеют марку «2105-1107010-20».

6.4.1.20 Вероятность того, что болт из нержавеющей стали имеет маркировку А2-50, равна 0,54. Выбирают 11 болтов. Найти наивероятнейшее число болтов этой марки и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в этой партии будет не более 9 болтов с маркировкой А2-50.

6.4.1.21 Каждая из 17 книг на книжной полке может иметь брак в переплёте с вероятностью 0,11. Найти наивероятнейшее число книг, которые не имеют брака в переплёте, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что на полке находятся не менее 10, но не более 12 книг, которые не имеют брака в переплёте.

6.4.1.22 Вероятность того, что автомобиль Ford будет поставлен на автостоянку, равна 0,3. На автостоянку поставлено 15 автомобилей . Найти наивероятнейшее число автомобилей Ford, которые поставлены на автостоянку, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что на автостоянке будет оставлено не менее 14 автомобилей Ford.

6.4.1.23 На заводе производят бетон трёх марок. В каждом третьем контейнере, заполненным бетоном, находится бетон марки М300. С завода на производство отправлено 15 контейнеров с бетоном. Найти наивероятнейшее число контейнеров, в которых нет бетона марки М300, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди отправленных контейнеров будет не более трёх, которые содержат бетон марки М300.

6.4.1.24 Вероятность того, что в телевизоре не установлен импортный кинескоп, равна 0,18. Наудачу выбирают 12 телевизоров. Найти наивероятнейшее число телевизоров с импортным кинескопом и соответствующую вероятность. Определить, что среди выбранных телевизоров не менее четырёх имеют импортный кинескоп.

6.4.1.25 В наборе имеются 12 диодов. Вероятность того, что диод не имеет маркировку 2Т231, равна 0,22. Найти наивероятнейшее число диодов, которые имеют маркировку 2Т231, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в наборе будет не более 10 диодов с маркировкой 2Т231.

6.4.1.26 Каждый из 14 автомобилей, которые находятся в гаражном боксе, не имеет марку BMW с вероятностью 0,74. Найти наивероятнейшее число автомобилей BMW, которые находятся в боксе, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в боксе будет находиться не менее 4, но не более 6 автомобилей марки BMW.

6.4.1.27 Вероятность того, что холодильник не имеет маркировку «Атлант ХМ 4307», равна 0,43. С оптовой базы в торговые точки отправлены 16 холодильников. Найти наивероятнейшее число холодильников марки «Атлант ХМ 4307», которые отправлены с оптовой базы, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что оптовая база отправила в торговые точки не менее 14 холодильников «Атлант ХМ 4307».

6.4.1.28 В течение недели фирма установила 12 спутниковых антенн «НТВ ПЛЮС». Вероятность того, что заказчик не сделает заказ на антенну с тюнером Openbox X-540, равна 0,37. Найти наивероятнейшее число спутниковых антенн с тюнером Openbox X-540, которые были установлены фирмой заказчикам, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди установленных антенн будет не более 11 с тюнером Openbox X-540.

6.4.1.29 В течение дня индивидуальным предпринимателем было продано 8 зарядных устройств. Вероятность продажи зарядного устройства SAM D880 равна 0,37. Найти наивероятнейшее число зарядных устройств SAM D880, проданных индивидуальным предпринимателем в течение дня, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди проданных зарядных устройств будет не более 6 марки SAM D880.

6.4.1.30 Каждый четвёртый триод, который находится в коробке, не имеет маркировки 6Н1П. Из коробки наугад извлекают 13 триодов. Найти наивероятнейшее число триодов 6Н1П, которые извлечены из коробки, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что будет извлечено не менее 8, но не более 10 триодов 6Н1П.

7 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Содержание: теорема Пуассона, локальная теорема Муавра – Лапласа, интегральная теорема Муавра – Лапласа, закон больших чисел в схеме Бернулли.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Если число испытаний велико, то вычисление по формуле Бернулли становится затруднительным. Поэтому возникает вопрос о вычислении таких вероятностей с помощью приближенных формул. Ответ на этот вопрос дают предельные теоремы в схеме Бернулли.

7.1.1 Теорема Пуассона

Если рассматривается большое число независимых испытаний при малой вероятности p (будем считать, что $p < 0{,}1$) наступления события в каждом отдельном взятом испытании, вероятность $P_n(m)$ вычисляется по формуле Пуассона.

Теорема (Пуассона) Если вероятность события A в каждом отдельно взятом испытании из серии n независимых испытаний равна $\frac{\mu}{n}$, где $\mu > 0$ не зависит от числа испытаний n, то вероятность того, что событие наступит ровно m раз, в $n \to \infty$ опытах равна

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}, \tag{7.1.1.1}$$

где $\mu = n \cdot p$.

Значения распределения Пуассона можно определить по специальным таблицам (приложение, табл. А.1). Иногда распределение Пуассона называют законом распределения больших чисел или законом редких явлений.

7.1.2 Локальная теорема Муавра – Лапласа

Если в условиях схемы Бернулли проводится большое число испытаний, а вероятность наступления события A, в каждом из отдельно взятых испытаний, не слишком близка к нулю и единице, то вычисление вероятностей событий по формуле Бернулли вызывают определённые технические затруднения при расчётах. В этом случае приближенную формулу вычисления вероятности $P_n(m)$, того, что событие A наступит ровно m раз в системе n независимых испытаниях, устанавливает теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 7.1.2.1 (локальная теорема Муавра – Лапласа) Пусть $p = P(A)$ – вероятность наступления события A, в отдельно взятом испытании, в системе n независимых испытаниях, причем данная вероятность не слишком близко к нулю и к единице. Вероятность того, что событие A при значении $n \to \infty$ наступит, ровно m раз, определяется по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{7.1.2.1}$$

где $q = 1 - p$, а $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Введя функцию: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, получаем формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \tag{7.1.2.2}$$

Значения функции $\varphi(x)$, определяются по таблицам (приложение 2), причем в таблице заданы значения функции $\varphi(x)$, только для переменных $x \ge 0$, так как, функция $\varphi(x)$ является четной и $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При значениях переменной $x > 5$ функция $\varphi(x)$ практически равна нулю.

7.1.3 Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Определим в условиях схемы Бернулли вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что событие A, наступающее с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ (вероятность не слишком близка к нулю и единице) в одном испытании, в серии n независимых испытаниях, наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 раза. В данном случае используется интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 7.1.3.1 (интегральная теорема Муавра – Лапласа) Пусть m – число наступления события A в серии $n \to \infty$ независимых испытаний, а p – вероятность, которая не слишком близка к нулю и к единице, наступления этого события в одном отдельно взятом испытании. Тогда вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз, но не более m_2, в данной серии из n независимых испытаний, равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{7.1.3.1}$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Введем функцию Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, значение которой можно определить по таблице (приложение, табл. А. 3). Тогда формулу (7.1.3.1) можно записать в виде

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \tag{7.1.3.2}$$

Укажем основные свойства функции Лапласа:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) наиболее употребляемые значения: $\Phi(1) = 0{,}34134$, $\Phi(2) = 0{,}47725$, $\Phi(3) = 0{,}49865$, $\Phi(4) = 0{,}499968$;

3) $\Phi(x) = 0{,}5$, при $x > 5$;

4) функция Лапласа монотонно возрастает на множестве действительных чисел, то есть $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$ для всех $x_2 > x_1$;

5) функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = \Phi(x)$.

7.1.4 Закон больших чисел в схеме Бернулли

Выясним, чему равна вероятность того, что в условиях схемы Бернулли, отклонение частоты m/n от вероятности $p = p(A)$ наступления события A не превосходит по абсолютной величине заданного числа ε, т. е. $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$.

Преобразуем неравенство, вероятность которого необходимо найти.

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \le \frac{m - np}{n} \le \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon n \le m - np \le \varepsilon n.$$

Разделим последнее неравенство на величину $\sqrt{npq}$. В результате приходим к неравенству, которое равносильно данному: $-\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \le \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$.

Введём обозначения $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$.

Находим вероятность заданного события.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P\left(-x_1\le x\le x_1\right)\approx\Phi(x_1)-\Phi(-x_1)=\Phi(x_1)+\Phi(x_1)=2\Phi(x_1).$$

Тогда справедливо приближённое равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (7.1.4.1)$$

Если $x>5$, то значение функции Лапласа равно 0,5. Следовательно, при числе испытаний $n\to\infty$, получаем, что величина $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ стремится к единице.

Таким образом, в условиях схемы Бернулли, каким бы не было мало значение ε, с вероятностью сколь угодно близкой к единице, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний, отклонение относительной частоты m/n появления события A от её вероятности $p=P(A)$ по абсолютной величине не превосходит заданного числа ε.

Данное правило называется *законом больших чисел* в условиях схемы Бернулли.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Мини АТС учреждения обслуживает 200 абонентов. Вероятность того, что в течение одного часа один абонент воспользуется услугами мини АТС, равна 0,02. Найти вероятность того, что в течение часа услугами мини АТС воспользуются: а) ровно три абонента; б) не менее двух, но не более четырёх абонентов; в) не менее одного абонента.

Решение. Поскольку число абонентов $n=200$ велико, а вероятность $p=0,02$, использования одним абонентом мини АТС, мала, то воспользуемся теоремой Пуассона. Находим значение $\mu=n\cdot p=200\cdot 0,02=4$.

1. Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят ровно три $(m=3)$ абонента: $P_{200}(3)\approx\frac{4^3}{3!}\cdot e^{-4}\approx 0,1954$. Вероятность $P_{200}(3)$ при значении $\mu=4$ находим по таблице (приложение, табл. А. 1).

1. Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят не менее двух $(m_1=2)$, но не более четырёх $(m_2=4)$ абонентов:

$$P_{200}(2 \le m \le 4) = P_{200}(2) + P_{200}(3) + P_{200}(4) \approx \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} + \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} + \frac{4^4}{4!} \cdot e^{-4} \approx$$

$$\approx 0,1465 + 0,1954 + 0,1954 = 0,5373.$$

3. Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят не менее одного $(m_1 = 1)$ абонента:

$$P_{200}(1 \le m \le 200) = P_{200}(1) + P_{200}(2) + ... + P_{200}(200) = 1 - P_{200}(0) \approx 1 - \frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} \approx 0,9817.$$

7.2.2 Из колоды игральных карт (36 карт, 4 масти) достаём наугад одну карту, записываем её масть и возвращаем её обратно в колоду. Повторяем опыт (достаём карту, а затем возвращаем обратно) 432 раза. Найти вероятность того, что карту бубновой масти достанем ровно сто двадцать три раза.

Решение. По условию $n = 432$, $m = 123$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Так как число испытаний $(n = 432)$ велико, а вероятность $(p = 0,25)$, достать карту бубновой масти в отдельно взятом извлечении карт, не слишком близка к нулю и к единице, то воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа. Находим значение $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{123 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 1,67$. По таблице (приложение, табл. А.2) определяем значение функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ при значении $x = 1,67$: $\varphi(1,67) = 0,09893$. Тогда вероятность того, что из 432 извлечений игральных карт, ровно 123 раза достанем карту бубновой масти, равна

$$P_{432}(123) \approx \frac{1}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(1,67) \approx \frac{1}{9} \cdot 0,0989 \approx 0,011.$$

7.2.3 В условии предыдущей задачи определить вероятность того, что при четырёхсот тридцати двух разовом извлечении одной карты из колоды, карта бубновой масти появится не менее 100, но не более 130 раз.

Решение. Для определения вероятности указанного события воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа. Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx -0,89, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 2,44.$$

Значения $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$ определяем по таблице (приложение, табл. А.3). Тогда вероятность исходного события равна

$$P_{432}(100 \le m \le 130) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2,44) -$$
$$-\Phi(-0,89) = \Phi(2,44) + \Phi(0,89) \approx 0,4927 + 0,3133 = 0,806 .$$

7.2.4 Вероятность того, что деталь нестандартная, равна $p = 0,15$. Найти вероятность того, что среди отобранных случайным образом 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0,15$ по абсолютной величине не более чем на 0,05.

Решение. По условию $n = 400$, $p = 0,15$, $q = 1 - p = 0,85$, $\varepsilon = 0,05$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \le 0,05\right)$. Используя формулу (7.1.4.1), получаем $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \le 0,05\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,15 \cdot 0,85}}\right) = 2 \cdot \Phi(2,80)$. По таблице функции Лапласа (приложение 3) находим значение $\Phi(2,80) \approx 0,4987$. Следовательно, $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \le 0,05\right) \approx 2 \cdot 0,4987 = 0,9974$.

Смысл полученного результата следующий: если взять достаточно большое число выборок по 400 деталей в каждой, то примерно в 99,74 % этих выборок отклонение относительной частоты от вероятности $p = 0,15$ по абсолютной величине не превысит 0,05.

7.2.5 Надёжность определения туберкулёза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90 % (то есть 10 % носителей туберкулёза остаются неопознанными). Сколько человек должны пройти обследование, чтобы с вероятностью 0,9973, можно было утверждать, что относительная частота точного определения туберкулёза, среди людей, которые проходят обследование, отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Решение. По условию $p = 0,9$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \le 0,01\right) = = 0,9973$. Требуется найти n. Воспользуемся формулой (7.1.4.1):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \le 0,01\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{30}\sqrt{n}\right) = 0,9973 .$$

Тогда $\Phi\left(\frac{1}{30}\sqrt{n}\right) = 0,49865$. По таблице функции Лапласа $\Phi(3) = 0,49865$. Следовательно, $\frac{1}{30}\sqrt{n} = 3$, Решая полученное уравнение, имеем $n = 8100$.

Смысл полученного результата следующий: если взять достаточно большое число выборок по 8100 человек в каждой, то примерно в 99,73 % этих выборок отклонение относительной частоты от вероятности $p = 0,9$ по абсолютной величине не превысит 0,01.

7.2.6 Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна $p = 0,7$. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появления события равно $m_0 = 85$. Вычислить вероятность $P_n(m_0)$.

Решение. Для определения числа испытаний воспользуемся формулой (9.1.2.1): $n \cdot 0,7 - 0,3 \le 85 \le n \cdot 0,7 + 0,7$. От двойного неравенства переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} n \cdot 0,7 - 0,3 \le 85, \\ n \cdot 0,7 + 0,7 \ge 85, \end{cases} \text{или} \begin{cases} n \le 121,86, \\ n \ge 120,43. \end{cases}$$

Число наступления события A может быть только целым числом. Поэтому для того чтобы наивероятнейшее число наступления события A равнялось 85, опыт надо провести 121 раз. Найдём вероятность $P_{121}(85)$. Так как число испытаний достаточно велико, а вероятность $p = 0,7$ наступления события в отдельно взятом испытании не слишком близка к нулю и к единице, то воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа:

$$P_{121}(85) \approx \frac{1}{\sqrt{121 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \varphi\left(\frac{85 - 121 \cdot 0,7}{\sqrt{121 \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) \approx 0,198 \cdot \varphi(0,19) \approx 0,198 \cdot 0,392 \approx 0,078.$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 В некотором университете учатся 732 студента, которые родились в одном и том же високосном году. Полагая, что будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней года, найти вероятность того, что не менее четырёх студентов университета родились 29 февраля.

7.3.2 Вероятность покупки клиентом банка слитков золота равна 0,3. Найти вероятность того, что 40 клиентов банка приобретут слитки золота из 200 клиентов, которые обратились в банк.

7.3.3 Всхожесть семян пшеницы равна 0,8. Найти вероятность того, что из 1000 посаженных семян число проросших будет заключено между 780 и 840.

7.3.4 Отдел технического контроля проверяет 800 изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти с вероятностью 0,999936 границы, в которых будет заключено число стандартных изделий среди проверенных изделий.

7.3.5 По статистике каждый восьмой человек из десяти использует платёжную карту при расчётах в торговых сетях. Вычислить вероятность того, что из 2000 человек, которые произвели расчёты в торговых сетях, 1560 человек воспользовались платёжной карточкой.

7.3.6 Вероятность приобретения бриллианта в банке, для одного клиента, равна 0,0025. Найти вероятность того, что среди 800 клиентов банка бриллианты приобретут более двух клиентов.

7.3.7 Выписку по счёту банк выдаёт по первому требованию. Вероятность того, что клиент попросит выдать выписку по счёту, равна 0,3. Какова вероятность того, что из 2000 клиентов банков выписку по счёту попросят выдать не менее 580, но не более 640 клиентов банка.

7.3.8 Устройство для определения банкноты на платёжеспособность определяет фальшивую банкноту с вероятностью 0,9998. Специалист по операционно-кассовой работе проверил на устройстве 10000 купюр. Какова вероятность того, что ровно три фальшивые купюры устройство определило как платёжеспособные.

7.3.9 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Вычислить вероятность того, что из 10000 рождающих детей мальчиков будет не менее 5000, но не более 5200.

7.3.10 Вероятность того, что человек при оплате коммунальных платежей воспользуется услугой «Интернет-банкинг», равна 0,45. Найти вероятность того, что из 4000 человек оплативших коммунальные услуги, ровно 1840 человек воспользовались услугой «Интернет-банкинг».

7.3.11 Каждый человек приходящей в банк с равной вероятностью может воспользоваться электронной очередью или стать в очередь в кассу. Найти такое положительное число ε, для которого с вероятностью 0,76986 абсолютная величина отклонения относительной частоты, использования клиентом банка электронной очереди, от вероятности этого события, не превысит ε.

7.3.12 В урне содержатся красные и синие шары в отношении $4:1$. После извлечения шара отмечают его цвет, и шар возвращают в урну. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9836, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления красного шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины $\varepsilon = 0{,}04$?

7.3.13 Игральную кость бросают 125 раз. Найти с вероятностью 0,999936 границы, в которых будет заключено число m выпадения тройки.

7.3.14 В одном из экспериментов Пирсона по моделированию на вычислительной машине опытов с подбрасыванием правильной монеты из общего числа 24000 «подбрасываний» герб выпал 12012 раз. Студент повторяет эксперимент. Какова вероятность того, что он получит тот же результат? Сколь вероятно при повторении эксперимента получить, по крайней мере, такое же отклонение относительной частоты успехов от вероятности успеха в данном опыте?

7.3.15 Вероятность того, что человек, забрав платёжную карту в банкомате, забудет взять деньги, равна 0,002. В течение некоторого времени банкоматом воспользовались 1000 человек. Найти вероятность того, что ровно один человек забудет забрать деньги в банкомате.

7.3.16 Вероятность того, что студент экономического факультета вуза станет хорошим специалистом, равна 0,8. Через несколько лет после окончания вуза произведена выборка из 100 бывших студентов. Найти вероятность того, что среди выбранных выпускников вуза хорошим специалистом стали: а) не менее 75 и не более 90 бывших студентов; б) не менее 75 бывших студентов; в) не более 74 бывших студентов; г) ровно 75 бывших студентов.

7.3.17 Вероятность появления положительного результата в каждом из n экспериментов равна 0,7. Сколько необходимо произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98758 можно было ожидать, что не менее 180 опытов дадут положительный результат?

7.3.18 Считается, что вероятность найти четырехлистный клевер составляет 0,0004. Некий ботаник исследовал 10000 растений клевера. Какова вероятность того, что не более двух из них являются четырехлистными?

7.3.19 В сети рыбака нацеплялось 1150 пиявок. В течение часа каждая пиявка может отвалиться с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что через час в сетях останется ровно 460 пиявок (отвалившиеся пиявки уползают)?

7.3.20 Напротив окна в течение одной секунды с вероятностью 0,38 пролетает воробей. Какова вероятность того, что количество воробьев, пролетевших напротив окна в течение часа, заключено между 1350 и 1380?

7.3.21 Отдел технического контроля проверяет 400 деталей на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,8. Найти такое положительное число ε, что с вероятностью 0,9912 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления стандартной детали от вероятности 0,8 не превысит число ε.

7.3.22 В кулинарии выпекают булочки, которые с вероятностью 0,33 пахнут ванилью. Какова вероятность того, что в партии из 1000 булочек ровно 330 будут пахнуть ванилью?

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

7.4.1.1 Завод отправил на оптовую базу 2000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,00005. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не менее двух изделий.

7.4.1.2 Вероятность того, что тормозные колодки имеют марку E 990R-1012F, равна 0,45. Найти вероятность того, что ровно 950 из имеющихся 2000 колодок, имеют указанную марку.

7.4.1.3 В парке высажено 1000 деревьев. Берёза может быть посажена с вероятность 0,4. Какова вероятность того, что в парке было посажено не менее 389, но не более 412 берёз?

7.4.1.4 Вероятность того, что деталь бракованная, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 500 деталей не менее трёх окажутся бракованными.

7.4.1.5 Бетонная плита ФБС 12.3.6 выдерживает заданную нагрузку с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что 765 плит из 1000 выдержат заданную нагрузку.

7.4.1.6 Через перекрёсток за время T автомобиль марки Volkswagen проезжает с вероятностью 0,25. Какова вероятность того, что среди 1500 автомобилей, которые проехали через перекрёсток за время T, будет не менее 440 автомобилей марки Volkswagen?

7.4.1.7 Тираж книги равен 1200000 экземпляров. Вероятность того, что книга сброшюрована неверно, равна 0,00000025. Какова вероятность того, что будет сброшюровано неверно не менее четырёх книг тиража?

7.4.1.8 Каждый четвёртый транзистор, выпускаемый заводом, имеет марку ГТ404Б. За определённый период времени завод выпустил 1500 транзисторов. Какова вероятность того, что ровно 400 из них имеют марку ГТ404Б?

7.4.1.9 В приборе установлено 2000 одинаковых блоков, которые дублирую друг друга. Надёжность работы каждого из блоков в течение определённого времени равна 0,4. Вычислить вероятность того, что за этот период времени выйдут из строя не более 1150 блоков.

7.4.1.10 Устройство состоит из 800 элементов. Вероятность выхода любого элемента из строя за некоторое время равна 0,0005. Найти вероятность того, что за это время выйдет из строя, по крайней мере, пять элементов устройства.

7.4.1.11 Покрышка R19/45/260 может получить боковой порез с вероятностью 0,2. Покрышки, указанной марки установлены на 1600 автомобилях. С какой вероятностью ровно 260 покрышек будут иметь боковой порез?

7.4.1.12 При съёмке дорожного движения номер автомобиля не фиксируется с вероятностью 0,12. Определить вероятность того, что номер автомобиля не будет зафиксирован не менее 250, но не более 320 раз, если на камеру сняли 2500 автомобилей.

7.4.1.13 На железнодорожном вокзале установлены 500 автоматов, которые производят продажу билетов. В течение суток каждый автомат может выйти из строя с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что в течение суток выйдут из строя не более шести автоматов?

7.4.1.14 Бетон марки М200 находится в 100 контейнерах. Вероятность того, что бетон этой марки, находящийся в отдельно взятом контейнере, отвечает стандарту, равна 0,98. Какова вероятность того, что ровно в 2 контейнерах из 100 будет находиться бетон марки М200, который не отвечает стандарту?

7.4.1.15 Каждое из 1100 орудий поражает свою цель с вероятностью 0,63. Каждое из орудий произвело выстрел по своей цели. Определить вероятность того, что будет поражено не менее 666 целей.
7.4.1.16 Вероятность того, что купюра является фальшивой, равна 0,00015. Для проверки выбрано 4000 купюр. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее трёх фальшивых купюр.
7.4.1.17 Каждый третий трактор из 540, которые расположены на стоянке, имеет марку «Беларус-1021». Случайным образом производится выбор 138 тракторов. Найти вероятность того, что все 138 тракторов имеют марку «Беларус-1021».
7.4.1.18 Вероятность того, что при перевозке будет повреждено изделие из фарфора, равна 0,15. Произведена перевозка 1000 изделий из фарфора. Найти вероятность того, что при перевозке повреждено не менее 130, но не более 180 изделий из фарфора.
7.4.1.19 Магазин продал партию 400 радиоприёмников. В мастерскую гарантийного ремонта радиоприёмник может попасть с вероятностью 0,00175. Какова вероятность того, что в мастерскую попадут не более дух радиоприёмников?
7.4.1.20 При массовом производстве резисторов ПТМН-1 вероятность брака равна 0,16. С какой вероятностью ровно 361 резистор из 2500 выбранных резисторов на проверку будет иметь брак?
7.4.1.21 При наборе текста вероятность сделать ошибку на одном листе равна 0,12. Было набрано 637 страниц. Вычислить вероятность того, что ошибки будут присутствовать не мене чем на 55, но не более чем на 80 листах.
7.4.1.22 Банкомат может не принять банковскую карточку с вероятностью 0,00025. За сутки банкомат произвёл операции с 3200 карточками. Найти вероятность того, что банкомат не принял не более четырёх карточек.
7.4.1.23 Вероятность того, что на автомобиле установлены рулевые наконечники фирмы Asmetoll, равна 0,6. Найти вероятность того, что на 5870 автомобилях из 10000 установлены рулевые наконечники фирмы Asmetoll.
7.4.1.24 Вероятность того, что расход электроэнергии не превысит ежедневную норму потребления для конкретной квартиры, равна 0,81. В течение суток была проведена запись показаний электросчётчиков в 1200 квартирах. Определить вероятность того, что не менее чем в 1000 квартирах не превышена ежедневная норма расхода электроэнергии.
7.4.1.25 Каждый второй из 1000 транзисторов марки КТ608А. Из партии выбирают наугад 450 транзисторов. Какова вероятность того, что среди этих транзисторов окажется не менее пяти марки КТ608?
7.4.1.26 Каждый третий гаечный ключ, который хранится на складе, является накидным. Найти вероятность того, что при случайном выборе 980 гаечных ключей, ровно 270 из них окажутся накидными ключами.
7.4.1.27 Девяносто процентов доверенностей, которые оформляются у нотариуса, верны. За некоторый период времени нотариус оформил 800 доверенностей. С какой вероятностью он оформил не менее 700, но не более 750 доверенностей, которые верно составлены?

7.4.1.28 Вероятность того, что аккумулятор разрядится в течение суток, равна 0,0014. Найти вероятность того, что при проверке 5000 аккумуляторов, не более шести окажутся разряженными.
7.4.1.29 Вероятность приобретения автомобиля марки Volkswgen в автосалоне равна 0,35. С какой вероятностью среди 780 приобретённых автомобилей ровно 299 автомобилей марки Volkswgen?
7.4.1.30 Каждый человек может отказаться от курения с вероятностью 0,33. Вычислить вероятность того, что среди 10000 когда-либо курящих человек не менее 3500 отказалось от курения.

7.4.2 Решить предложенную задачу своего варианта.
7.4.2.1 Студент по окончании вуза работает по специальности с вероятностью 0,8. вуз закончили 1000 студентов. Найти вероятность того, что по специальности будет работать не более 750 студентов.
7.4.2.2 За некоторый период времени фабрика выпустила 2000 джемперов. Допустить брак при пошиве одного джемпера возможно с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что не менее семи джемперов будут содержать брак?
7.4.2.3 Искривление плоскости головки блока цилиндров может наступить в 32 % случаев. С какой вероятностью искривление плоскости головки блока цилиндров может иметь место в 6666 автомобилях из 20000 проверенных автомобилей?
7.4.2.4 На отдельно взятом предприятии должность главного бухгалтера занимает женщина с вероятностью 0,7. Проведена проверка 1150 предприятий. Какова вероятность того, что на этих предприятиях должность главного бухгалтера занимают не менее 780, но не более 880 женщин.
7.4.2.5 Кузов автомобиля Audi имеет васильковый цвет с вероятностью 0,0012. Через пост в течение некоторого времени проехало 2500 автомобилей Audi. Определить вероятность того, что через пост проехало не более 6 автомобилей марки Audi василькового цвета.
7.4.2.6 При массовом производстве диодов 2Г202 вероятность того, что диод отвечает стандарту, равна 0,88. С какой вероятностью ровно 13250 диод из 15000 диодов, выбранных на проверку, будет отвечать стандарту?
7.4.2.7 Вероятность выхода на линию каждого из 100 троллейбусов трамвайно-троллейбусного парка равна 0,75. Какова вероятность нормальной работы парка, если для этого необходимо, чтобы на линии было не менее 66 троллейбусов?
7.4.2.8 Автомобиль загружается бетоном марки М150 с вероятностью 0,004. Найти вероятность того, что не менее четырёх автомобилей из 1000 автомобилей, которые загружены бетоном, имеют в кузове бетон марки М150.
7.4.2.9 Вероятность того, что двухступенчатый цилиндрический редуктор имеет маркировку Ц2У250, равна 0,53. С какой вероятностью, что среди выбранных наугад 1000 редукторов, ровно 599 имеют маркировку Ц2У250?
7.4.2.10 Игральная кость подбрасывается 800 раз. Найти вероятность того, что число 6 выпадет не более 100 раз.

7.4.2.11 Вдоль дороги установлены 4000 фонарей, каждый из которых может перегореть в течение месяца с вероятностью 0,0025. Какова вероятность того, что в течение месяца перегорят ровно 13 фонарей?

7.4.2.12 Каждый шестой гаечный ключ, который имеется в автомастерской, является рожковым. Найти вероятность того, что при случайном выборе 999 гаечных ключей ровно 199 из них окажутся рожковыми ключами.

7.4.2.13 Тестовое задание содержит 100 вопросов. Каждый вопрос содержит только один правильный ответ из пяти предложенных. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить не менее чем на 10, но не более чем на 30 вопросов тестового задания?

7.4.2.14 Вероятность потери кредитной карточки в течение месяца равна 0,002. Банк выдал 400 кредитных карточек. Определить вероятность того, что в течение месяца кредитную карточку потеряют не менее шести клиентов банка.

7.4.2.15 Износ жиклеров в карбюраторе происходит с вероятностью 0,2. С какой вероятностью ровно 99 карбюраторов из 560 проверенных будут иметь износ жиклёров?

7.4.2.16 Отдел технического контроля проверяет на качество партию деталей в количестве 900 штук. Вероятность того, что деталь отвечает стандарту, равна 0,86. С какой вероятностью в данной партии деталей будет не менее 800 стандартных изделий?

7.4.2.17 Вероятность того, что жители каждого из 20000 районов Земли смогут наблюдать солнечное затмение, равна 0,0003. С какой вероятностью солнечное затмение смогут наблюдать жители не менее восьми районов Земли?

7.4.2.18 В бензонасосе фильтр засоряется с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что из 500 проверенных бензонасосов ровно 110 имеют засорение фильтра.

7.4.2.19 Стиральная машина «Атлант MULTI FUNCTION» имеет маркировку ОМА-60С87 с вероятностью 0,64. На базу поставлено 240 стиральных машин «Атлант MULTI FUNCTION». Какова вероятность того, что среди них не более 150 стиральных машин с маркировкой ОМА-60С87?

7.4.2.20 Монетный двор за некоторый период времени выпустил 100000 монет. На монете можно обнаружить изъян с вероятностью 0,00007. Найти вероятность того, что в партии окажется не более шести монет с изъяном.

7.4.2.21 Болт из нержавеющей стали не имеет повреждений на резьбе с вероятностью 0,88. Определить вероятность того, что ровно 8888 из 10000 проверенных болтов не имеют повреждения на резьбе.

7.4.2.22 Вероятность того, что минеральная вода разлита на СООО «Дарида», равна 0,68. В магазин поступило 1600 бутылок минеральной воды. Найти вероятность того, что среди них на СООО «Дарида» разлито не менее 1000, но не более 1100 бутылок.

7.4.2.23 Телефонная станция обслуживает 7000 абонентов. Вероятность того, что абонент воспользуется телефоном в течение часа, равна 0,001. С какой вероятностью девятнадцать абонентов сделают телефонный звонок?

7.4.2.24 Вероятность того, что на автомобиле установлены не изношенные тормозные колодки, равна 0,78. Вычислить вероятность, что из проверенных 1024 колодок ровно 785 не имеют износа.

7.4.2.25 Вероятность приёма радиосигнала равна 0,14. Произведена передача 180 сигналов. Найти вероятность того, что будет принято не менее 40 сигналов.

7.4.2.26 Каждый третий из 3000 конденсаторов имеет марку А475. Из партии выбирают наугад 900 конденсаторов. Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 900 конденсаторов не более четырёх имеют марку А475?

7.4.2.27 При продаже аккумулятор заряжен на 100 % с вероятностью 0,89. Какова вероятность того, что из 500 проверенных при продаже аккумуляторов ровно 450 будут заряжены на 100 %?

7.4.2.28 При массовом производстве заготовок ключей вероятность брака равна 0,21. Найти вероятность того, что при изготовлении 1480 заготовок не более 262 заготовок будут содержать брак.

7.4.2.29 Вероятность того, что рулевые наконечники, которые хранятся на складе, могут иметь брак, равна 0,01. Со склада в магазин отправлено 900 рулевых наконечников. С какой вероятностью со склада в магазин будет отправлено не менее четырёх рулевых наконечников с браком?

7.4.2.30 Холодильник фирмы «Атлант» имеет марку ХМ 6001-007 с вероятностью 0,47. Найти вероятность того, что ровно 170 холодильников из 300 имеющихся на складе имеют указанную марку.

7.4.3 Решить предложенную задачу своего варианта.

7.4.3.1 Вероятность выхода из строя каждого элемента из 1000 в течение некоторого времени равна 0,21. Какова вероятность того, что за указанное время выйдет из строя ровно 201 элемент?

7.4.3.2 Каждая четвёртая банка кофе имеет торговую марку NESCAFE. На рынок поставлено 30000 банок кофе. С какой вероятностью среди них будет не менее 7200, но не более 7800 банок кофе с торговой маркой NESCAFE.

7.4.3.3 Бетонная плита ФБС 9.4.6 имеет дефект с вероятностью 0,0002. Для проверки на качество проводят диагностику 500 плит. Определить вероятность того, что среди них окажется не более трёх плит с дефектом.

7.4.3.4 Поломка пульта дистанционного управления в течение времени t возможна с вероятностью 0,19. Найти вероятность того, что в течение этого времени выйдут из строя ровно 32 из 100 имеющихся пультов.

7.4.3.5 Компания AHMAD TEA Ltd поставляет чай в 64 страны мира. Коллекция «Достопримечательности Лондона», производства этой компании, поставляется в страну с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что коллекция будет поставлена не менее чем в 50 стран мира.

7.4.3.6 Вероятность после разговора оставить карту в телефонном аппарате равна 0,004. В течение недели телефоном воспользовались 50 абонентов. Какова вероятность того, что за это время 3 абонента оставили карту в телефонном аппарате?

7.4.3.7 При массовом производстве триодов 6С19П вероятность того, что триод не отвечает стандарту, равна 0,13. С какой вероятностью ровно 1111 триодов, из 10000 триодов, выбранных на проверку, будут не отвечать стандарту?
7.4.3.8 Каждый третий автомобиль нарушает рекомендуемый режим скорости, который установлен на автостраде. Какова вероятность того, что из 10000 проехавших по автостраде автомобилей режима скорости нарушили не более 3200 машин?
7.4.3.9 Студент выучил 196 формулы из двухсот необходимых. Экзаменатором на выбор предложено 150 формул. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно две формулы, которые студент не выучил.
7.4.3.10 Телевизионное объединение «Витязь» выпустило 500 DVD проигрывателей различных марок. Вычислить вероятность того, что среди них будет ровно 210 DVD проигрывателей марки DVD-016M, если два из пяти DVD проигрывателей, выпускаемых объединением, имеет эту марку.
7.4.3.11 Вероятность того, что собака породы «той-терьер» будет представлена на выставке собак, равна 0,11. На выставке было представлено 500 собак различной породы. Какова вероятность того, что в выставке участвовало не менее 50, но не более 60 собак породы «той-терьер»?
7.4.3.12 В хранилище музея находится 1000 картин. Любая картина может не иметь подписи автора с вероятностью 0,0004. С какой вероятностью ровно пять картин, которые находятся в хранилище, не имеют подписи автора?
7.4.3.13 Радиоприёмник Vitek VT 3595 принимает волны метрового диапазона с вероятностью равной 0,6. Определить вероятность того, что из 1700 выпущенных радиоприёмников ровно 1000 принимают волны метрового диапазона?
7.4.3.14 Девяносто из ста энергосберегающих ламп не перегорают в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока не перегорят не менее 13600 из имеющихся 15000 энергосберегающих ламп.
7.4.3.15 Зал кинотеатра рассчитан на 1500 зрительских мест. Каждое кресло, которое находится в зале, может получить дефект после сеанса с вероятностью 0,0006. Какова вероятность того, что администратор после киносеанса обнаружит не более трёх кресел, имеющих дефект?
7.4.3.16 Мобильный телефон фирмы Samsung продаётся с вероятностью 0,54. Вычислить вероятность того, что среди проданных 700 телефонов ровно 300 телефонов произведены фирмой Samsung.
7.4.3.17 Вероятность того, что балкон остеклён рамами из ПВХ, равна 0,6. Определить вероятность, что не более 444 балкона из 700 балконов осмотренных работником домоуправления, остеклены рамами из ПВХ.
7.4.3.18 Авиакомпания, занимающаяся перевозками пассажиров и грузов, осуществляла грузоперевозки ровно один раз каждый день 2020 года. Город Томск принял 1464 самолёта этой компании. Найти вероятность того, что среди этих самолётов будет не более 5 самолётов, которые осуществляли грузоперевозку.
7.4.3.19 Девяносто процентов ноутбуков Toshiba не требуют ремонта в течение гарантийного срока. С какой вероятностью не потребуют ремонта 2300 ноутбуков Toshiba из 2500 ноутбуков этой марки в течение гарантийного срока?

7.4.3.20 Всхожесть семян данного сорта пшеницы оценивается с вероятностью, равной 0,78. Какова вероятность того, что из 1300 посеянных семян взойдёт не менее 950, но не более 1050 семян пшеницы.

7.4.3.21 Вероятность того, что оптический диск не соответствует стандарту, равна 0, 007. На проверку выбрано 1000 оптических дисков. С какой вероятностью не менее шести из них не будут соответствовать стандарту?

7.4.3.22 Вероятность того, что фотоаппарат Cannon имеет разрешение 10,0 mega pixels, равна 0,6. Определить вероятность того, что ровно 800 из 1480 фотоаппаратов Cannon, которые имеются в наличии, имеют разрешение 10,0 mega pixels.

7.4.3.23 Тридцать процентов акций на аукционе продаются по первоначальной цене. На аукционе было продано 2200 акций. Какова вероятность того, что не менее 555 акций были проданы по первоначальной цене?

7.4.3.24 На реке имеется 300 мест, в которых баржа может сесть на мель. Баржа садится на мель с вероятностью 0,002. Найти вероятность того, что баржа сядет на мель не более двух раз, если она проходит реку по всей длине.

7.4.3.25 Вероятность того, что у фирмы будет заказ на установку спутниковой антенны с тюнером Openbox X-730PVR, равна 0,8. За некоторое время фирма установила 300 спутниковых антенн. Какова вероятность, что ровно 222 установленные антенны с тюнером Openbox X-730PVR?

7.4.3.26 Вероятность того, что после окончания школы школьник будет подавать документы в вуз, равна 0,7. С какой вероятностью документы в вуз подадут не более 1000 бывших школьников из 1500 выпускников?

7.4.3.27 На предприятиях региона имеется 10000 швейных машин. Вероятность того, что швейная машина имеет класс 1022, равна 0,001. С какой вероятностью на предприятиях региона установлено не менее шести швейных машин указанного выше класса?

7.4.3.28 Четыре телевизора из десяти имеют марку «Витязь 37CTV750-Zodiac». За некоторое время выпущено 600 телевизоров. Вычислить вероятность того, что среди выпущенных телевизоров 213 имеют марку «Витязь 37CTV750-Zodiac».

7.4.3.29 Вероятность, что станок находится в рабочем состоянии, равна 0,82. Найти вероятность того, что среди 150 проверенных станков в рабочем состоянии находятся не менее 100, но не более 120 станков.

7.4.3.30 В парке растёт 5000 деревьев. Ясень в парке мог быть посажен с вероятностью 0,0006. Определить вероятность того, что в парке растёт не более шести ясеней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюкова, Л. Г. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев. – Москва : Инфра-М, 2019. – 160 с.

2. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : Новое знание, 2002. – 250 с.

3. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : ООО «Новое знание», 2004.– 251 с.

4. Булдык, Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов экономических спец. вузов / Г. М. Булдык. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 285 с.

5. Венецкий, И. Г. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов экономических спец. вузов / И. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Статистика, 1975. – 264 с.

6. Высшая математика : методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – Ч. 3 – 4.

7. Высшая математика. Случайные величины в теории вероятностей : методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2015. – 116 с.

8. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика : методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.

9. Высшая математика. Теория вероятностей : методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 102 с.

10. Высшая математика. Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей : методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 101 с.

11. Высшая математика. Элементы математической статистики и линейного программирования : методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2016. – 109 с.

12. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк, 1983. – 280 с.

13. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 5-е, перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1977. – 479 с.

14. Гринберг, А. С. Теория вероятностей и математическая статистика : курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш; Академия управления при Пре-

зиденте Республики Беларусь. – 3-е изд., доп. – Минск : Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2005. – 186 с.

15. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.

16. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк, 1984 . – 223 с.

17. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2007. – 288 с.

18. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350 с.

19. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 606 с.

20. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 5 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1988. – 254 с.

21. Жевняк, Р. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, В. Т. Унукович. – Минск : Харвест, 2000. – 384 с.

22. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с.

23. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике : типовые расчёты / Ю. В. Муранов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.

24. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

25. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.

26. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев [и др.] – Москва : Высш. школа, 1991. – 400 с.

27. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина; под ред. В. А. Колемаева. – Москва : ИНФРА-М, 1997. – 302 с.

28. Корячко, В. П. Интеллектуальные системы и нечеткая логика : учебник для магистров высших учебных заведений / В. П. Корячко, М. А. Бакулева, В. И. Орешков. – Москва : КУРС, 2017. – 347 с.

29. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

30. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Выш. школа, 1978. – 256 с.

31. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980. – 300 с.

32. Маталыцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич ; Министерство образования Республики Беларусь. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.
33. Математика. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра : методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 103 с.
34. Математика. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Операционное исчисление : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 101 с.
35. Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 98 с.
36. Математика. Кратные интегралы. Элементы теории поля. Ряды : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2021. – 108 с.
37. Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 120 с.
38. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1973. – 496 с.
39. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.
40. Теория вероятностей и математическая статистика : для спец. 1-й ступени высшего образования, закрепленных за УМО, в качестве учебно-методического пособия / А. И. Волковец [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 71 с.
41. Теория вероятностей и математическая статистика : задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 77 с.
42. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: электронный учебно-методический комплекс / науч. рук. Ю. С. Харин. – Минск : УО «БГУ», 2010.
43. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1982. – 243 с.
44. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица А.1 – Значения функции распределения Пуассона

$$P\left(X = m\right) = \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}$$

При μ, равном 0,1; 0,2; …; 1,0

m \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8							0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9										0,00000

При μ, равном 2; 3; 4; …; 11

m \ μ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018
2	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242
6	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938
12	0,00000	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259
14		0,00000	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275
15			0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335
16			0,00000	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668
17				0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373

μ / m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18				0,00000	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450
19					0,00001	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840
20					0,00000	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462
21						0,00001	0,00006	0,00026	0,00089	0,00242
22						0,00000	0,00002	0,00011	0,00040	0,00121
23							0,00001	0,00004	0,00018	0,00058
24							0,00000	0,00002	0,00007	0,00027
25								0,00001	0,00003	0,00012
26								0,00000	0,00001	0,00005
27									0,00000	0,00002

Таблица А.2 – Значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица А.3 – Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,37	0,14431	0,73	0,26730	1,10	0,36433
0,01	0,00399	0,38	0,14803	0,74	0,27035	1,11	0,36650
0,02	0,00798	0,39	0,15173	0,75	0,27337	1,12	0,36864
0,03	0,01197	0,40	0,15542	0,76	0,27637	1,13	0,37076
0,04	0,01595	0,41	0,15910	0,77	0,27935	1,14	0,37286
0,05	0,01994	0,42	0,16276	0,78	0,28230	1,15	0,37493
0,06	0,02392	0,43	0,16640	0,79	0,28524	1,16	0,37698
0,07	0,02790	0,44	0,17003	0,80	0,28814	1,17	0,37900
0,08	0,03188	0,45	0,17364	0,81	0,29103	1,18	0,38100
0,09	0,03586	0,46	0,17724	0,82	0,29389	1,19	0,38298
0,10	0,03983	0,47	0,18082	0,83	0,29673	1,20	0,38493
0,11	0,04380	0,48	0,18439	0,84	0,29955	1,21	0,38686
0,12	0,04776	0,49	0,18793	0,85	0,30234	1,22	0,38877
0,13	0,05172	0,50	0,19146	0,86	0,30511	1,23	0,39065
0,14	0,05567	0,51	0,19497	0,87	0,30785	1,24	0,39251
0,15	0,05962	0,52	0,19847	0,88	0,31057	1,25	0,39435
0,16	0,06356	0,53	0,20194	0,89	0,31327	1,26	0,39617
0,17	0,06749	0,54	0,20540	0,90	0,31594	1,27	0,39796
0,18	0,07142	0,55	0,20884	0,91	0,31859	1,28	0,39973
0,19	0,07535	0,56	0,21226	0,92	0,32121	1,29	0,40147
0,20	0,07926	0,57	0,21566	0,93	0,32381	1,30	0,40320
0,21	0,08317	0,58	0,21904	0,94	0,32639	1,31	0,40490
0,22	0,08706	0,59	0,22240	0,95	0,32894	1,32	0,40658
0,23	0,09095	0,60	0,22575	0,96	0,33147	1,33	0,40824
0,24	0,09483	0,61	0,22907	0,97	0,33398	1,34	0,40988
0,25	0,09871	0,62	0,23237	0,98	0,33646	1,35	0,41149
0,26	0,10257	0,63	0,23565	0,99	0,33891	1,36	0,41308
0,27	0,10642	0,64	0,23891	1,00	0,34134	1,37	0,41466
0,28	0,11026	0,65	0,24215	1,01	0,34375	1,38	0,41621
0,29	0,11409	0,66	0,24537	1,02	0,34614	1,39	0,41774
0,30	0,11791	0,67	0,24857	1,03	0,34849	1,40	0,41924
0,31	0,12172	0,675	0,25016	1,04	0,35083	1,41	0,42073
0,32	0,12552	0,68	0,25175	1,05	0,35314	1,42	0,42220
0,33	0,12930	0,69	0,25490	1,06	0,35543	1,43	0,42364
0,34	0,13307	0,70	0,25804	1,07	0,35769	1,44	0,42507
0,35	0,13683	0,71	0,26115	1,08	0,35993	1,45	0,42647
0,36	0,14058	0,72	0,26424	1,09	0,36214	1,46	0,42785

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,47	0,42922	1,87	0,46926	2,27	0,48840	2,67	0,49621
1,48	0,43056	1,88	0,46995	2,28	0,48870	2,68	0,49632
1,49	0,43189	1,89	0,47062	2,29	0,48899	2,69	0,49643
1,50	0,43319	1,90	0,47128	2,30	0,48928	2,70	0,49653
1,51	0,43448	1,91	0,47193	2,31	0,48956	2,71	0,49664
1,52	0,43574	1,92	0,47257	2,32	0,48983	2,72	0,49674
1,53	0,43699	1,93	0,47320	2,33	0,49010	2,73	0,49683
1,54	0,43822	1,94	0,47381	2,34	0,49036	2,74	0,49693
1,55	0,43943	1,95	0,47441	2,35	0,49061	2,75	0,49702
1,56	0,44062	1,96	0,47500	2,36	0,49086	2,76	0,49711
1,57	0,44179	1,97	0,47558	2,37	0,49111	2,77	0,49720
1,58	0,44295	1,98	0,47615	2,38	0,49134	2,78	0,49728
1,59	0,44408	1,99	0,47670	2,39	0,49158	2,79	0,49736
1,60	0,44520	2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744
1,61	0,44630	2,01	0,47778	2,41	0,49202	2,81	0,49752
1,62	0,44738	2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760
1,63	0,44845	2,03	0,47882	2,43	0,49245	2,83	0,49767
1,64	0,44950	2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774
1,65	0,45053	2,05	0,47982	2,45	0,49286	2,85	0,49781
1,66	0,45154	2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788
1,67	0,45254	2,07	0,48077	2,47	0,49324	2,87	0,49795
1,68	0,45352	2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801
1,69	0,45449	2,09	0,48169	2,49	0,49361	2,89	0,49807
1,70	0,45543	2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813
1,71	0,45637	2,11	0,48257	2,51	0,49396	2,91	0,49819
1,72	0,45728	2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825
1,73	0,45818	2,13	0,48341	2,53	0,49430	2,93	0,49831
1,74	0,45907	2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836
1,75	0,45994	2,15	0,48422	2,55	0,49461	2,95	0,49841
1,76	0,46080	2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846
1,77	0,46164	2,17	0,48500	2,57	0,49492	2,97	0,49851
1,78	0,46246	2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856
1,79	0,46327	2,19	0,48574	2,59	0,49520	2,99	0,49891
1,80	0,46407	2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865
1,81	0,46485	2,21	0,48645	2,61	0,49547	3,01	0,49869
1,82	0,46562	2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,02	0,49874
1,83	0,46638	2,23	0,48713	2,63	0,49573	3,03	0,49878
1,84	0,46712	2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,04	0,49882
1,85	0,46784	2,25	0,48778	2,65	0,49598	3,05	0,49886
1,86	0,46856	2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,06	0,49889

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,07	0,49893	3,13	0,49913	3,19	0,49929	3,70	0,49989
3,08	0,49896	3,14	0,49916	3,20	0,49931	3,80	0,49993
3,09	0,49900	3,15	0,49918	3,30	0,49952	3,90	0,49995
3,10	0,49903	3,16	0,49921	3,40	0,49966	4,00	0,499968
3,11	0,49906	3,17	0,49924	3,50	0,49977	4,50	0,499997
3,12	0,49910	3,18	0,49926	3,60	0,49984	5,00	0,499999

Таблица А.4 – Значение χ^2 распределения

В таблице представлены значения $\chi^2_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α

ν α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,669	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,556	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,556	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	38,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица А.5 – Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha,\nu}$ удовлетворяют условию $P\left(t \geq t_{\alpha,\nu}\right) = \int\limits_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} S\left(t,\nu\right) dt = \alpha$.

В таблице представлены значения квантилей $t_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α .

α / ν	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	381,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,765	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	6,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	3,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,293	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица А.6 – Распределение Фишера

В таблице приведены критические значения (квантили) F_{α,ν_1,ν_2} в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 для значения $\alpha = 0,05$:

$$P\left(F \geq F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\right) = 0,05 .$$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,774	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,785	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,756	4,534	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,094	2,948	2,788	2,609	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,853	2,741	2,591	2,424	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,629	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,083	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,421	2,250	2,064	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,375	2,203	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,965	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,947	1,691
27	4,210	3,354	2,961	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,992	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,702	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,605	2,449	2,336	2,180	2,004	1,793	1,509
60	4,001	3,151	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,918	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,106	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Таблица А.7 – Доверительные интервалы для σ

P / ν	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	15,9	0,388	9,98	0,446	9,31	0,510	5,19
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,32
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,09
6	0,569	2,98	0,587	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,44	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,877	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Таблица А.8 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, где $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, где $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
11)	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица А.8 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;	2)	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;
3)	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
7)	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	8)	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9)	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \right\rvert + C$;	10)	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$;
11)	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$ $a \neq 0$;	12)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \lvert x \rvert < \lvert a \rvert$;
13)	$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert \dfrac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$;	14)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
15)	$\int \operatorname{sh}x\, dx = \operatorname{ch}x + C$;	16)	$\int \operatorname{ch}x\, dx = \operatorname{sh}x + C$;
17)	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x + C$;	18)	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}x + C$, где $x \neq 0$.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА.
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ
В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Практикум

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Джежора Александр Александрович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович

Редактор *Т. А. Осипова*
Корректор *А.В. Пухальская*
Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати 07.12.2021. Формат 60х90 1/16. Усл. печ. листов 6,6.
Уч.-изд. листов 8,4. Тираж 99 экз. Заказ № 314.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.