РАЗДЕЛ 3
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

3.1 Математика и информационные технологии

УДК 512.542

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛЕЙ

Коваленко А.В., ст. преп., Антонова Т.А., студ.

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Реферат. *В статье рассматривается алгебраическое замыкание полей рациональных чисел. Проведено исследование полей и их расширений конечной степени. Построен характеристический многочлен преобразования пространства над полем рациональных чисел.*

Ключевые слова: алгебраическое поле, база группы, след матрицы, векторное пространство.

Пусть поле $\overline{Q}$ является алгебраическим замыканием поля рациональных чисел Q, при этом элементы из поля $\overline{Q}$ называются алгебраическими числами. Элемент из поля $\overline{Q}$ называется целым алгебраическим числом, если он является корнем многочлена с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшей степени равным единице.

Рассмотрим произвольное поле K алгебраических чисел, имеющих конечную степень, то есть размерность как векторного пространства над полем Q. Пусть K_0 – множество всех целых алгебраических чисел из поля K.

Докажем, что множество K_0 является подкольцом в поле K.

Пусть $x, y \in K_0$, a – произвольный элемент из множества элементов $x \pm y$, xy. Покажем, что $z \in K_0$.

Пусть

$$\boldsymbol{x^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i, \quad a_i \in Z},$$

$$\boldsymbol{y^m = \sum_{j=0}^{m-1} b_j y^j, \quad b_j \in Z}.$$

Совокупность G всевозможных элементов вида

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^i y^j, \quad c_{ij} \in Z},$$

являются подкольцом в поле K. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_p$ является базой аддитивной группы G, и $z_r z = \sum_{s=1}^{p} d_{rs} z_s, \quad d_{rs} \in Z$. Характеристический многочлен матрицы $\left(d_{rs}\right)$ обращается в нуль в точке z. Следовательно, число z является целым алгебраическим числом, а множество K_0 является подкольцом в поле K.

На основании доказанного утверждения можно сделать вывод о том, что для любого

$x \in K$ сдвиг $\alpha \to \alpha x$, где $\alpha \in K$, является линейным преобразованием пространства K над полем Q. Пусть X_x – характеристический многочлен этого преобразования, $tr(x)$ является его следом. Тогда, если K – подполе из множества C, а L – его расширение конечной степени, то для любого элемента $x \in L$ преобразование $\alpha \to \alpha x$, где $\alpha \in L$, является линейным над полем K, а его след $tr_{L/K}(x)$ принадлежит полю K.

Докажем утверждение. Если $x \in K_0$, то X_x является многочленом над полем Z.

Пусть n – степень поля K над полем Q. Зафиксируем какую-либо базу K над полем Q и сопоставим каждому $z \in K$ матрицу Z сдвига $\alpha \to \alpha z$ в этой базе. В результате приходим к изоморфному вложению $K \to M_n(Q)$. Так как x – корень уравнения над полем Z со старшим коэффициентом единица, то таковы и характеристические корни матрицы $\tilde{x}$, а, следовательно, коэффициентами многочлена X_x являются целые алгебраические числа и они лежат в Z.

Рассмотрим базу поля алгебраических чисел K над полем Q: $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Тогда матрица следа $\left(tr(\omega_i\omega_j)\right)$ является невырожденной. При этом существует база $\left\{\omega_j^*\right\}$ поля K над полем Q, которая является дуальной к базе $\{\omega_i\}$, то есть выполняется условие

$$\boldsymbol{tr(\omega_i\omega_j^*) = \delta_{ij}}.$$

Предположим что, между столбцами матрицы $\left(tr(\omega_i\omega_j)\right)$ существует нетривиальная зависимость с коэффициентами $x_j \in Q$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega = \sum x_j\omega_j \neq 0, \quad tr\{\omega_i\omega\} = 0, \quad 1 \le i \le n}.$$

Так как $\{\omega_i\omega\}$ является базой поля K над полем Q, то $\sum y_i\omega_i\omega = 1$ при подходящих значениях $y_i \in Q$. Вычисляя след от обеих частей, получим $n = 0$, что неверно. Следовательно, матрица $\left(tr(\omega_i\omega_j)\right)$ является невырожденной.

Найдём теперь базу $\left\{\omega_j^*\right\}$ поля K над полем Q в виде

$$\boldsymbol{\omega_j^* = \sum_i \xi_{ji}\omega_i, \quad \xi_{ji} \in Q}.$$

Условие $tr\left\{\omega_i\omega_j^*\right\} = \delta_{ij}$ превращается в систему линейных уравнений относительно переменных $\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jn}$, а в виду не вырожденности матрицы она является разрешимой.

Покажем теперь, что аддитивная группа кольца K_0 конечно порождена.

Пусть множество $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ является базой кольца K над полем Q, при этом все $\omega_i \in K_0$. Если предположить, что $\left\{\omega_j^*\right\}$ – дуальная база, то существует такое $m \in Z$, что все $m\omega_j^* \in K_0$. Пусть γ – произвольный элемент из кольца K_0:

$$\boldsymbol{\gamma = \sum_i \gamma_i\omega_i, \quad \gamma_i \in Q}.$$

Умножая это равенство на $m\omega_j^*$ и беря от обеих частей след получим $m\gamma_j = tr\left\{m\gamma\omega_j^*\right\}$. Так как $m\gamma\omega_j^* \in K_0$, то $m\gamma_j \in Z$. Таким образом, аддитивная группа кольца K_0 лежит в группе с порождающим элементом $\left\{\frac{1}{m}\omega_i\right\}$, а потому сама конечно порождена.

Докажем, что мультипликативная группа кольца K_0 конечно порождена.

Для доказательства достаточно показать, что аддитивная группа $K_1 = \left(K_0^*\right)^\tau$ конечно порождена.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – максимальная линейная независимая над полем R подсистема из аддитивной группы K_1. Рассмотрим два множества

$$\boldsymbol{K_1' = \left\{\sum x_i a_i \middle| x_i \in Z\right\}}$$

и

$$\boldsymbol{K_1'' = \left\{\sum x_i a_i \middle| 0 < x_i < 1\right\}}.$$

Для любого $\alpha \in K_1$ справедливы равенства и включение

$$\boldsymbol{\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \alpha' \in K_1', \quad \alpha'' \in K_1''}.$$

Так как $x \in K_1$, $x' \in K_1$, то $x'' \in K_1$. Но множество K_1'' ограничено в поле R. Но тогда, пересечение множеств $K \cap K''$ является конечным. Так как, для любого элемента p справедливо включение $pK_1 \subset K_1'$, то множество K_1 будет содержится в аддитивной группе порождающих элементов $\frac{1}{p}a_1, \frac{1}{p}a_2, \ldots, \frac{1}{p}a_n$. Следовательно, группа K_1 конечно порождена.

На основании полученных утверждений можно сделать следующие выводы:

1) ядром сужения над кольцом K_0^* является совокупность всех корней из единицы, которые содержатся в поле K, причём эта группа является циклической;

2) отображение $\psi : K \to R^n$ является изоморфным вложением аддитивной группы K в аддитивную группу R^n;

3) отображение $\psi : K^* \to R^{s+l}$ является гомоморфизмом группы K^* в аддитивную группу R^{s+l};

4) множество K_0^ψ дискретно в пространстве R^n, то есть имеет лишь конечное пересечение с любым шаром пространства R^n, то есть множество $\left(K_0^*\right)$ является дискретным в этом пространстве;

5) множество K_0^* представляет собой прямое произведение конечной циклической группы и бесконечной циклической группы.

Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формация конечных групп / Л. А. Шеметков. – Минск : Наука, 1978. – 272 с.
2. Вавилов, Н. А. Простые алгебры Ли, простые алгебраические группы и простые конечные группы // Математика XX века. Взгляд из Петербурга / под ред. А. М. Вершика. – М. : МЦНМО, 2010.