УДК 517. 925. 12

О СУЩЕСТВОВАНИИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Денисов В.С.; Локтионов А.В.; Примакова С.И.

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$x = \psi(y) + f(x);\ y = g(x) \qquad (1)$$

При $\psi(y) \equiv y$ имеем систему нелинейных колебаний, для которой в [1] доказана теорема существования устойчивого предельного цикла системы с единственной особой точкой - началом системы координат. В статье [2] рассмотрен случай, когда система нелинейных колебаний имеет три особые точки. В [3] найдены достаточные условия существования устойчивого предельного цикла, окружающего нечетное число особых точек. В данной работе получены достаточные условия существования устойчивого предельного цикла системы (1) с одной особой точкой – началом системы координат.

Пусть функции $\Psi(y)$, $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $(-\infty;\infty)$ и обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши. Обозначим y_A - ординату интегральной кривой уравнения

$$dy/dx = g(x)/(\psi(y) + f(x)) \qquad (2)$$

в точке $A(x_A, y_A)$; V_A - значение в точке A функции Ляпунова

$$V(x,y) = \Phi(y) + G(x), \qquad (3)$$

где $$\Phi(y) = \int_0^y \psi(s)ds,\ G(x) = \int_0^x -g(s)ds. \qquad (4)$$

Лемма 1. Если выполнены условия:

А: $\psi(y)$ -- нечетная, монотонно возрастающая функция и $\psi(y) \to \pm\infty$ при $y \to \pm\infty$;

В: $G(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$,

то семейство кривых $V = C\ \ (C > 0)$ обладает следующими свойствами: любая кривая семейства является замкнутой, симметричной относительно оси абсцисс, охватывает начало системы координат; кривая уровня $V = C_1$ лежит внутри конечной области, ограниченной кривой $V = C_2$, если $C_2 > C_1$.

Доказательство следует из условия В и того, что ординаты кривых $V = C$ симметричны относительно оси абсцисс в силу нечетности функции $\psi(y)$.

У системы (1) при выполнении условия А отсутствуют траектории вида

$x(t) \to C(const)$, $y(t) \to \pm\infty$ при $t \to T \leq \infty$ или $t \to T \geq -\infty$. (5)

Теорема 1. Если выполнены условия А, В и обобщенные условия Гурвица

$$xf(x) < 0,\quad xg(x) < 0 \text{ при } x \neq 0,\ f(0) = g(0) = 0, \qquad (6)$$

то тогда система (2) не имеет предельных циклов.

Доказывается аналогично доказательству теоремы 1 [3] с использованием свойств кривых $V = C$.

При нарушении первого неравенства условий (6) для системы (1) найдены достаточные условия существования устойчивого предельного цикла.

Теорема 2. Если выполнены условия А, В и следующие:

1. $xg(x) < 0$ при $x \neq 0$;
2. $f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$ для достаточно малых $|x|$;
3. $\exists m > 0$ и такие числа k и k', где $0 < k' < k$, что $-f(x) \geq k$, когда $x > m$ и $-f(x) \leq k'$, когда $x \leq -m$,

то система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-m; m]$, то существует число D, такое, что $|f(x)| < D$. Выберем $D > k$. Рассмотрим траекторию $L(Q,t)$, где $Q(m, y_Q)$ и $y_Q > \psi^{-1}(D)$. В силу структуры поля направлений и отсутствия траекторий вида (5) при $t \to -\infty$ она выходит на ось ординат и на прямую $x = -m$ в точках P и U, где $y_U > \psi^{-1}(D)$, а при $t \to +\infty$ достигает изоклины бесконечности $\psi(y) + f(x) = 0$. Действительно, интегрируя уравнение (2) от m до x и используя, что $y_Q = max\ y(x)$ при $x \geq m$ и $\psi(y)$ – монотонно возрастающая функция, получаем оценку $y < y_Q + (G(m) - G(x))/(\psi(y_Q) - k)$, откуда в силу условия В при больших x правая часть становится отрицательной, то есть полутраектория $L^+(Q,t)$ пересекает кривую $\psi(y) + f(x) = 0$. В дальнейшем она выходит на прямую $x = m$ в точке Q', где $y_{Q'} < -\psi^{-1}(D)$. Аналогично строится предохранительная дуга $TSWP'$, где T, S, W, P' -- точки пересечения полутраектории $L^+(T,t)$ с прямыми $x = m$, $x = 0$, $x = -m$, $x = 0$ и при этом выбираем $y_T < y_{Q'}$. Если $y_{P'} < y_P$, то из области, ограниченной контуром Γ_1, состоящим из дуг PQQ', $TSWP'$ и отрезков PP' и TQ', не выходит ни одна интегральная кривая.

Из условий 1, 2 теоремы и того, что производная функции (3) в силу системы (1) имеет вид $dv/dt = -f(x)g(x)$, следует $dv/dt > 0$ при достаточно малых по $|x|$, то есть начало координат – точка отталкивающего типа. Тогда в кольцевой области, ограниченной контуром Γ_1, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Пусть $y_{P'} > y_P$. Возьмем траекторию $L\ (A,t)$, где $y_A > y_{P'}$. Если полутраектория $L^+(A,t)$ пересекает отрезок TQ', то теорема доказана. В противном случае она выходит на ось ординат в точке A_1, где $y_{A_1} < y_S$, и, затем, в точке $\bar{A}$, где $y_{\bar{A}} = \bar{y} > 0$. Если $\bar{y} < y_A$, то теорема доказана. Пусть $\bar{y} > y_A$, тогда в дальнейшем полутраектория $L^+(A,t)$ выйдет на ось ординат при $y<0$ в точке A_2.

Обозначим $L_1 = max\{L_{PQ}, L_{TS}, L_{SW}, L_{UP}\}$, где константы $L_{PQ}, L_{TS}, L_{SW}, L_{UP}$ определим однотипно, например, $L_{PQ} = \int_P^Q |(g(x)f(x))/(\psi(y)+f(x))|dx$. Производная функции (3) по аргументу x вдоль интегральных кривых системы (1) имеет вид

$$dV/dx = -(f(x)g(x))/(\psi(y)+f(x)) \tag{7}$$

Пусть В – первая точка пересечения $L^+(A,t)$ с прямой $x=m$. Интегрируя равенство (7) вдоль дуги AB от 0 до m, в силу условия А и неравенства $y_{AB} > y_{PQ}$ получим $|V_B - V_A| \le \int_0^m |g(x)f(x)/\psi(y_{AB})+f(x))|dx \le L_1$.

Аналогично доказывается, что изменение функции $V(x,y)$ вдоль любых дуг траекторий, лежащих в полосе $-m \le x \le m$ вне области, ограниченной предохранительными дугами, ограничено. Докажем, что из этого факта следует ограниченность изменения y вдоль таких дуг траекторий. Пусть $(\bar{x};\bar{y})$ и $(\bar{\bar{x}};\bar{\bar{y}})$ точки такой дуги. Из разности $\bar{V}-\bar{\bar{V}}$ найдем $\Phi(\bar{y})-\Phi(\bar{\bar{y}})$ и, используя теорему о среднем, получим

$$\psi(y^*)(\bar{y}-\bar{\bar{y}}) = (\bar{V}-\bar{\bar{V}}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} -g(s)ds, \tag{8}$$

где $y^* \in [\bar{\bar{y}};\bar{y}]$. В силу условия А выполняется неравенство $|\psi(y^*)| > D$, тогда из равенства (8) получим оценку:

$$|\bar{y}-\bar{\bar{y}}| \le (|\bar{V}-\bar{\bar{V}}| + 2m \cdot \max_{[-m;m]}|g(x)|)/D = N.$$

Аналогично оценке изменения функции $\lambda(x,y)$ в [1], при $\bar{y} > y_A$ получим, что $V_{A_2} - V_{A_1} \le 4L_1 + 2Nk - (k-k')y_A$. Откуда при $y_A > (4L_1 + 2Nk)/(k-k')$ имеем неравенство $V_{A_2} - V_{A_1} < 0$. Оно противоречит неравенству $V_{A_2} > V_{A_1}$, следующему из вида функции (3), условия А и что $|y_2| > |y_1|$. Противоречие показывает, что $\bar{y} < y_A$. Тогда в области, ограниченной контуром, состоящим из дуги $\bar{A}A$ траектории $L(A,t)$ и отрезком $\bar{A}A$ оси ординат, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл. При $\psi(y) \equiv y$ из доказанной теоремы имеем теорему А.В. Драгилева [1].

Литература:

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. Денисов В.С. Предельные циклы одной автономной системы. Дифференциальные уравнения. – Мн.: Наука и техника, TXV, № 9, 1979.
3. Денисов В.С. Предельные циклы некоторых двумерных систем. Совершенствование технологических процессов и организация производства машиностроения. – Мн.: Университетское, 1993.

SUMMARY:

In this paper the sufficient conditions for existence at least of one stable limit cycle of some dynamic system are given.