

УДК 539.434:677.494

## ХАРАКТЕРИСТИКИ НАСЛЕДСТВЕННО-РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОЛИМЕРА

А. М. Сталевич, А. Г. Макаров, Е. В. Кикец

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна  
makvin@mail.ru

Продолжая развивать методы расчётного прогнозирования напряжённо-деформированных состояний синтетических нитей и других полимерных материалов в области неразрушающих нагрузок на основе наследственного интегрального уравнения, рассматриваются процессы нелинейно-наследственной ползучести.

Разработанные методики иллюстрируются на примере деформационно-восстановительного процесса как с полной, так и с частичной разгрузкой.

Широкое внедрение полимерных материалов в различные отрасли техники обуславливает повышенное внимание к изучению и прогнозированию их свойств в условиях неразрушающего механического воздействия. Построение математических моделей, описывающих физико-механические свойства конструкционных полимерных материалов в условиях нагружения, основано на применении различного рода нормированных функций, выбор которых является феноменологическим, а достоинства и недостатки той или иной математической модели подтверждаются экспериментом. Наиболее часто употребляемыми нормированными функциями являются: интеграл вероятностей, функция Кольрауша, гиперболический тангенс [1, 2]. В качестве аргумента для процесса ползучести у выбранных функций используется логарифм приведённого времени

$$W_{\sigma t} = \frac{l}{b_{n\sigma}} \cdot \ln \frac{t}{\tau_{\sigma}} = \frac{l}{b_{n\sigma}} \cdot \left( \ln \frac{t}{t^*} + \ln \frac{t^*}{\tau_{\sigma}} \right), \quad (1)$$

где  $\tau_{\sigma}$  – время запаздывания;  $t^*$  – некоторое выбранное значение базового времени, а  $\Delta D_{\tau}$  – некоторый структурный коэффициент, характеризующий интенсивность процесса ползучести. Как показали исследования [1, 2], наиболее точно описывает вязкоупругие процессы математическая модель, основанная на применении интеграла вероятности, что соответствует нормальному распределению числа запаздывающих частиц по логарифмическо-временной шкале. Необходимость разностороннего исследования вязкоупругих процессов вызван сравнительный анализ нескольких математических моделей, описывающих одни и те же явления. При этом, наиболее близкой к математической модели

$$D_{\sigma t} = D_0 + (D_{\infty} - D_0) \cdot \varphi_{\sigma t}, \quad (2)$$

использующей интеграл вероятностей, как было показано [3, 4], является математическая модель, основанная на использовании нормированного арктангенса логарифма

$$\varphi_{\sigma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(W_{\sigma}).$$

Процесс нелинейно-наследственной ползучести описывается [2] каноническим уравнением состояния, учитывающим кинетическую природу процессов деформирования

$$\varepsilon_t = D_0 \sigma_t + (D_{\infty} - D_0) \cdot \int_0^t \sigma_{t-s} \cdot \varphi'_{\sigma s} ds,$$

где  $D_0$  – начальная упругая податливость, а  $D_{\infty}$  – предельно-равновесная податливость.

Одним из частных случаев общего процесса нелинейно-наследственной ползучести является деформационно-восстановительный процесс с чередованием нагружения и разгрузки. Аналитически простейшие деформационно-восстановительные процессы можно описать следующим образом:

а) процесс с полной разгрузкой (рис. 1)

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < t_2, \end{cases}$$

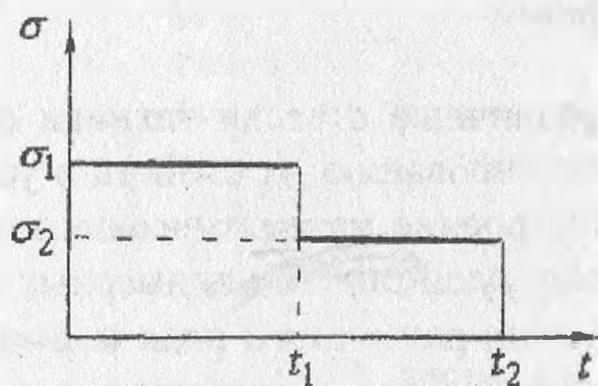


Рис. 1. Деформационно-восстановительный процесс с полной разгрузкой.

б) процесс с частичной разгрузкой (рис. 2)

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < t < t_1, \\ \sigma_2, & t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

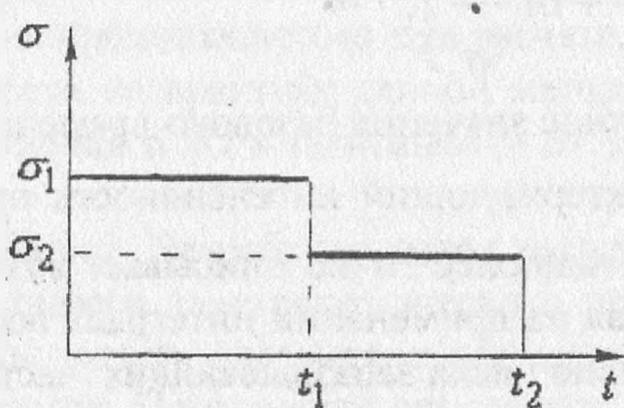


Рис. 2. Деформационно-восстановительный процесс с частичной разгрузкой.

Приведём расчёт деформационно-восстановительного процесса с полной и с половинной разгрузкой на примере синтетической нити лавсан с линейной плотностью 114 текс, разрывным напряжением  $\sigma_p = 830$  МПа, разрывной деформацией  $\varepsilon_p = 11,5\%$ . Для этого сначала определим основные параметры процесса ползучести.

Логарифмическое сило-временное ядро ползучести

$$\bar{r}_{\sigma t} = \frac{\partial \varphi_{\sigma t}}{\partial \ln t} = \frac{1}{b_{n\sigma}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+W_{\sigma t}^2} \quad (3)$$

достигает своего экстремального значения  $\bar{r}_{\tau} = \frac{1}{b_{n\sigma}} \cdot \frac{1}{\pi}$  при  $t = \tau_{\sigma}$ , что соответствует  $W_{\tau} = 0$ ,  $\varphi_{\tau} = 0,5$ ,  $D_{\tau} = 0,5 \cdot (D_0 + D_{\infty})$ .

Используя свойство симметрии нормированной функции ползучести, получим

$$D_{\infty} - D_{\tau} = \frac{D_{\infty} - D_0}{2} = D_{\tau} - D_0 = \Delta D_{\tau}, \quad (4)$$

откуда имеем формулы для начальной упругой податливости

$$D_0 = D_{\tau} - \Delta D_{\tau} \quad (5)$$

и для предельно-равновесной податливости

$$D_{\infty} = D_{\tau} + \Delta D_{\tau}.$$

Далее получаем характеристическое значение производной податливости

$$D'_{\tau} = \frac{1}{b_{n\sigma}} \cdot \frac{1}{\pi} (D_{\infty} - D_0) = \frac{1}{b_{n\sigma}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \Delta D_{\tau}. \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует:

$$D'_{\sigma t} = D'_{\tau} \cdot \frac{1}{1+W_{\sigma t}^2},$$

откуда получаем формулу для определения аргумента-функционала

$$W_{\sigma t} = \pm \sqrt{\frac{D'_{\tau}}{D'_{\sigma t}} - 1}. \quad (7)$$

Учитывая, что  $D_{\sigma t} - D_{\tau} = (D_{\infty} - D_0) \cdot (\varphi_{\sigma t} - 0,5) = 2\Delta D_{\tau} (\varphi_{\sigma t} - 0,5)$ , получаем

$$\Delta D_{\tau} = 0,5 \cdot \frac{(D_{\sigma t} - D_{\tau})}{\Psi(W_{\sigma t}) - 0,5}, \quad (8)$$

откуда с учётом (6) получаем формулу для определения параметра интенсивности процесса ползучести  $b_{n\sigma}$

$$\frac{1}{b_{n\sigma}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D'_{\tau}}{\Delta D_{\tau}}. \quad (9)$$

Чтобы определить времена запаздывания  $\tau_{\sigma}$ , достаточно определить сило-временную функцию  $f_{\sigma} = \ln \frac{t^*}{\tau_{\sigma}}$ .

Для этого, сначала из условия (2) определим  $\varphi_{\sigma t}$

$$\varphi_{\sigma t} = \frac{D_{\sigma t} - D_0}{D_{\infty} - D_0}, \quad (10)$$

затем, по численным значениям  $\varphi_{\sigma t}$  находим значения аргумента-функционала  $W_{\sigma t}$

$$W_{\sigma t} = \operatorname{tg}(\pi \cdot (\varphi_{\sigma t} - 0,5)) \quad (11)$$

и из (1) получаем формулу для сило-временной функции

$$f_{\sigma} = \ln\left(\frac{t^*}{\tau_{\sigma}}\right) = b_{n\sigma} \cdot W_{\sigma t^*} \quad (12)$$

Для значения времени  $t = t^*$  из формул (10) и (11) получаем формулы:

$$\varphi_{\sigma t^*} = \frac{D_{\sigma t^*} - D_0}{D_{\infty} - D_0} \quad (13)$$

и

$$W_{\sigma t^*} = \operatorname{tg}(\pi \cdot (\varphi_{\sigma t^*} - 0,5)), \quad (23)$$

которые следует учесть при использовании формулы (12).

Рассмотрим следующие исходные данные:  $T = 40^{\circ}\text{C}$ ,  $\left.\frac{\partial D_{\sigma t}}{\partial \ln t}\right|_{\tau} = 0,0128 \text{ ГПа}^{-1}$ ;

$D_{\tau} = 0,171 \text{ ГПа}^{-1}$ ;  $\sigma^* = 0,146 \text{ ГПа}^{-1}$ ;  $t^* = 60 \text{ с}$ . Значения  $D_{\sigma t}$ ;  $D_{\tau}$ ;  $\left.\frac{\partial D_{\sigma t}}{\partial \ln t}\right|_{t^*}$ ;  $\left.\frac{\partial D_{\sigma t}}{\partial \ln t}\right|_{\tau}$  оп-

ределялись из эксперимента. Функционал  $W_{\sigma t_1}$  вычислялся по формуле (7), а по формуле (8) рассчитывались значения  $\Delta D_{\tau}$ . Далее полученные значения  $\Delta D_{\tau}$  для разных значений  $\sigma$  усреднялись  $\overline{\Delta D_{\tau}} = \sum_{\sigma} \Delta D_{\tau}$ , и по полученному среднему значению  $\overline{\Delta D_{\tau}}$

с помощью формул (4) и (5) находили податливости  $D_0$  и  $D_{\infty}$ , а по формуле (9) – параметр интенсивности  $\frac{1}{b_{n\sigma}}$ . Затем, по формуле (13) определялись значения  $\varphi_{\sigma t^*}$  и,

далее, с помощью (14) находили функционал  $W_{\sigma t^*}$ , а по формуле (12) – сило-временную функцию  $f_{\sigma} = b_{n\sigma} W_{\sigma t^*}$  (рис.3). Результаты расчётов приведены в таблице. По данным таблицы с помощью (13) определяем среднее значение  $\overline{\Delta D_{\tau}} = 0,079 \text{ ГПа}^{-1}$ , начальную податливость

$D_0 = D_{\tau} - \overline{\Delta D_{\tau}} = 0,171 - 0,079 = 0,092 \text{ ГПа}^{-1}$  и предельно-равновесную податливость

$D_{\infty} = 0,171 + 0,079 = 0,250 \text{ ГПа}^{-1}$ .

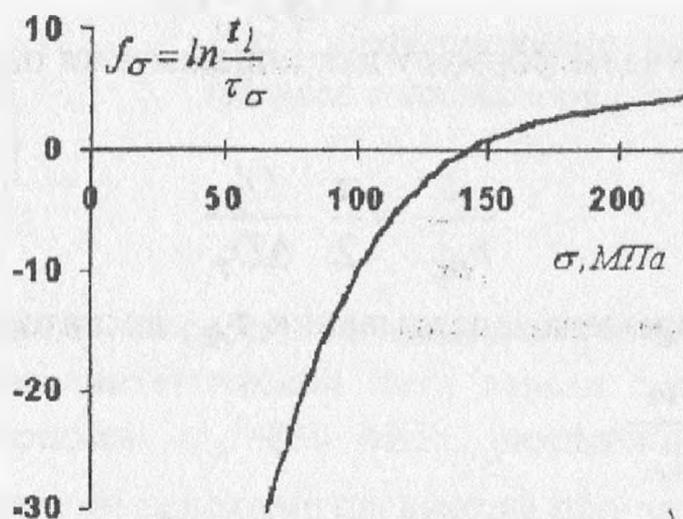


Рис.3. Сило-временная функция синтетической нити лавсан 114 текс,  $T = 40^{\circ}\text{C}$ .

Т а б л и ц а. Расчёт параметров процесса ползучести нити лавсан 114 текс,  $T = 40^{\circ}C$ .

$\sigma$ , ГПа	$D_{\sigma t^*}$ , ГПа $^{-1}$	$\frac{\partial D_{\sigma t}}{\partial \ln t} _{t^*}$ , ГПа $^{-1}$	$\frac{D'_{\tau}}{D'_{\sigma t^*}}$	$W_{\sigma t^*}$	$\varphi_{\sigma t^*}^{-0,5}$	$\Delta D_{\tau}$ , ГПа $^{-1}$	$\varphi_{\sigma t^*}$	$W_{\sigma t^*}$	$f_{\sigma}$
0,077	0,100	0,0082	3,585	-1,608	-0,323	0,110	0,052	-1,608	-24,12
0,094	0,109	0,0124	2,371	-1,171	-0,275	0,113	0,108	-1,171	-11,13
0,109	0,126	0,0165	1,782	-0,884	-0,230	0,098	0,216	-0,884	-4,90
0,121	0,139	0,0215	1,367	-0,606	-0,173	0,092	0,298	-0,606	-2,91
0,134	0,152	0,0268	1,097	-0,311	-0,096	0,099	0,380	-0,311	-1,56
0,146	0,171	0,0294	1	0	0	—	0,500	0	0
0,158	0,187	0,0278	1,056	0,237	0,074	0,107	0,601	0,240	1,30
0,170	0,196	0,0220	1,336	0,580	0,167	0,075	0,658	0,580	2,14
0,182	0,203	0,0186	1,581	0,762	0,207	0,077	0,702	0,762	2,91
0,194	0,206	0,0154	1,909	0,953	0,242	0,072	0,721	0,953	3,29
0,206	0,211	0,0121	2,430	1,196	0,278	0,072	0,753	1,196	4,01
0,218	0,213	0,0100	2,940	1,393	0,302	0,070	0,765	1,393	4,34

По формуле (9) определяем параметр интенсивности  $\frac{1}{b_{n\sigma}} = \frac{\pi D'_{\tau}}{2 \Delta D_{\tau}} = 0,253$ .

Расчёт деформационно-восстановительного процесса для значений напряжения  $\sigma_1 = 182 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 91 \text{ МПа}$ , ( $\sigma_1 = 146 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 73 \text{ МПа}$ ), ( $\sigma_1 = 122 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 61 \text{ МПа}$ ),  $t_1 = 10 \text{ мин.}$ ,  $t_2 = 100 \text{ мин.}$  проведён численным интегрированием, согласно разработанным методикам интегрирования [2] и показан на рис.4.

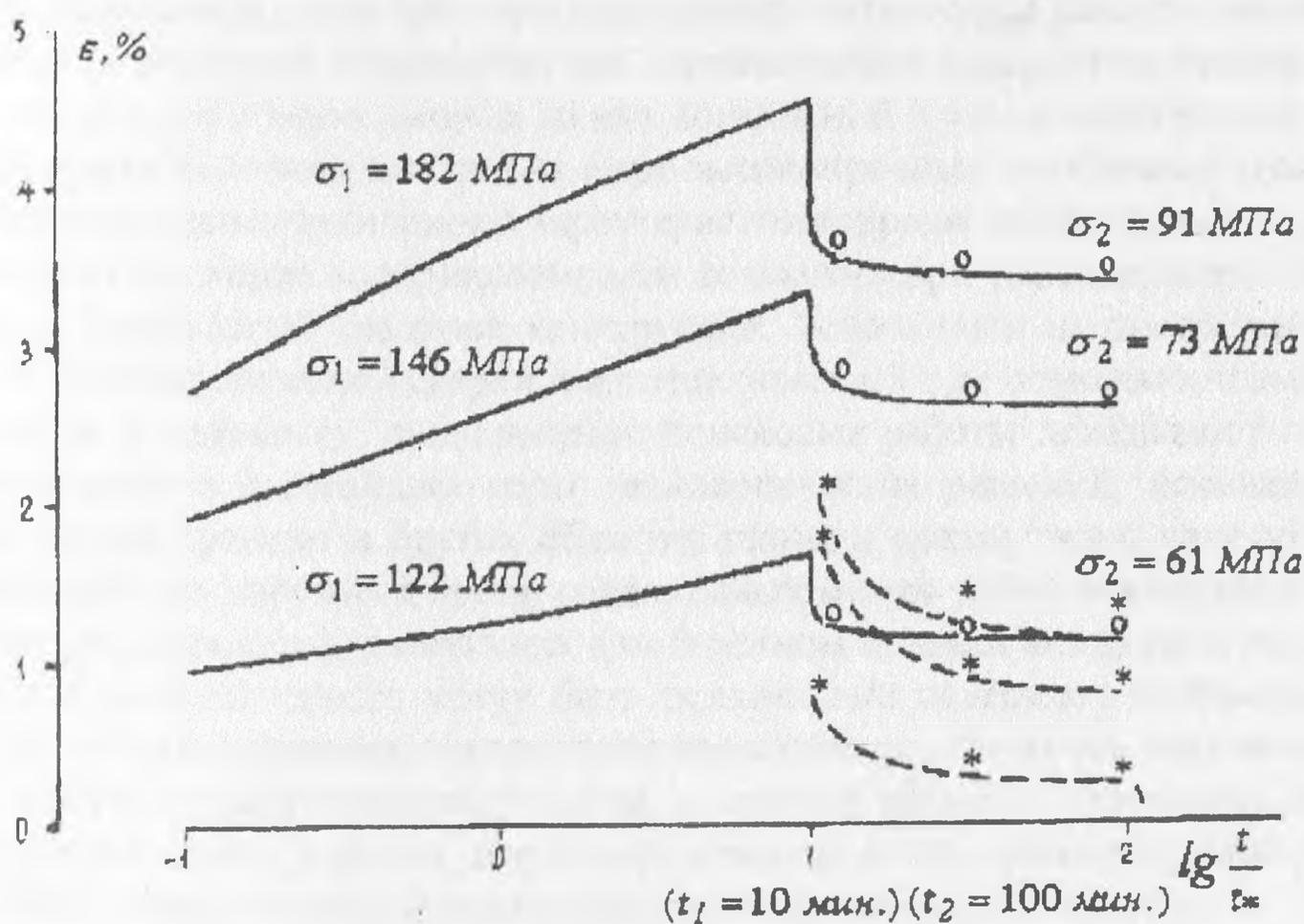


Рис.4. Деформационно-восстановительный процесс синтетической нити лавсан 114 текс,  $T = 40^{\circ}C$  при полной (пунктир) и частичной (сплошная линия) разгрузке (расчётные точки: \* – полная разгрузка (5), o – частичная разгрузка (6)).

Как видно из приведённого примера, разработанная методика описания деформационно-восстановительного процесса, основанная на применении математической модели с нормированной функцией арктангенс логарифма достаточно хорошо согласуется с экспериментом, что даёт основание сделать вывод о целесообразности её применения при прогнозировании сложных нелинейно-наследственных процессов ползучести.

### Список литературы

1. Сталевич А.М. Деформирование высокоориентированных полимеров. Ч.1. Теория линейной вязкоупругости: Конспект лекций/ СПбГУТД. - С.-Пб., 1995. -80 с.
2. Сталевич А.М. Деформирование высокоориентированных полимеров. Ч.2. Теория нелинейной вязкоупругости: Конспект лекций/ СПбГУТД. -С.-Пб.,1997.-136 с.
3. Сталевич А.М., Макаров А.Г. Вариант аналитического описания сложных режимов деформирования синтетических нитей//Механизмы деформации и разрушения перспективных материалов: Сб. научн. трудов XXXV семинара "Актуальные проблемы прочности", Псков, 1999.- С.599-604.
4. Сталевич А.М., Макаров А.Г. Вариант наследственных ядер запаздывания и релаксации текстильных материалов//Вестник СПбГУТД, Вып.3, СПб., 1999. - С.34-40.