

ПРОЦЕССЫ СЛОЖНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

К.Ш.Бабамуратов, Абиров Р.А.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз
Ташкент, 700143, Академгородок
abdullaev@ishonch.uz*

В докладе дается анализ процессов (траекторий) сложной деформации в твердых телах, построенных на базе расчетов, основанных на различных вариантах теории пластичности (деформационная теория и различные варианты теории течения). Физическое соответствие теоретических расчетов реальным процессам, которые происходят внутри тела, устанавливалось путем сопоставления теоретических траекторий с траекториями, построенными в экспериментах, выполненных на установке СН (сложное нагружение).

В докладе дается анализ процессов (траекторий) сложной деформации, построенных в окрестности произвольной точки (x_k) тела конструкции на основе расчетов, выполненных по деформационной теории А.А.Ильюшина и по вариантам теории течения Прагера, Прандтля-Рейсса, Кадашевича-Новожилова, идеальной пластичности. Эксперименты на установке СН (сложное нагружение) [1,2] проводились по программам в виде траектории деформаций $\varepsilon_i = \psi_i(x_k, \lambda)$, где λ – параметр последовательности состояний процесса, монотонно возрастающий по времени t . Физическое соответствие теоретических расчетов реальным процессам, происходящим в теле под воздействием внешних сил, устанавливается путем сопоставления траекторий, рассчитанных по различным вариантам теории пластичности с траекториями, построенными в экспериментах на СН.

1. Метод анализа

Рассмотрим общий случай плоского напряженного состояния для задачи об однородном напряженном и деформированном состоянии тонкой цилиндрической трубки (образец материала), уравнение состояния которой будем представлять в виде [3, 4]

$$d\bar{\sigma} = Nd\bar{\varepsilon} - (N - P) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}}{\sigma^2} \bar{\sigma} \quad (1)$$

или

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} d\bar{\sigma} - \frac{N - P}{NP} \cdot \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (2)$$

где N и P – заданные коэффициенты, вычисляемые в зависимости от выбранного варианта теории пластичности [4], $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ – векторы напряжений и деформаций.

Для простоты рассмотрим двумерный процесс. В этом случае (P - M – опыты) вектор напряжения

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \bar{e}_1 + \sigma_3 \bar{e}_3, \sigma = \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_1^2} \quad (3)$$

и аналогично вектор деформации

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \bar{e}_1 + \varepsilon_3 \bar{e}_3, \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^2} \quad (4)$$

выражаются через напряжения растяжения и кручения

$$\sigma_{11} = P/F, \quad \sigma_{12} = M_k / RF \quad (F = 2\pi Rh) \quad (5)$$

и соответствующие деформации

$$\varepsilon_{11} = \Delta l / l, \quad 2\varepsilon_{12} = R\varphi / l, \quad (6)$$

где F – площадь поперечного сечения трубки; R – ее радиус и h – толщина; Δl – удлинение трубки; φ – угол закручивания на расчетном участке l . В опытах на СН в качестве программ нагружения задаются траектории деформаций (4) или траектории напряжений (3) в виде функции времени t или параметра λ . Компоненты вектора напряжения (3) и вектора деформации (4) выражаются через напряжения σ_{11}, σ_{12} и деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ формулами

$$\sigma_1 = \sqrt{2/3}\sigma_{11}; \quad \sigma_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}; \quad \varepsilon_1 = \sqrt{3/2}\varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}. \quad (7)$$

Тогда каждое из векторных соотношений (1) и (2) будет представлять собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления компонент σ_n и ε_n ($n = 1, 3$), разрешенных относительно $d\sigma_n, d\varepsilon_n$. Закон нагружения трубки зададим в виде траектории с изломом (P - M опыты)

$$\bar{\sigma}^{(0)} = \bar{\Phi}^{(0)}(\lambda), \quad (8)$$

а начальные условия с учетом того, что материал трубки выводится в пластическое состояние при $\sigma_3^{(0)} = \varepsilon_3^{(0)} = 0$:

$$\sigma_1^{(0)} = \sqrt{2/3}n\sigma_s, \quad \varepsilon_1^{(0)} = \sqrt{3/2}m\varepsilon_s, \quad \text{где } n, m \geq 1. \quad (9)$$

Производные $\dot{\Phi}_1$ и $\dot{\Phi}_3$ определяются из (8).

Таким образом с учетом (8), (9) и заданных N, P из (2) строится траектория $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\lambda)$, которая характеризует процесс деформирования трубки под воздействием нагружения (8). Точность процесса зависит от "удачного" выбора коэффициентов N, P в (1) или (2). С целью установления степени адекватности теоретической траектории реально происходящему в образце процессу по программе $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\lambda)$ на установке СН строится траектория $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}^*(x_k, \lambda)$, которая сравнивается с траекторией (8) по критерию

$$2|\sigma^* - \sigma^0| / |\sigma^* + \sigma^0| \leq \delta_\sigma. \quad (10)$$

Если рассматривается краевая задача, то согласно гипотезе макроскопической определимости [3], некоторой точке x_k ставится в соответствие образец конечных размеров (рассматриваемая нами тонкостенная цилиндрическая трубка) и в указанной точке строится траектория $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(x_k, \lambda)$, сложностью которой определяется необходимость дальнейшего анализа процесса в точке x_k по схеме, приведенной выше. Описанный метод анализа процессов сложной деформации является общим для изотропных материалов и плоских процессов сложного нагружения. В некоторых случаях трехмерные процессы для приближенного анализа приводятся к двумерным путем сплюснения их по формулам [4]

$$\varepsilon_1(s) = \int_0^s \cos \psi ds, \quad \varepsilon_3(s) = \int_0^s \sin \psi ds, \quad (11)$$

где $\psi = \int \chi ds + C$ – угол наклона касательной к траектории $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ в ее произвольной точке; χ – кривизна траектории; s – длина дуги траектории; C – произвольная постоянная.

Правомочность такого подхода устанавливается проверкой выполнения условия малости выхода вектора напряжений $\bar{\sigma}$ из соприкасающейся плоскости Френе [5]:

$$\left(\frac{1}{\chi v^3} \varepsilon_{ijk} \dot{\varepsilon}_i \dot{\varepsilon}_j \sigma_k / \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}} \right) \leq \delta_\sigma, \quad (12)$$

где $\sigma_k = \sqrt{2} \beta_{ijk} \tilde{\sigma}_{ij}$, $\varepsilon_k = \sqrt{2} \beta_{ijk} \tilde{\varepsilon}_{ij}$, $v = ds/dt = \sqrt{\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}$, $\chi = \frac{1}{v^3} \sqrt{v^2 \dot{v}_{ij} \dot{v}_{ij} - \left(v_{ij} \dot{v}_{ij} \right)^2}$, ε_{ijk} — компоненты тензора Леви-Чивита; β_{ijk} — матрица перехода от компонентов девиаторов $\tilde{\sigma}_{ij}(\lambda)$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\lambda)$ к соответствующим компонентам векторов $\sigma_n(\lambda)$ и $\varepsilon_n(\lambda)$; δ_σ — задаваемая величина точности

Рассмотрим двухпараметрическое нагружение тонкостенной цилиндрической трубки в виде траектории, у которой первый участок есть прямая линия и второй участок — полуокружность, т.е. для 1-го участка $s \leq \varepsilon_0$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_3 s$, $\chi = 0$, $\vartheta = 0$, где s — длина дуги траектории, χ — кривизна и ϑ — угол сближения между касательной к траектории и вектором напряжений в заданной точке процесса; для 2-го участка $s - s_0 = \varepsilon_0 \varphi$: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin \varphi$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_0 \cos \varphi$, $\chi = -1/\varepsilon_0$, где φ — полярный угол.

Пусть $R = \varepsilon_0 = k \cdot \varepsilon_s$ радиус кривизны 2-го участка траектории, где $k > 1$ параметр, характеризующий степень развитости пластических деформаций. Тогда из закона синуса [4] для теории идеальной пластичности ($N = 2G$, $\sigma = \sigma_s$) получим формулы для вычисления угла сближения через полярный угол

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{F(\varphi)(k - \ell) - k - \ell}{F(\varphi) - 1}, \quad (13)$$

$$\text{при } F(\varphi) = e^{\ell \varphi} \frac{1 - k - \ell}{1 - k + \ell} - 1, \quad \ell = \sqrt{k^2 - 1}$$

и формулы для вычисления компонентов вектора напряжений:

$$\sigma_i = \sigma_s \left(\cos \vartheta \frac{d\varepsilon_i}{ds} + \varepsilon_0 \sin \vartheta \frac{d^2 \varepsilon_i}{ds^2} \right) \quad (i = 1, 3). \quad (14)$$

Для других вариантов теории значения N , P определяются на основе известных соотношений [4], а величины ϑ и σ_i находятся из закона Синуса:

$$\dot{\vartheta} - \chi = \frac{N}{\sigma} \sin \vartheta, \quad \dot{\sigma} = P \cos \vartheta.$$

По данным эксперимента на СН векторные и скалярные величины определяются по формулам

$$(\sin \vartheta)_{\text{exp}} = \frac{\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_3 \cos \varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}}, \quad \sigma_{\text{exp}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}. \quad (15)$$

Сопоставление экспериментальных и теоретических данных осуществлялось по критерию (10).

2. Примеры анализа процессов

2.1. Для оценки физической достоверности теоретических расчетов проведена серия экспериментов на СН с образцами из слабоупрочняющегося материала (сталь-3) с диаграммой (векторное пространство)

$$\sigma = \begin{cases} 2G \cdot s & \text{при } s \leq \varepsilon_s \\ 2G \cdot s(1 - \omega) & \text{при } s \geq \varepsilon_s, \omega = \lambda(1 - \varepsilon_s / \varepsilon) \end{cases}, \quad (16)$$

где $\lambda = 0.97$, $G = 77499 \text{ МПа}$, $\varepsilon_s = 12.59 \cdot 10^{-4}$ и с образцами из упрочняющегося материала (латунь ЛС-59) с диаграммой (векторное пространство)

$$\sigma = \begin{cases} 2G \cdot s & \text{при } s < \varepsilon_s \\ G \cdot (-49 \cdot s^2 + 0.275 \cdot s + 25.64 \cdot 10^4) & \text{при } \varepsilon_s \leq s \leq 2 \cdot \varepsilon_s \\ G \cdot (0.078 \cdot s + 27.27e4) & \text{при } s \geq 2 \cdot \varepsilon_s \end{cases} \quad (17)$$

где $G = 41202 \text{ МПа}$, $\varepsilon_s = 14.27 \cdot 10^{-4}$

Приведем данные экспериментов с указанными образцами при различных значениях k . Для экспериментов отобраны цилиндрические трубчатые образцы из стали-3 и латуни ЛС-59: внутренний диаметр которых $d = 24^{007}$, внешний $D = 26^{007}$ и длина $l = 216 \text{ мм}$. Для устранения начальной анизотропии образцы из латуни ЛС-59 подвергались отжигу в печи при 400° С в течение 40 часов с последующим остыванием вместе с печью; из стали-3 подвергались отжигу в печи при 880° С в течение 2^x часов и с последующим охлаждением с печью до 680° С , дальнейшее охлаждение производилось на воздухе до комнатной температуры.

На основе данных опыта по программе $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ вычисляются соответствующие экспериментальные значения по формулам (15). Расчеты проводились при следующих значениях k : для латуни ЛС-59 $k = 1.1, 1.5, 2.2, 2.5, 3$; для стали СТ-3 $k = 2.5, 3, 3.5, 4$. Опыты проводились с реверсом по кручению до полной разгрузки по растягивающей силе.

На основе экспериментов построены графики зависимости вектора напряжений σ от длины дуги траектории s , которые отражают скалярные свойства материалов (рис. 1, 2).

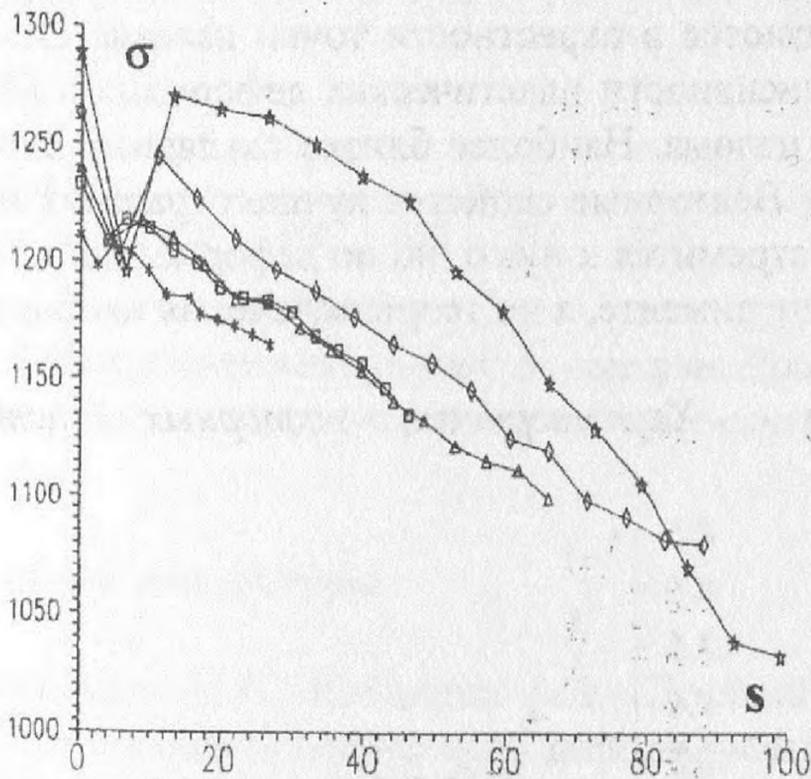


Рис.1 Латунь ЛС-59

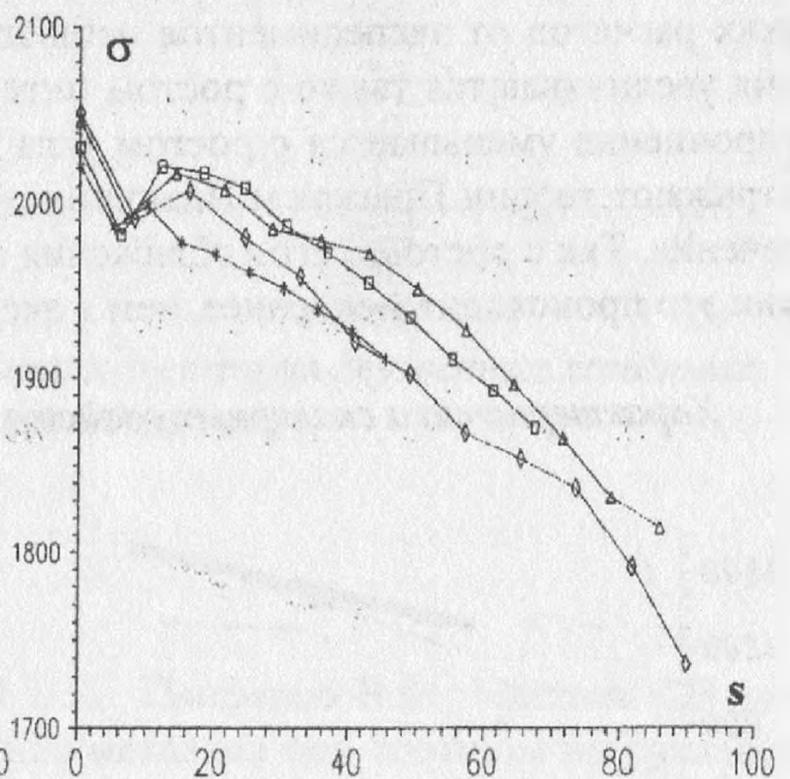


Рис.2 Сталь-3

В экспериментах замечено, что при поддержании постоянной величины интенсивности деформации происходит падение величины интенсивности напряжений, т.е. гипотеза о расширении формы предельной поверхности в теории течения при произвольном нагружении не выполняется.

Далее, из анализа экспериментальных данных следует, что при одних и тех же значениях Δs (длина дуги траектории деформации после излома), но при разных величинах предварительной деформации ε_0 , угол сближения ϑ тем больше, чем больше величина ε_0 .

Следует отметить, что экспериментальная кривая $\vartheta \sim s$ имеет положительную вторую производную. Расчеты по теориям течения (Прагера, Прандтля-Рейсса, идеальной

пластичности) имеют аналогичную форму, кривая же $\vartheta \sim s$, полученная по деформационной теории Ильюшина, имеет отрицательную вторую производную. Это говорит о том, что теории течения отражают качественную картину поведения векторных свойств материала при рассмотренном виде сложного нагружения, чего нельзя сказать о деформационной теории.

2.2. Процессы нагружения тел в виде траекторий с изломом $\theta > 90^\circ$ (пространство деформаций)

Расчеты выполнялись по теориям Кадашевича-Новожилова, Прагера и малых упругопластических деформаций согласно описанного в п.1 методу анализа. Эксперименты проводились на установке СН по методике описанной в [4]. При таком нагружении происходит частичная разгрузка и повторные пластические деформации. В области разгрузки полагалось, что приращения напряжений и деформаций изменяются согласно закону Гука. Поверхность текучести в пространстве деформаций рассматривалась в виде трансляционно-изотропно упрочняющейся гиперсферы с радиусом $r = \Sigma_0/2G$. Где Σ_0 модуль вектора напряжений при котором производится излом. При использовании в расчетах теории Кадашевича-Новожилова $r = \sigma_s/2G$.

P-M опыты. Латунь ЛС-59 ($E = 113796$ МПа, $G = 41202$ МПа, $\sigma_s = 144$ МПа). Диаграмма $\sigma = F(s)$ строилась в экспериментах на чистое кручение и аппроксимировалась в виде (17). Нагружение осуществлялось по траекториям с углами излома $\theta = 105^\circ, 122^\circ$ и 142° . Эксперименты на образцах из стали-3 проведены по траекториям с углами излома $\theta = 110^\circ, 125^\circ, 150^\circ$. Диаграмма для стали-3 использована в виде (16).

Анализ результатов (рис.3, 4) показывает, что наибольшие отклонения теоретических расчетов от экспериментов наблюдаются в окрестности точки излома. Отклонения увеличиваются также с ростом интенсивности пластических деформаций. Модуль упрочнения уменьшается с ростом угла излома. Наиболее близко скалярные свойства отражают теории Прагера и Ильюшина. Векторные свойства лучше отражают теории течения. Так с ростом s угол сближения стремится к нулю, но по деформационной теории это происходит медленнее, чем в эксперименте, а по теориям течения наоборот.

Характеристика скалярных свойств

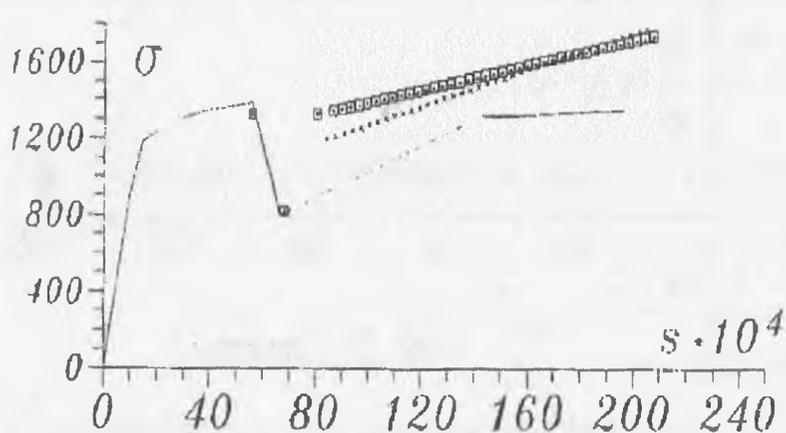


Рис.3

Характеристика векторных свойств

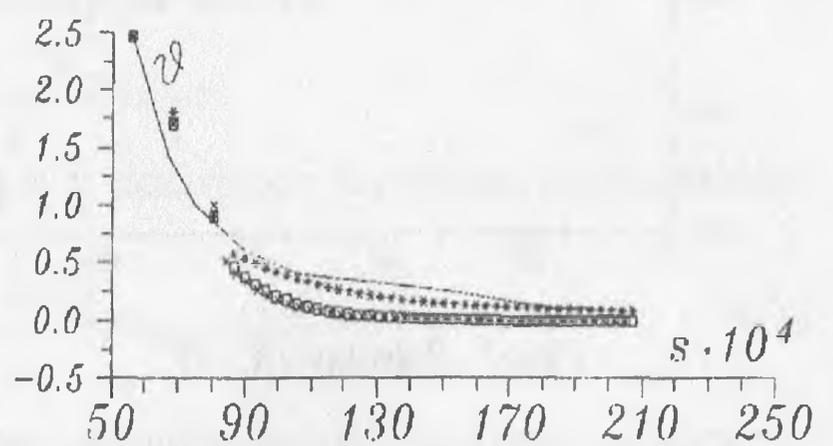


Рис.4

$\theta = 142^\circ$, Латунь ЛС-59.

* – деформационная теория; + – теория Кадашевича-Новожилова, □ – теория Прагера; сплошные линии – результаты обработки экспериментов.

2.3. В качестве следующей иллюстрации рассмотрим задачу о сложном нагружении оболочки вращения под действием поверхностной нагрузки q_1 , сжимающей силы P_0 и внешнего нормального давления q_n . Нагружение зададим следующим образом. Снача-

ла прикладывается давление q_n до появления первых пластических деформаций. Далее, увеличивая q_n , приложим силы P_0 и q_1 .

$$\begin{cases} P_0 = 0, & q_1 = 0, & q_n = -400t, & 0 \leq t \leq 1 \\ P_0 = 100(1-t), & q_1 = -20(t-1), \\ q_n = -(20(t-1) + 400), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

При таком нагружении в каждом сечении оболочки возникают процессы сложного нагружения в виде двузвенных ломаных (рис.5). Причем величина угла излома траектории нагружения увеличивается ближе к основанию.

Рассмотрим решения этой задачи, полученные по теории Прагера и теории Ильюшина, а для получения точного решения примем соотношения модифицированной теории двузвенных ломанных [6], в которой коэффициенты пластичности построены с учетом данных экспериментов на сложное нагружение. Теории Ильюшина и Прагера дают завышенные значения деформаций (рис.6) и отклонения увеличиваются с развитием процесса нагружения.

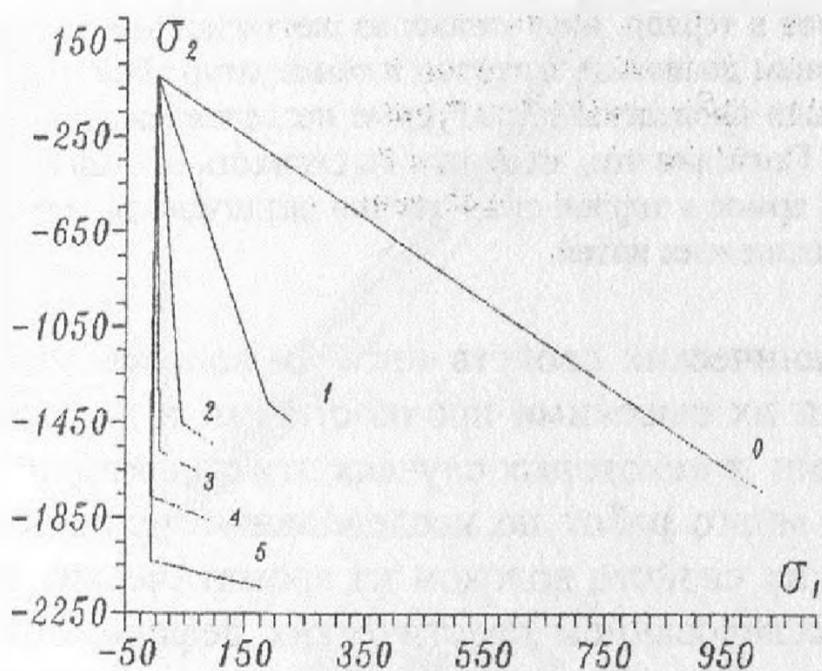


Рис.5.

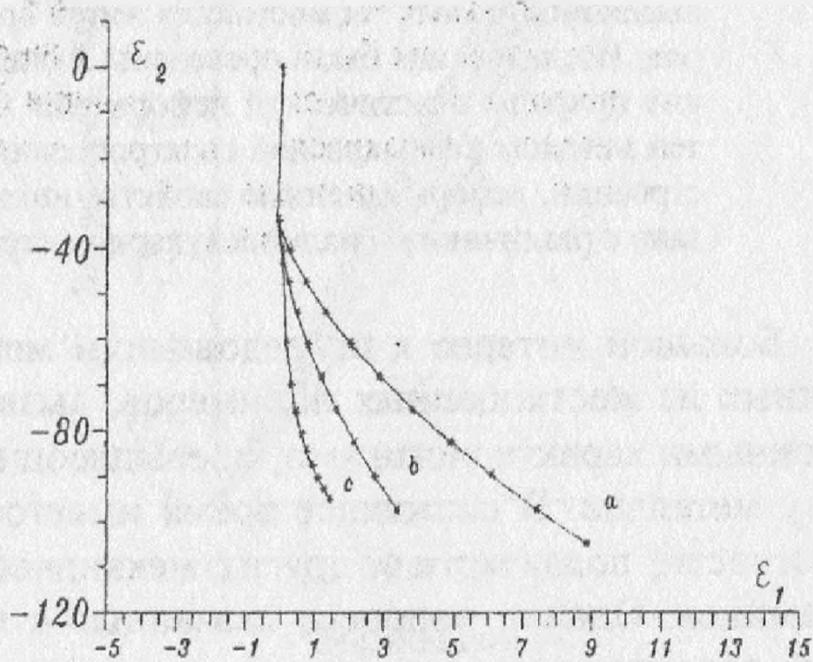


Рис.6.

a – деформационная теория; *b* – теория Прагера; *c* – теория двузвенных ломанных; *n* – различные сечения оболочки.

Список литературы

1. Богатырев И.С., Ильюшин А.А., Ленский В.С., Панферов В.М. Машина СН для исследования пластического деформирования металлов при сложном нагружении. // Инж. сб. 1961. №1 С.181-193.
2. Бабамуратов К.Ш., Гальченко В.Г., Галиаскаров В.А. Автоматизированное рабочее место для исследования упругопластических свойств материалов на установке СН. // Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики 1992. №5-6 С.22-26.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 271с.
4. Бабамуратов К.Ш., Ильюшин А.А., Кабулов В.К. Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент. Фан, 1987. 288с.
5. Бабамуратов К.Ш. К анализу процессов пластичности деформаций конструкций. // Изв АН УзССР, СТН 1980. №5 С.42-47.
6. Абиров Р.А. Об одной модели физических соотношений в теории пластичности. // Узбекский журнал Проблемы механики, 1997. №6 С.7-12