РАСЧЁТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ.

ЛОКТИОНОВ А.В.

В работах [1,2] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в цилиндрической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Для ортогональных криволинейных координат модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$.

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q.

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. При этом искомые $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные цилиндрические оси координат r, φ, z, связанные с движущейся точкой M.

В работе [3] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано для преобразования от прямоугольных к цилиндрическим системам координат, и наоборот.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности.

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки M (на рис.1 не показана) матричным методом выполнены для случая, когда относительно центра O_3 ее координаты x_3, y_3, z_3 = const.

В прямоугольной неподвижной системе координат x y z положение вектора $\vec{R}$ (рис.1) определяется текущими координатами x, y, z точки O_3. В цилиндрической подвижной системе координат положение точки O_3 определяется расстоянием r, углом φ, величиной $O_2 O_3$ =z. Введем также подвижные системы координат x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, начало которых находится в точках O_1, O_2. Указанные на рисунке 1 системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_1, A_2, A. В окончательных расчетных формулах принято, что $x_3 = y_3 = z_3 = 0$; точка M совпадает с точкой O_3. Проекции абсолютной скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ точки O_3 = M определены как на неподвижные оси координат x y z, так и на подвижные цилиндрические оси координат x_3 y_3 z_3 (r, φ, z).

Координаты точки M в неподвижной системе x y z в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе x_3 y_3 z_3 следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

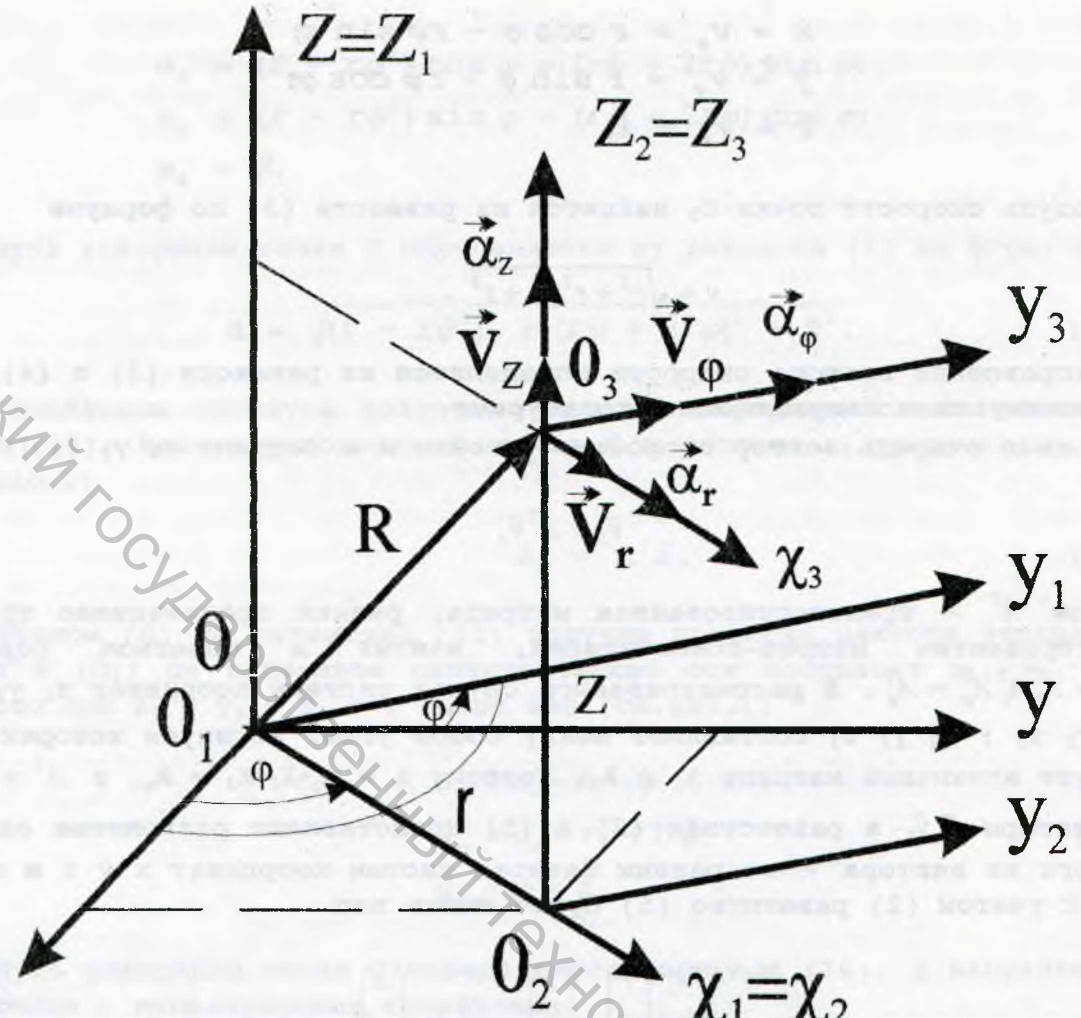

Рис.1 Расчетная схема для определения кинематических параметров в цилиндрической системе координат.

Вектор скорости $\vec{v}$ точки M в системе x y z определяется дифференцированием текущих координат равенства (1) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(A_\varphi \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + A_\varphi \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} \right).$$

При x_3, y_3, z_3 = const получим

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Из формулы (2) определяются проекции вектора скорости точки M (O_3) на неподвижные оси координат x, y, z, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi; \\ \dot{y} &= v_y = \dot{r}\sin\varphi - r\dot{\varphi}\cos\varphi; \\ \dot{z} &= v_z = \dot{z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Модуль скорости точки O_3 найдется из равенств (3) по формуле

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + z^2}\,. \tag{4}$$

Направление вектора скорости определится из равенств (3) и (4) соответствующими направляющими косинусами.

В свою очередь вектор скорости $\vec{v}_3$ точки M в системе $x_3\ y_3\ z_3$ (r, φ, z)

$$\vec{v}_3 = A^{\mathrm{T}}\vec{v}, \tag{5}$$

где A^{T} – транспортированная матрица, равная произведению транспортированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке $A^{\mathrm{T}} = A_2^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}} A_\varphi^{\mathrm{T}} = A_\varphi^{\mathrm{T}}$. В рассматриваемом случае системы координат $x_1\ y_1\ z_1$; $x_2\ y_2\ z_2$; $x_3\ y_3\ z_3$ составляют между собой углы, косинусы которых образуют единичные матрицы A_1 и A_2. Поэтому $A = A_\varphi * A_1 * A_2 = A_\varphi$, а $A^{\mathrm{T}} = A_\varphi^{\mathrm{T}}$.

Векторы $\vec{v};\vec{v}_3$ в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора $\vec{v}$ по разным базисам систем координат x y z и $x_3\ y_3\ z_3$. С учетом (2) равенство (5) будет иметь вид

$$\vec{v}_3 = A_\varphi^{\mathrm{T}}\dot{A}_\varphi\dot{\varphi}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_\varphi^{\mathrm{T}}\dot{A}_\varphi\dot{\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из формулы (6) определяются проекции вектора скорости точки M (O_3) на подвижные цилиндрические оси координат $x_3\ y_3\ z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид

$$\dot{x}_3 = v_r = \dot{r}\,; \qquad \dot{y}_3 = v_\varphi = r\dot{\varphi}; \qquad \dot{z}_3 = v_r = \dot{z}\,. \tag{7}$$

Модуль скорости точки O_3 определяется из равенств (7) формулой (4), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки в цилиндрической системе координат матричным методом. Вектор ускорения $\vec{a}$ точки M в системе x y z определится дифференцированием равенства (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{A}_\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi\ddot{\varphi})\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + 2\dot{A}_\varphi\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_\varphi\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + (\ddot{A}_\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi\ddot{\varphi})\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора ускорения точки M (O_3) на неподвижные оси координат x, y, z, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид:

$$a_x = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi;$$
$$a_y = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi; \qquad (9)$$
$$a_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения точки О определяется из равенств (9) по формуле

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (10)$$

Направляющие косинусы вектора ускорения определяются из равенств (9) и (10). Вектор ускорения $\vec{a}$ точки М в системе x_3 y_3 z_3 (r, φ, z, см. рис.1)

$$\bar{a}_3 = A^{\mathrm{T}}\bar{a}. \qquad (11)$$

С учетом (8) из равенства (11) получим проекции вектора ускорения точки М (O_3) на подвижные цилиндрические оси координат x_3, y_3, z_3, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид (см.рис.1)

$$a_{x_3} = a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$
$$a_{y_3} = a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \qquad (12)$$
$$a_{z_3} = a_z = \ddot{z}$$

Модуль ускорения точки О определяется формулой (10), а направление ускорения - направляющими косинусами.

Полученные расчетные формулы (2), (6) и (8), (11) позволяют определить скорость и ускорение точки М в цилиндрических координатах матричным методом.

Вывод формул для расчета проекций скорости и ускорения точки (см. рис.1) на неподвижные x y z и подвижные x_3 y_3 z_3 (r, φ, z) оси координат достаточно прост. В рассматриваемом случае это объясняется тем, что все элементы третьей строки и столбца матрицы $A = A_\varphi$, кроме главной диагонали, равны нулю. Элемент главной диагонали равен единице. Кроме того, второй элемент столбцевых матриц расчетных формул (2), (6), (8), (11) также равен нулю; при расчете $x_3 = y_3 = z_3 = 0$. Для численного расчета скорости и ускорения точки можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Изложенную методику расчета кинематических параметров следует использовать для определения скорости и ускорения точки в сферических координатах, когда применение известных методов расчета нецелесообразно. Полученные расчетные формулы (3), (4), (7), (9), (10), (12) в частном случае применимы для движения, заданного в полярных координатах. Они позволяют найти проекции скорости и ускорения на радиальное и поперечное направления.

Следует отметить, что расчетные формулы (7), (12) можно получить непосредственно из равенства (3) и (9).

Проекции вектора $\vec{R}$ (рис. 1) в цилиндрической системе координат, а следовательно и векторов $\vec{v};\vec{a}$ могут быть получены применением некоторой математической операции - матричного исчисления к проекциям вектора в прямоугольной системе координат и наоборот. Поэтому проекции скорости (7) и ускорения (12) точки M (O_3) на цилиндрические оси координат x_3 y_3 z_3 (r, φ, z) можно определить, используя матрицу преобразований $A = A_\varphi$, из выражений

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = A_\varphi\begin{pmatrix}\dot x_3\\ \dot y_3\\ \dot z_3\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} = A_\varphi\begin{pmatrix}\ddot x_3\\ \ddot y_3\\ \ddot z_3\end{pmatrix}.$$

Из последних следует, что

$$\begin{aligned}\dot x &= v_x = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi,\\ \dot y &= v_y = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi,\\ \dot z &= v_z = v_z,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\ddot x &= a_x = a_r \cos\varphi - a_\varphi \sin\varphi,\\ \ddot y &= a_y = a_r \sin\varphi + a_\varphi \cos\varphi,\\ \ddot z &= a_z = a_r\end{aligned} \tag{14}$$

Сравнивая соответственно крэффициенты при sin φ и cos φ в формулах (13), (14) и (3), (9),получим искомые равенства (7), (12).

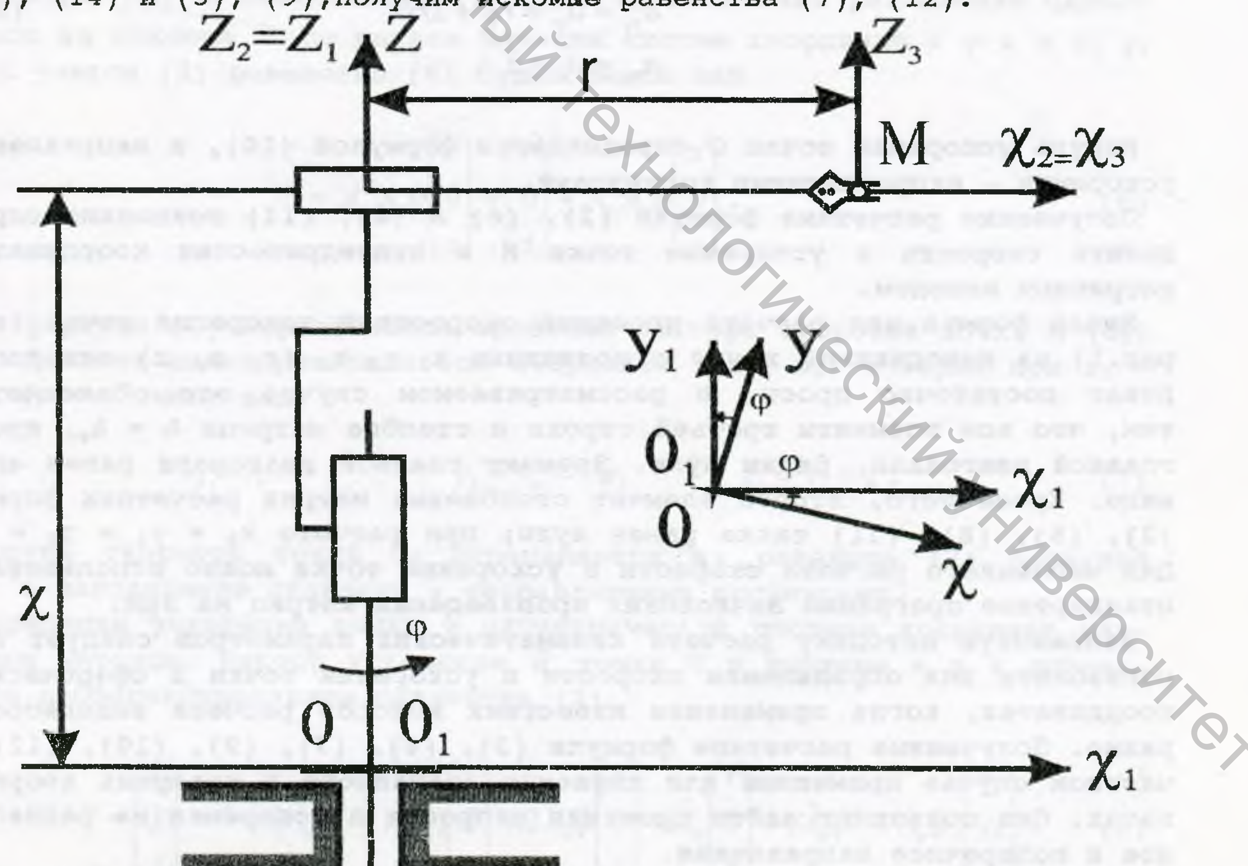

Рис.1 Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенямиподвижности, работающего в цилиндрической системе координат.

Второй вариант получения расчетных формул (7), (12) для определения искомых кинематических характеристик v_r, v_φ, v_z, a_r, a_φ, a_z является проверочным. Однако, по нашему мнению, в методологическом плане лучше использовать основной вариант получения расчетных формул (7) и (12).

Пример (N 12.38 [4]). Механизм робота-манипулятора состоит (рис.2) поворотного устройства, колонны для вертикального перемещения и выдвигающейся руки со схватом. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$.

Кинематическая и расчетная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат, изображена на рис.2. Координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе x y z при заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$ выражаются формулой (1), где $x_3 = y_3 = z_3 = 0$.

Формула для расчета скорости центра схвата имеет вид (6); проекции скорости точки M на подвижные цилиндрические оси координат определяются из (7); искомая скорость – из (4).

Формула для расчета ускорения центра схвата имеет вид (11); его проекции на оси координат определяются из (12); искомое ускорение – из (10).

При заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (1), где роль параметра играет время t. Они имеют вид

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{15}$$

При заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A_φ^{T}, получим из формулы (1). Они имеют вид

$$r = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} y/x, \quad z = z. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$, так и при $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат.

ЛИТЕРАТУРА

1.Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том. 1.- М.: Наука, 1970.- с. 240.

2.Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1.- М.: Наука, 1972.- с. 468.

3.Халфман Р.Л. Динамика. -М.: Наука, 1972.- с. 568. 4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- - М.: Наука, 1986.- с. 448.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1986. - с. 448.