МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования

Витебск
2020

УДК 51:373.5

Составители:
А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 5 от 29.05.2020.

Математика. Тестовые задачи. Планиметрия и стереометрия: методические указания к решению задач централизованного тестирования / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск : УО «ВГТУ», 2020. – 72 с.

Учебное издание является третьей частью пособия при подготовке к централизованному тестированию по математике и содержит задачи на движение, смеси, проценты, треугольники и многоугольники, вписанные и описанные фигуры, многогранники и тела вращения. В издании имеются решение задач по указанным темам, а также приведён справочный материал, включающий в себя основные формулы школьного курса математики по текстовым задачам, планиметрии и стереометрии.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных учреждений и слушателей курсов по подготовке к централизованному тестированию.

УДК 51:373.5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Математика» в Витебском государственном технологическом университете на подготовительных курсах для поступления в высшие учебные заведения. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях абитуриентов и содержит необходимые сведения для решения экзаменационных задач.

В настоящее время традиционные формы проведения вступительных экзаменов по математике заменены тестированием. Предлагаемые методические материалы предназначены учащимся для подготовки к централизованному тестированию по математике, а также могут быть использованы при изучении соответствующих разделов курса математики средней общеобразовательной школы.

Работа включает тестовые задания различной степени сложности, которые представляют все виды задач, встречающихся на централизованном тестировании. Разнообразие тестовых заданий позволяет использовать методические указания при проведении групповых и индивидуальных занятий и для самоподготовки.

Данные учебно-методические материалы предназначены для слушателей подготовительных курсов факультета довузовской подготовки и профориентации УО «ВГТУ». Методические указания написаны в соответствии с учебной программой вступительных испытаний по дисциплине «Математика».

В данной методической работе рассмотрены три раздела дисциплины «Математика» для средней общеобразовательной школы: текстовые задачи, планиметрия и стереометрия. Каждый раздел имеет подразделы: задачи на числовые значения, на движение и работу, проценты, смеси и сплавы, треугольники и многоугольники, вписанные и описанные фигуры, многоугольники и тела вращения, комбинацию различных тел.

Каждая тема работы представляет собой методический материал для проведения практических занятий, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по темам занятий, а также задания для выполнения домашних работ. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать слушателю подготовительных курсов при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме. Прежде чем приступать к решению задач домашнего задания, слушателю необходимо изучить теоретический и практический материал пройденного аудиторного занятия. После выполнения домашнего задания слушатель подготовительных курсов может обратиться к преподавателю за консультацией.

Предложенная методическая разработка поможет слушателям подготовительных курсов к сдаче централизованного тестирования по «Математике».

1 ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Содержание: задачи на числовые значения, задачи на движение, задачи на совместную работу, задачи на сплавы, смеси и проценты, задачи с целочисленными неизвестными.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

К текстовым задачам относятся задачи на составление уравнений и систем уравнений. Решение таких задач обычно осуществляется в три этапа: 1) выбор неизвестного (или нескольких неизвестных) и составление уравнения (или системы уравнений), связывающего некоторой зависимостью выбранное неизвестное с величинами, заданными условием задачи; 2) решение полученного уравнения (или системы уравнений); 3) отбор решений по смыслу задачи.

1.1.1 Задачи на числовые зависимости

При решении задач на числовые зависимости могут оказаться полезными следующие сведения:

1) если натуральное число A имеет n знаков, то число можно записать в виде $A = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_0$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ соответственно количество единиц, десятков, сотен, … в числе A;

2) если при делении натурального числа A на натуральное число B в частном получается q, а в остатке r $(r < B)$, то $A = B \cdot q + r$.

1.1.2 Задачи на движение

При решении этих задач принимаются следующие допущения:

1) если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным;

2) скорость считается величиной положительной;

3) любые переходы на новый режим движения или на новое направление движения считают происходящими мгновенно;

4) если тело с собственной скоростью v_1 движется по реке, скорость течения которой равна v_2, то скорость движения тела по течению считается равной $(v_1 + v_2)$, а против течения – равной $(v_1 - v_2)$;

5) если два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) в разных направлениях, то время между их встречами вычисляется по формуле $\frac{2\pi R}{v_1 + v_2}$, если в одном, то по формуле $\frac{2\pi R}{v_1 - v_2}$.

1.1.3 Задачи на сплавы и смеси

Решение задач этого типа связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность» и основано на следующих допущениях:

1) все рассматриваемые смеси (сплавы, растворы) однородны;

2) не делается различия между литром как единицей ёмкости и литром как единицей массы.

Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C (которые имеют массы соответственно m_1, m_2, m_3), то величина m_1/m (соответственно m_2/m, m_3/m) называется ***концентрацией*** вещества A (соответственно B, C) в смеси. Величина $\frac{m_1}{m}\cdot 100\,\%$ (соответственно $\frac{m_2}{m}\cdot 100\,\%$, $\frac{m_3}{m}\cdot 100\,\%$) называется ***процентным содержанием*** вещества A (соответственно B, C) в смеси. Очевидно, что $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$, то есть от концентрации двух веществ зависит концентрация третьего вещества.

При составлении уравнения обычно прослеживают содержание какого-нибудь одного вещества из тех, которые сплавляются (смешиваются и т. д.).

1.1.4 Задачи на совместную работу

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему. Некоторую работу A, объём которой не указывается и не является искомым (например, перепечатка рукописи, рытьё котлована, заполнение резервуара, вспашка поля и т. д.), выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. Время t, требующееся для выполнения всей работы, и производительность труда V, то есть величина работы, выполняемой за единицу времени, связаны соотношением

$$V = \frac{A}{t}.$$

Часто в таких задачах объём всей работы, которая должна быть выполнена, принимают за единицу.

1.1.5 Задачи на процентный прирост и вычисление сложных процентов

При решении задач на проценты следует учитывать, что под одним процентом некоторой величины подразумевают сотую часть этой величины.

Рассмотрим принцип решения задач на процентный прирост.

Пусть некоторая переменная величина в начальный момент $t=0$ имеет значение A_0, а через некоторое время $t=t_1$, получив процентный прирост p %, имеет значение A_1:

$$\begin{array}{lcl} A_0 & - & 100\,\% \\ A_1 & - & (100+p)\,\% \end{array} \quad \Rightarrow A_1 = A_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Если некоторая величина A_0 поэтапно изменяется в течение времени $n \cdot t_1$ (причём через каждые промежутки $t = t_1$ она изменяется на одно и то же число процентов p %), то её значение в конце n-го этапа вычисляется по формуле

$$A_n = A_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Если некоторая величина A_0 на каждом этапе изменяется на разное число процентов $p_1, p_2, ..., p_n$, то формула принимает вид

$$A_n = A_0 \cdot \left(1+\frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1+\frac{p_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1+\frac{p_n}{100}\right).$$

1.1.6 Задачи с целочисленными неизвестными

Целочисленность искомого неизвестного обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Число единиц двузначного натурального числа на 4 больше десятков этого числа, а произведение числа на сумму его цифр равно 90. Найти число.

Решение. Пусть $\overline{ab} = 10a + b$ является искомым числом. По условию, $b = a + 4$ и $(10a + b)\cdot(a + b) = 90$, причём a и b натуральные числа, $0 < a \le 9$, $0 \le b \le 9$. Подставляя $b = a + 4$ во второе уравнение, приходим к квадратному уравнению $11a^2 + 26a - 37 = 0$, корнями которого являются числа $a_1 = 1$ и $a_2 = -37/11$. Из найденных значений условию задачи удовлетворяет только $a_1 = 1$. Тогда искомым числом является число 15.

1.2.2 Моторная лодка затрачивает 2,5 часа, чтобы пройти 12 километров по течению реки и возвратиться назад. За 1 час 20 минут она проходит 4 километра по течению реки и 8 километров против течения. Определить скорость моторной лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

Решение. Пусть x – скорость лодки в стоячей воде, y – скорость течения реки. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x+y} + \dfrac{12}{x-y} = 2{,}5, \\ \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{8}{x-y} = 1\dfrac{1}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{24}{x+y} + \dfrac{24}{x-y} = 5, \\ \dfrac{12}{x+y} + \dfrac{24}{x-y} = 4. \end{cases}$$

Обозначим $a = \dfrac{12}{x+y}$, $b = \dfrac{24}{x-y}$. Тогда

$$\begin{cases} 2a + b = 5, \\ a + b = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 3. \end{cases}$$

Возвращаемся к переменным x и y, получаем

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, скорость моторной лодки в стоячей воде равна 10 км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч.

1.2.3 К 242 граммам воды добавили 33 грамма сахара. Сколько процентов сахара в полученном растворе?

Решение. Сахарный раствор составляет 242+33=275 (грамм), причём в этом растворе содержится 33 грамма сахара. Найдём процентное содержание сахара в растворе: $\frac{33 \cdot 100\,\%}{275} = 12\,\%$.

1.2.4 Бригаде каменщиков необходимо уложить 240 м^3 кладки. На работу не вышло два человека из бригады. Сколько всего каменщиков было первоначально в бригаде, если каждому работающему каменщику пришлось укладывать на 6 м^3 больше, чем предполагалось первоначально?

Решение. Предположим, что в бригаде первоначально было x каменщиков. На работу вышло $x-2$ каменщика. Каждый каменщик должен был по плану уложить $\frac{240}{x}$ м^3 кладки, фактически же каждый уложил $\frac{240}{x-2}$ м^3 кладки. Из условия задачи получаем уравнение $\frac{240}{x-2} - \frac{240}{x} = 6$, решая которое, находим $x = 10$ или $x = -8$. По смыслу задачи $x > 2$.

Таким образом, первоначально бригада каменщиков состояла из 10 человек.

1.2.5 За три года население города увеличилось с 500000 до 530604 человек. Найти среднегодовой процент прироста населения.

Решение. Пусть p – среднегодовой прироста населения. Воспользуемся формулой «сложных процентов.

$$530604 = 500000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,$$

откуда

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{530604}{500000}} - 1\right) = 2\,\%.$$

Таким образом, среднегодовой прирост населения в городе составил 2 %.

1.2.6 На столе учителя имеются ручки и карандаши, причём общее их количество не менее 14. Если количество ручек увеличить вдвое, а количество карандашей на 18, то карандашей станет больше. Если увеличить вдвое количество карандашей, не изменяя количества ручек, то ручек всё равно будет больше. Какое суммарное количество ручек и карандашей находится на столе учителя?

Решение. Предположим, что на столе учителя имеются x ручек и y карандашей. Учитывая условия задачи, получаем систему:

$$\begin{cases} x + y \geq 15, \\ 2x < y + 18, \\ 2y < x. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенства системы имеем:

$$\begin{cases} x \geq 15 - y, \\ x < \dfrac{1}{2} \cdot (y + 18). \end{cases}$$

Следовательно, $15 - y < \frac{1}{2} \cdot (y + 18)$ или $y > 4$.

Из второго и третьего неравенства системы имеем:

$$\begin{cases} x > 2y, \\ x < \dfrac{1}{2} \cdot (y + 18). \end{cases}$$

Следовательно, $2y < \frac{1}{2} \cdot (y + 18)$ или $y < 6$.

Итак,

$$\begin{cases} 4 < y < 6, \\ y \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \ y = 5.$$

Тогда

$$\begin{cases} x > 10, \\ x < 11{,}5, \\ x \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \ x = 11.$$

Таким образом, на столе учителя находятся 11 ручек и 5 карандашей. Следовательно, на столе находятся 16 заданных канцелярских товаров.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите искомое число.

1.3.2 Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.

1.3.3 Найдите три числа, из которых второе больше первого на столько, на сколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух больших чисел равно 115.

1.3.4 Сумма двух чисел равна 15, а их среднее арифметическое на 25 % больше их среднего геометрического. Найдите эти числа.

1.3.5 Разность двух чисел равна 48, а разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел равна 18. Найдите эти числа.

1.3.6 Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найдите эти числа.

1.3.7 Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы цифр равен утроенному исходному числу. Найдите это число.

1.3.8 Произведение двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

1.3.9 Найдите пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 45.

1.3.10 Представить число 19 в виде разности кубов натуральных чисел.

1.3.11 Существует такое натуральное число, которое равно квадрату натурального числа, если к нему прибавить 100, и равно квадрату другого натурального числа, если к нему прибавить 168. Найдите это число.

1.3.12 Найдите наибольший общий делитель чисел 594, 7920 и 223744.

1.3.13 Найдите наименьшее общее кратное чисел 273,182 и 455.

1.3.14 Произведение двух чисел равно 2655, а их наименьшее общее кратное равно 59. Найдите наибольший общий делитель.

1.3.15 Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105.

1.3.16 Найдите два натуральных числа, зная, что их сумма равна 85, а наименьшее общее кратное 102.

1.3.17 При каких натуральных значениях n дробь $\dfrac{2n-3}{n+1}$ является целым числом?

1.3.18 Найдите сумму натуральных значений n, при которых дробь $\dfrac{2n^3-2n^2-11n+3}{n+1}$ является целым числом.

1.3.19 Найдите количество всех четырёхзначных чисел вида $\overline{3x2y}$, которые делятся на 6.

1.3.20 Найдите количество всех пятизначных чисел вида $\overline{13x2y}$, которые делятся на 30.

1.3.21 Из пункта А в пункт В отправляются три велосипедиста. Первый из них едет со скоростью 10 км/ч. Второй отправляется через 30 минут после первого и едет со скоростью 8 км/ч. Какова скорость третьего велосипедиста, если известно, что он выезжает через 30 минут после второго и догоняет первого через 4 часа после того, как он догонит второго.

1.3.22 Из пункта А в пункт В выехал грузовой автомобиль, через один час из пункта А в пункт В выехал легковой автомобиль. В пункт В машины прибыли одновременно. Если бы из пунктов А и В навстречу друг другу машины выехали одновременно, то встреча произошла бы через 1 час 12 минут. Найдите время за которое грузовик пройдёт путь от А до пункта В.

1.3.23 Из города А в город В выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города В навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посредине между городом А и городом В. Если бы мотоциклист выехал из города В не через 3 часа, а через 2 часа, то встреча произошла бы на 15 км ближе к городу А. Найдите расстояние между городами А и В.

1.3.24 От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 часов 20 минут вслед за ним от пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот пройдя 20 км. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки на 9 км/ч больше скорости плота?

1.3.25 Половину пути лошадь бежала со скоростью 12 км/ч. Остальной путь она шла с грузом со скоростью 4 км/ч. Найдите среднюю скорость лошади на всём пути.

1.3.26 Две точки, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 720 секунд, причём вторая точка обходит окружность на 10 секунд медленнее, чем первая. За какое время первая точка сделает полный оборот по окружности?

1.3.27 Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, который содержит 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

1.3.28 Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько стали одного и другого сорта следует взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

1.3.29 Сколько воды необходимо добавить к 735 граммам 16%-го раствора кислоты, чтобы получить 10%-й раствор кислоты?

1.3.30 Два металла содержатся в каждом из двух взятых сплавов. В первом сплаве металлы находятся в отношении 3:5, а во втором – 1:3. В каком отношении необходимо взять части первоначальных сплавов, чтобы из них получился новый сплав, в котором бы металлы находились в пропорции 3:7?

1.3.31 Из сосуда, который содержит 54 л чистой кислоты, вылили несколько литров и после этого долили сосуд водой до прежнего объёма. Затем из сосуда вылили столько же литров смеси, как и в первый раз. В результате в сосуде осталось смеси с содержанием кислоты в количестве 24 литров. Сколько литров кислоты вылили в первый раз?

1.3.32 Сосуд ёмкостью 8 литров заполнен смесью кислорода и азота, причём на долю кислорода приходится 16 % ёмкости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси, дополняют сосуд до полного объёма азотом и вновь выпускают такое же количество смеси, после чего опять дополняют сосуд азотом до полного объёма. В результате в сосуде стало 9 % кислорода. Сколько литров смеси выпускалось из сосуда каждый раз?

1.3.33 В бассейн проведены две трубы – подающая и отводящая, причём через первую трубу бассейн наполняется на два часа дольше, чем через вторую трубу вода уходит из бассейна. При заполнении бассейна на треть были открыты обе трубы, и бассейн опустел через 8 часов. За сколько часов подающая труба наполняет бассейн, а отводящая труба опорожняет?

1.3.34 Первому трактору на вспашку поля требуется на два часа меньше времени, чем третьему, и на один час больше времени, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 час 12 минут. Какое время t на вспашку всего поля будет затрачено совместно тремя тракторами? В ответ указать значение $62 \cdot t$.

1.3.35 Цену единицы товара снизили на 15 %, а затем новую цену снизили ещё раз на 10 %. На сколько процентов в результате была снижена первоначальная цена единицы товара?

1.3.36 В первый день на бирже лира упала по отношению к доллару на 7 %, а на второй день доллар поднялся ещё на 2 % и стал стоить 1632 лиры. Найти первоначальную стоимость доллара в лирах.

1.3.37 Предприятие работало 3 года. Выработка продукции за второй год работы предприятия возросла на *p* %, а на следующий год она возросла на 10 % больше, чем в предыдущий. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка на второй год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59 %?

1.3.38 Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то, по крайней мере, один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

1.3.39 Искомое трёхзначное число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных двух цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Найти это число.

1.3.40 Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

1.4 Задания для выполнения самостоятельной работы

1.4.1 Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 10. Если от искомого числа отнять 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите искомое число.

1.4.2 Какое двузначное число в четыре раза больше суммы своих цифр и в три раза больше произведения цифр?

1.4.3 Найдите два целых числа, сумма которых равна 1244. Если к первому числу приписать справа цифру 3, а во втором числе отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны.

1.4.4 Трёхзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет больше утроенного первоначального числа на 1. Найдите исходное число.

1.4.5 Шестизначное число начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

1.4.6 Сумму всех чётных двузначных натуральных чисел разделили без остатка на одно из них. Найдите делитель, если известно, что сумма его цифр равна 9, а частное отличается от делителя только порядком цифр.

1.4.7 Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр исходного числа. Найдите исходное число.

1.4.8 Сумма двух трёхзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найдите эти числа, если сумма цифр каждого равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

1.4.9 Однозначное число увеличили на 10. Если теперь полученное число увеличить на столько же процентов, как и в первый раз, то получится 72. Найдите исходное однозначное число.

1.4.10 Разность двух натуральных чисел равна 12, а сумма их среднего арифметического и среднего геометрического равна 18. Найдите эти числа.

1.4.11 Представить число 37 в виде разности кубов двух натуральных чисел.

1.4.12 Найдите наибольший общий делитель чисел 882, 1008 и 1134.

1.4.13 Найдите наименьшее общее кратное чисел 40,64 и 112.

1.4.14 Произведение двух чисел равно 3042, а их наименьшее общее кратное равно 78. Найдите наибольший общий делитель.

1.4.15 Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 13, а наименьшее общее кратное равно 78.

1.4.16 При каких целых значениях n дробь $\dfrac{3n-1}{n+2}$ является натуральным числом?

1.4.17 Найдите наименьшее натуральное значение n, при котором дробь $\dfrac{3n^2-16n+21}{n-3}$ является натуральным числом.

1.4.18 Найдите количество всех четырёхзначных чисел вида $\overline{3x1y}$, которые делятся на 9.

1.4.19 Найдите количество всех пятизначных чисел вида $\overline{13x3y}$, которые делятся на 15.

1.4.20 Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Через 4 часа после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

1.4.21 Товарный поезд был задержан в пути на 12 минут, затем на расстоянии в 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Какова была первоначальная скорость поезда?

1.4.22 В одно и тоже время навстречу друг другу из городов М и Н должны были выйти два человека А и Б, соответственно. Человек А задержался и вышел позже на 6 часов. При встрече выяснилось, что человек А прошёл на 12 км меньше, чем человек Б. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате человек А пришёл в город Н через 8 часов, а человек В в город М через 9 часов после встречи. Найти расстояние между городами и скорость людей.

1.4.23 Скорость поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна пассажира начал проходить встречный поезд, он включил секундомер и отметил, что встречный поезд проехал мимо окна за 3 секунды. Известно, что длина встречного поезда равна 75 метрам. Найдите скорость встречного поезда.

1.4.24 В 10 часов катер вышел из пункта М вверх по реке и через некоторое время прибыл в пункт Н. Через два часа после прибытия в пункт Н катер отправился обратно и прибыл в пункт М в 20 часов 20 минут того же дня. Расстояние МН равно 60 км, средняя скорость течения реки 3 км/ч, а скорость катера одна и та же. Найдите время в которое катер прибыл в пункт Н.

1.4.25 Пароход, отчалив от пристани М, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку против течения на 20 км до пристани Н, затратив на весь путь 7 часов. Найдите собственную скорость парохода, если скорость течения реки и притока одна и таже, и равна 1 км/ч.

1.4.26 Два пешехода, вышедшие одновременно навстречу друг другу, встретились через три часа двадцать минут. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти всё расстояние, если первый пришёл в то место, из которого вышел второй, на пять часов позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

1.4.27 Два велосипедиста выехали одновременно из двух пунктов в третий, куда они договорились прибыть одновременно. Первый прибыл на место встречи через два часа, а второму, чтобы прибыть вовремя, надо было проезжать каждый километр на одну минуту быстрее первого, так как его путь был длиннее на 6 километров. Найдите скорости велосипедистов.

1.4.28 По окружности длиною 60 м равномерно и в одном направлении движутся две материальные точки. Одна из них делает полный оборот на 5 секунд быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через одну минуту. Найдите скорости материальных точек.

1.4.29 Две бригады, работая вместе, ремонтируют дорогу за 18 дней. Если бы вначале первая бригада выполнила 2/3 всей работы, а затем вторая бригада заканчивала ремонт всей дороги, то они отремонтировали бы всю дорогу за 40 дней, причём известно, что производительность первой бригады выше, чем второй. За сколько дней каждая бригада отдельно может отремонтировать эту дорогу?

1.4.30 Два поезда отправляются из пунктов М и Н навстречу друг другу. Если поезд из пункта М выйдет на два часа раньше, чем поезд из пункта Н, то они встретятся на половине пути. Если же оба поезда выйдут одновременно из своих пунктов, то через два часа расстояние между ними составит четверть расстояния между М и Н. За какое время каждый поезд проходит весь путь?

1.4.31 Две трубы, открытые одновременно, наполняют бассейн за два часа двадцать четыре минуты. Сначала была открыта первая труба на четверть времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить самой весь бассейн. Затем вторая труба в течение четверти времени, которого необходимо первой трубе самой наполнить весь бассейн, наполняла бассейн. После этого оказалось, что бассейн наполнен на 13/24. Сколько времени необходимо на заполнение всего бассейна каждой трубе в отдельности?

1.4.32 Токарь вытачивает шахматные пешки для некоторого числа комплектов шахмат. Если бы он изготавливал ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь, то такое же задание он выполнил бы на 10 дней раньше. Если бы на 4 пешки больше, то на 16 дней раньше. Какое число комплектов шахмат должен обеспечить пешками токарь, если каждый комплект содержит 16 пешек?

1.4.33 По плану за некоторый период бригада рыбаки должны поймать 180 т рыбы. В первую треть указанного периода план не выполнялся на 20 ц ежедневно, зато в остальные дни улов составлял на 20 ц больше ежедневного планового улова. В результате план был выполнен на один день раньше заданного срока. Сколько тонн рыбы первоначально планировала вылавливать бригада рыбаков каждодневно?

1.4.34 По плану завод должен за несколько месяцев изготовить 6000 редукторов. Завод, увеличив производительность труда, стал выпускать в месяц на 70 редукторов больше, чем было предусмотрено планом. В результате завод на один месяц установленного срока перевыполнил норму на 30 редукторов. Сколько месяцев было предусмотрено заводу на изготовление 6000 редукторов, по плану?

1.4.35 Бригаде строителей необходимо уложить 432 $м^3$ кирпичной кладки. Из бригады на другой участок было переведено четыре строителя. Чтобы выполнить план, каждому из оставшихся строителей в бригаде пришлось уложить на 9 $м^3$ больше, чем если бы бригада работала в полном составе. Определите первоначальное число строителей в бригаде.

1.4.36 Три человека получили гонорар за выполненную работу в размере 1410 рублей. Второй человек получил 60 рублей плюс треть от того, что получил первый, а третий получил 30 рублей плюс треть от того, что получил второй. Какой гонорар получил каждый из людей за выполненную работу?

1.4.37 Во втором осеннем месяце цена на груши была снижена на 10 % по отношению к цене в первом осеннем месяце, а в третьем месяце цена повысилась на 10 %. Сколько процентов составляет цена на груши в третьем осеннем месяце по отношению к цене первого месяца?

1.4.38 В первый день на бирже марка поднялась по отношению к лире на 8 %, а во второй день лира упала ещё на 4 %, и за одну марку приходилось платить 1221 лиру. Найдите первоначальную стоимость марки в лирах.

1.4.39 Цену товара сначала снизили на 20 %, а затем новую цену снизили ещё на 15 %, а затем полученную цену снизили ещё на 10 %. Определить, на сколько всего процентов снизили первоначальную стоимость товара.

1.4.40 После смешивания 30 % и 10 % растворов кислоты получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора взяли первоначально?

1.4.41 Объём сосуда равен восьми литрам. Сосуд заполняется воздухом, который содержит 16 % кислорода. Из сосуда откачивают часть воздуха и закачивают азот до полного объёма. После этого из сосуда откачивают тот же объём полученной смеси и опять закачивают азот до полного заполнения сосуда. В полученной смеси оказалось 9 % кислорода. Сколько литров смеси выпускалось и закачивалось в сосуд?

1.4.42 Из бака, объёмом 64 литра, заполненного чистым спиртом, отлили его часть и долили до прежнего объёма водой. После этого из бака отлили столько же смеси, сколько первый раз отливали спирта. После второго отливания в баке осталось 49 литров чистого спирта. Сколько литров спирта отливали из бака каждый раз?

1.4.43 Имеется два сплава, каждый из которых содержит два металла. В первом сплаве металлы относятся как 1:2, а во втором сплаве как 2:3. Сколько частей каждого сплава необходимо взять, чтобы получить новый сплав, который бы содержал те же металлы в пропорции 17:27?

1.4.44 В одной бочке содержится смесь воды и спирта в пропорции 2:3, а в другой бочке так же содержится смесь воды и спирта в пропорции 3:7. Сколько вёдер смеси необходимо взять из первой бочки, чтобы, смешав её с некоторым количеством смеси из второй бочки, получить 12 вёдер смеси воды и спирта в пропорции 3:5?

1.4.45 Имеется два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток содержит 40 % олова, а второй содержит 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором слитках одинаково. Сплавив 150 кг первого слитка и 250 кг второго слитка, получим сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве?

1.4.46 Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причём девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

1.4.47 Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 5. Найдите это число.

1.4.48 Банк начисляет ежегодно 3 % от суммы вклада. Через сколько лет внесённая сумма удвоится?

2 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Содержание: треугольники, формулы вычисления периметра и площади, признаки равенства и подобия треугольников, линии в треугольнике и их свойства.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

2.1.1 Произвольный треугольник

Треугольником называется фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Точки называются ***вершинами*** треугольника, а отрезки – ***сторонами***.

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь треугольника; h_a, m_a, l_a – длины высоты, медианы и биссектрисы, проведённых к стороне a.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a; \qquad S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha;$$

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$ и – ***формула Герона***;

$$S=p\cdot r; \qquad S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}.$$

2. ***Теорема косинусов***: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$.

3. ***Теорема синусов***: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R$.

4. ***Медианой треугольника*** называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника (центр тяжести). Точка их пересечения делит медианы на отрезки, длины которых относятся $2:1$, считая от соответствующей вершины. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Если O – точка пересечения медиан треугольника ABC, то площади треугольников AOB, AOC и BOC равны между собой и равны одной трети площади треугольника ABC.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 - a^2}\,;$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot m_b^2 + 2 \cdot m_c^2 - m_a^2}\,.$$

5. ***Биссектрисой треугольника*** называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключённый между вершиной треугольника и точкой пересечения биссектрисы внутреннего угла с противоположной стороной. Биссектриса треугольника представляет геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Биссектриса при пересечении делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник. Следовательно, точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от сторон треугольника.

$$l_a = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c} \quad \text{или} \quad l_a = \frac{2 \cdot \sqrt{b \cdot c \cdot p \cdot (p - a)}}{b + c}\,.$$

Если биссектриса угла α разбивает противолежащую сторону a на два отрезка длиной b_1 и c_1, то $l_a = \sqrt{b \cdot c - b_1 \cdot c_1}$.

6. ***Высотой треугольника*** называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или её продолжение. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (***ортоцентр***). Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника. Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла. Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника, на продолжении высот и сторон, образующих тупой угол.

$$h_a = b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\gamma\,; \qquad h_a = \frac{2 \cdot S}{a} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}\,.$$

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

7. Три перпендикуляра, восстановленные к серединам сторон (***серединные перпендикуляры***), пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной окружности.

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S};\qquad R=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}=\frac{b}{2\cdot\sin\beta}=\frac{c}{2\cdot\sin\gamma};$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{p}};\qquad r=\frac{a+b-c}{2};\qquad r=p-c.$$

8. ***Средняя линия треугольника*** параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине. Средняя линия треугольника отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Три средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольников, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

9. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности.

Сумма углов треугольника равны 180^0: $\alpha+\beta+\gamma=180^0$.

Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

Внешний угол треугольника $\delta=180^0-\gamma$ равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\delta=\alpha+\beta$.

2.1.2 Прямоугольный треугольник

Треугольник называется ***прямоугольным***, если один из его углов прямой. Стороны, образующие прямой угол, называются ***катетами***, а сторона, лежащая против прямого угла, называется ***гипотенузой***.

Пусть a, b – катеты треугольника; c – гипотенуза; a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу; h_c – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c;\qquad S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$

2. ***Теорема Пифагора***:

$$a^2+b^2=c^2.$$

3. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы; радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, а также равен медиане, проведённой из вершины прямого угла.

4. Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{c}{2}.$$

5. Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

6. Соотношения между сторонами, высотой и проекциями катетов:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c; \qquad a^2 = c \cdot a_c; \qquad b^2 = c \cdot b_c.$$

7. Соотношения между сторонами и углами треугольника:

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = b \cdot \mathrm{ctg}\,\beta.$$

2.1.3 Равнобедренный и равносторонний треугольник

Треугольник называется ***равнобедренным***, когда две его стороны равны, при этом третья сторона называется ***основанием*** равнобедренного треугольника. Треугольник называется ***равносторонним***, если все его стороны равны.

Справедливы следующие утверждения.

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании 2 равны.

2. Высота, проведённая из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является также биссектрисой и медианой.

3. В равностороннем треугольнике все углы равны 60^0.

4. В равностороннем треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины треугольника, совпадают; центр окружности, вписанный в равносторонний треугольник, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, и эта точка называется ***центром треугольника***.

5. Площадь равностороннего треугольника:

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

6. Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности: $r = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$.

7. Радиус описанной вокруг равностороннего треугольника окружности: $R = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

8. Связь радиусов вписанной и описанной окружностей в равносторонний треугольник определяется равенством $R = 2 \cdot r$.

2.1.4 Признаки подобия треугольников

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***преобразованием подобия***, если при этом преобразовании расстояние между точками изменяется в одно и то же число раз, например, в k раз, который называется ***коэффициентом подобия***. Треугольники называются ***подобными***, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

1. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

2. Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Подобие прямоугольных треугольников можно определить по равенству одного острого угла, по пропорциональности двух катетов, по пропорциональности катета и гипотенузы.

2.1.5 Признаки равенства треугольников

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются равными, если у них $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$.

1. Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Равенство прямоугольных треугольников можно определить: 1) по равенству двух катетов; 2) по равенству одного катета и гипотенузы; 3) по равенству катета и прилежащему острому углу; 4) по равенству катета и противолежащему острому углу; 5) по равенству гипотенузы и острому углу.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Отрезок, соединяющий её основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти наибольший острый угол треугольника.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^0$). Пусть BE – медиана, O – точка пересечения медиан, AD – биссектриса и $OD \perp BC$. Согласно свойству точки пересечения медиан, $EO:OB = 1:2$. Так как $OD \parallel EC$, то $CD:DB = EO:OB = 1:2$. Используя свойство биссектрисы треугольника, получаем $CD:DB = AC:AB$, то есть $AC:AB = 1:2$. Следовательно, $\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle B = 30^0$, $\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 30^0 = 60^0$. Таким образом, наибольший острый угол в заданном треугольнике равен 60^0.

2.2.2 В равнобедренном треугольнике ABC высоты AE и BD, проведённые к основанию AC и к боковой стороне BC, равны соответственно 10 и 12 см. Найти длину основания AC.

Решение. Пусть $AC = x$, $AB = BC = y$. Прямоугольные треугольники AEC и BDC подобны (угол C – общий). Следовательно, $BC:AC = BD:AE$ или $y:x = 10:12 = 5:6$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику BDC, имеем $BC^2 = BD^2 + DC^2$ или $y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}, \end{cases}$$

получим $x = 15$. Следовательно, $AC = 15$ см.

2.2.3 Площадь треугольника ABC равна 30 см^2. На стороне AC взята точка D так, что $AD:DC = 2:3$. Длина перпендикуляра DE, проведённого на сторону BC, равна 9 см. Найти длину сторону BC.

Решение. Треугольники ABD и BDC имеют общую высоту BF. Следовательно, их площади относятся как длины оснований, то есть $S_{ABD}:S_{BDC} = AD:DC = 2:3$. Учитывая, что $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC}$, получаем значение площади $S_{BDC}=\frac{3}{5}\cdot S_{ABC}=18$ см^2. С другой стороны, $S_{BDC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DE$ или $18=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 9$, откуда $BC=4$ см.

2.2.4 В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^0$) высота CD, длиной 2 см, делит гипотенузу на отрезки, разность длин которых равна 3 см. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Обозначим длину большего отрезка на гипотенузе через x, а меньшего отрезка обозначим через y. Согласно условию задачи и свойству перпендикуляра, проведённого из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x\cdot y=2^2, \end{cases}$$

откуда $x=4$, $y=1$. Длина гипотенузы $AB=x+y=5$. Площадь треугольника ABC равна $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5$ (см^2).

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Длина одного из катетов прямоугольного треугольника больше длины другого на 10 см, но меньше длины гипотенузы на 10 см. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

2.3.2 В треугольнике ABC отрезок $BD=\frac{AB\cdot\sqrt{3}}{4}$ является медианой, а угол $\angle DBC=90^0$. Найдите величину угла $\angle ABD$.

2.3.3 В треугольнике длина основания на 4 меньше длины высоты, а площадь этого треугольника равна 96. Найдите сумму квадратов длин высоты и основания треугольника.

2.3.4 Длины сторон треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Наибольшая сторона треугольника превосходит наименьшую на 1,6. Найдите отношение периметра треугольника к его площади.

2.3.5 В равнобедренном треугольнике величина угла при вершине равна 120^0, а его площадь равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину основания треугольника.

2.3.6 Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 12 см. Вычислите удвоенное значение длины медианы, проведённой к большей стороне.

2.3.7 В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$ см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

2.3.8 Найдите площадь S треугольника, длины медиан которого равны 12, 15 и 21. В ответе укажите значение выражения $\sqrt{6} \cdot S$.

2.3.9 Длина основания равнобедренного треугольника равна a, а величина при вершине этого треугольника равна α. Найдите длину биссектрисы, проведённой к боковой стороне.

2.3.10 Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

2.3.11 Биссектриса угла B треугольника ABC делит сторону AC на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Определить периметр треугольника ABC, если $AB - BC = 18$.

2.3.12 Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, длина одного из которого равна одной из сторон. Длины сторон равны 30 см и 50 см. Найдите длину третьей стороны.

2.3.13 В треугольнике ABC длина стороны AB равна 2 см. Из вершины B к стороне AC проведена медиана BD, длина которой равна 1 см. Найдите площадь S треугольника ABC, если $\angle BDA = 30^0$. В ответе укажите значение выражения $\dfrac{16 \cdot S}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}$.

2.3.14 Найдите наибольший острый угол треугольника, в котором высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

2.3.15 В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Известно, что синус этого угла в три раза больше косинуса угла при вершине. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника. В ответе укажите значение выражения $\left(\sqrt{292} - 2\right) \cdot \sin \alpha$.

2.3.16 В прямоугольном треугольнике KMN ($\angle M = 90^0$) отрезок MF – медиана. Найдите длину стороны MN, если $KM = 2\sqrt{6}$, $MF = 3$.

2.3.17 Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 20, а косинус одного из острых углов равен 0,8. Найдите периметр треугольника.

2.3.18 Длины сторон треугольника равны 3, 5 и 6. Найдите косинус наибольшего угла треугольника.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 В равнобедренном прямоугольном треугольнике длина каждой из медиан, проведённых к катетам, равна 5 см. Найдите площадь треугольника.

2.4.2 Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 см и 6 см. Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины прямого угла.

2.4.3 Точка на гипотенузе, равноудалённая от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найдите периметр треугольника.

2.4.4 Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 4 метра, а медианы боковой стороны равны 3 метрам. Найдите длину основания треугольника.

2.4.5 Длина основания треугольника равна 20 см. Медианы боковых сторон равны 18 и 24 см. Найдите площадь треугольника.

2.4.6 Определить площадь треугольника, если длины его двух сторон равны 27 и 29 метров, а длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 26 метрам.

2.4.7 В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Катеты треугольника равны 10 и 15 см. Найдите произведение площади квадрата на его периметр.

2.4.8 В равносторонний треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании. Найдите площадь треугольника, если длина стороны квадрата равна $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[4]{3}$.

2.4.9 В треугольнике ABC заданы длины сторон: $AB = 3\,см$, $AC = 5\,см$ и $BC = 6\,см$. Найдите расстояние от вершины C до высоты, опущенной из вершины B.

2.4.10 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если медиана длиной 4 см, проведённая из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении $1:2$.

2.4.11 Катет прямоугольного треугольного треугольника равен 18. Точка, принадлежащая данному катету, удалена от гипотенузы и другого катета на 5. Найдите периметр треугольника.

2.4.12 Два подобных прямоугольных треугольника имеют по катету одинаковой длины, равной 6. Если площади треугольников относятся как $9:4$, то площадь большего треугольника равна …

2.4.13 На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 6$, $DC = 8$. Если длина перпендикуляра DH проведённого на сторону BC, равна 4, то высота, проведённая из вершины A, равна …

2.4.14 Сторона AC треугольника ABC равна $3\sqrt{21}$. Параллельно стороне AC проведена прямая, пересекающая две другие его стороны в точке M и N и делящая площадь треугольника в отношении $S_{BMN} : S_{AMNC} = 1:2$. Найдите длину отрезка MN.

2.4.15 В равнобедренном треугольнике длины медиан, проведённых к боковым сторонам, равны 30 см, а длина основания равна 32. Найдите площадь треугольника.

2.4.16 Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 30, а косинус одного из острых углов равен 0,6. Найдите периметр треугольника.

2.4.17 В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CF является высотой, проведённой к гипотенузе AB, причём $AF = 3$, $BF = 12$. Найдите синус угла CBA.

2.4.18 Длины сторон треугольника равны 3, 5 и 6. Найдите косинус наименьшего угла треугольника.

3 ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Содержание: многоугольники, параллелограмм, ромб, прямоугольник квадрат, трапеция, площади многоугольников, прямые, углы, пропорциональные отрезки.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

3.1.1 Многоугольник

Ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ называется фигура, которая состоит из конечного числа точек $A_1, A_2, ..., A_n$ и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***вершинами*** ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ – ***звеньями*** ломаной. Ломаная называется ***простой***, если она не имеет самопересечений. Ломаная называется ***замкнутой***, если у неё концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется ***многоугольником***, если её соседние звенья не лежат на одной прямой. Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, а звенья ломаной – ***сторонами многоугольника***. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника называются ***диагоналями***. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется ***n-угольником***.

Плоским многоугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником. Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. ***Углом выпуклого многоугольника*** при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Выпуклый многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны равны и все углы равны.

Пусть a_n – сторона правильного n-угольника; P_n – периметр правильного n-угольника; S_n – площадь правильного n-угольника; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности.

Справедливы следующие утверждения.

1. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360^0.

3. Сторона правильного n-угольника: $a_n = 2 \cdot R \cdot \sin\dfrac{180^0}{n}$.

4. Площадь правильного n-угольника: $S_n = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \sin\frac{360^0}{n}$ или $S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r$.

3.1.2 Произвольный выпуклый четырёхугольник

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков.

Пусть d_1, d_2 – длины диагоналей четырёхугольника; φ – угол между ними; S – площадь четырёхугольника. Площадь выпуклого четырёхугольника определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi .$$

3.1.3 Параллелограмм

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

Пусть a и b – длины смежных сторон параллелограмма; α – угол между ними; d_1, d_2 – длины диагоналей параллелограмма; φ – угол между диагоналями; S – площадь параллелограмма; h_a – длины высоты, проведённой к стороне a.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = a \cdot h_a; \qquad S = a \cdot b \cdot \sin\alpha; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi .$$

2. В параллелограмме противолежащие стороны равны.

3. В параллелограмме противолежащие углы равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

5. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)$.

6. Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

7. Если в четырёхугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

8. Если в четырёхугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

3.1.4 Ромб

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Пусть a – длина стороны ромба; α – угол между сторонами; d_1, d_2 – длины диагоналей ромба; S – площадь ромба; h – длина высоты, проведённой к стороне.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади ромба:

$$S = a \cdot h; \qquad S = a^2 \cdot \sin\alpha; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2.$$

2. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

3. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

4. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.

5. Если в четырёхугольнике стороны равны, то этот четырёхугольник является ромбом.

3.1.5 Прямоугольник

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Пусть a и b – длины смежных сторон прямоугольника; d – длина диагоналей прямоугольника; φ – угол между диагоналями; S – площадь прямоугольника.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = a \cdot b; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin\varphi.$$

2. Диагонали прямоугольника равны.

3. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

4. Если в параллелограмме все углы равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

5. Если в параллелограмме один угол прямой, то этот параллелограмм является прямоугольником.

3.1.6 Квадрат

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Пусть a – длина стороны квадрата; d – длина диагонали квадрата; S – площадь квадрата.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади квадрата:

$$S = a^2; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot d^2.$$

2. Длина диагонали: $d = a \cdot \sqrt{2}$.

3. У квадрата все углы прямые.

4. Диагонали квадрата равны.

5. Диагонали квадрата пересекаются под прямым углом.

6. Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

7. Если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то этот прямоугольник является квадратом.

3.1.7 Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются ***основаниями*** трапеции, а две другие стороны называются ***боковыми*** сторонами. Трапеция, в которой боковые стороны равны, называется ***равнобедренной*** или ***равнобокой***. Трапеция, в которой угол при основании является прямым, называется ***прямоугольной*** трапецией.

Пусть a и b – длины оснований трапеции; d_1 и d_2 – длины диагоналей трапеции; φ – угол между диагоналями; S – площадь трапеции; l – средняя линия трапеции; h – высота трапеции.

Справедливы следующие утверждения.

1. Формулы для вычисления площади трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \qquad S = l \cdot h; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi .$$

2. Формула вычисления средней линии трапеции: $l = (a+b)/2$.

3. В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

3.1.8 Прямые, углы и пропорциональные отрезки

Справедливы следующие утверждения.

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны.

2. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.

3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180^0.

4. Смежные углы в сумме составляют 180^0.

5. Вертикальные углы равны.

6. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (теорема Фалеса).

7. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Сумма углов выпуклого многоугольника равна 1800^0. Найти число сторон многоугольника.

Решение. Воспользуемся формулой суммы углов выпуклого многоугольника $180^0 \cdot (n-2)$. Получим $180^0 \cdot (n-2) = 1800^0$, $n-2=10$, $n=12$. Таким образом, многоугольник имеет 12 сторон.

3.2.2 Большая сторона прямоугольника $ABCD$ равна $\sqrt{10}$, а косинус угла между диагоналями равен $-1/4$. Найти длину диагонали прямоугольника.

Решение. Пусть точка O является точкой пересечения диагоналей AC и BD $(AC = BD)$, а AD – большая сторона. Так как косинус угла α между диагоналями отрицателен, то этот угол лежит против большей стороны AD. В треугольнике AOD применим теорему косинусов.

$$AD^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha ,$$

$$\sqrt{10}^2 = \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}AC^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \text{ или } AC = 4.$$

3.2.3 Площадь ромба равна 6, а отношение диагоналей – 3:4. Найти периметр ромба.

Решение. Обозначим длины диагоналей ромба буквами d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$), тогда $d_2 = \frac{3}{4}\cdot d_1$. Воспользуемся формулой площади ромба: $S = \frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$. Откуда $d_1 = 4$; $d_2 = 3$. Так как диагонали ромба перпендикулярны, то длина его стороны равна: $a = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2} = 2{,}5$. Найдём периметр: $P = 4\cdot 2{,}5 = 10$.

3.2.4 Основание трапеции $ABCD$ имеют длины $BC = 10$ и $AD = 24$, а боковые стороны – $AB = 13$ и $CD = 15$. Найти площадь трапеции.

Решение. Так как $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot h = 17\cdot h$, то достаточно вычислить длину высоты h. В трапеции проведём высоту CM и прямую $CK \parallel AB$. В полученном треугольнике KCD: CM – высота; $KC = AB = 13$; $CD = 15$; $KD = AD - BC = 14$.

$$S_{CKD} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Но $S_{CKD} = \frac{1}{2}\cdot CM\cdot KD$. Следовательно, $84 = \frac{1}{2}\cdot CM\cdot 14$ или $h = CM = 12$. Тогда $S_{ABCD} = 17\cdot h = 17\cdot 12 = 204$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 В квадрате $ABCD$ точка M – середина BC, а O – точка пересечения DM и AC. Найдите тангенс угла MOC.

3.3.2 Дан квадрат $ABCD$ со стороной длины единица. Точка K принадлежит стороне CD и делит её в отношении $1:2$ считая от вершины C. Найдите расстояние d от вершины C до прямой AK. В ответе укажите значение $1/d^2$.

3.3.3 Найдите величину угла α между диагоналями прямоугольника с периметром $2p$ и площадью $3p^2/16$. В ответе укажите значение выражения $25\cdot\sin\alpha$.

3.3.4 В параллелограмме $ABCD$ величина угла BAD равна 60^0, а длина стороны AB равна 3 см. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь S треугольника ABE. В ответе укажите значение выражения $16\cdot S^2$.

3.3.5 Параллелограмм с периметром 44 см разделён диагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6 см. Найдите площадь параллелограмма, если его острый угол равен 30^0.

3.3.6 Дан параллелограмм, в котором величина острого угла равна 60^0. Найдите целое значение отношения длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов длин диагоналей равно $3/7$.

3.3.7 В ромбе $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Найдите величину угла $MAN = \alpha$, если величина угла BAD равна 60^0. В ответе укажите значение выражения $338 \cdot tg^2\alpha$.

3.3.8 Периметр ромба равен 48, а сумма длин диагоналей равна 26. Найдите площадь ромба.

3.3.9 В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB и меньшего основания BC равны 2 см и $BD \perp AB$. Найдите квадрат площади трапеции.

3.3.10 Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении $3:5$. Найдите произведение длин оснований.

3.3.11 В трапеции длины оснований равны 5 см и 15 см, а длины диагоналей – 12 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

3.3.12 Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой, соединяющей середины её диагоналей.

3.3.13 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если длина её диагонали равна 15 см, а угол между этой диагональю и большим основанием равен 15^0.

3.3.14 Найдите площадь S равнобедренной трапеции с высотой, равной 2 см, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60^0. В ответе укажите значение выражения $\sqrt{27} \cdot S$.

3.3.15 Вычислите площадь S прямоугольной трапеции, у которой длины оснований равны 10 см и 26 см, а одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне. В ответе укажите значение выражения $\sqrt{10} \cdot S$

3.3.16 Сторона AB правильного многоугольника равна 10 см, а угол AOB, где O – центр многоугольника, равен 15^0. Найдите периметр многоугольника.

3.3.17 Периметр правильного шестиугольника равен 96 см. Найдите его меньшую диагональ.

3.3.18 Дан правильный многоугольник со стороной 4 см. Сумма всех внутренних его углов равна 1800^0. Найдите периметр этого многоугольника.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Площадь прямоугольника равна 9 см, а величина одного из углов между диагоналями равна 120^0. Найти периметр прямоугольника.

3.4.2 В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон равны 13 см и 12 см. Найдите длину отрезка AE, где точка E лежит на стороне AB и $\angle CED = \angle AED$.

3.4.3 В квадрат площадью 18 см^2 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Отношение длин сторон прямоугольника равно $1/2$. Найдите площадь прямоугольника.

3.4.4 Дан квадрат $ABCD$ и точка O, лежащая вне квадрата. Известно, что $OA = OB = 5$ и $OD = \sqrt{13}$. Найдите площадь квадрата.

3.4.5 В параллелограмме с острым углом 45^0 расстояния от точки пересечения диагоналей до неравных сторон параллелограмма равны $\sqrt{2}$ см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

3.4.6 Периметр параллелограмма равен 90 см^2, а его острый угол равен 60^0. Диагональ делит его тупой угол в отношении 1:3. Найдите площадь параллелограмма.

3.4.7 Ромб с диагональю 1,25 равновелик равнобедренному треугольнику со стороной 13 и основанием 10. Найдите длину второй диагонали ромба.

3.4.8 Площадь ромба равна 6, а отношение длин диагоналей равно $\dfrac{3}{4}$. Найдите периметр ромба.

3.4.9 Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой длины оснований равны 6 см и 10 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

3.4.10 Найдите высоту равнобедренной трапеции, если её площадь равна 242 см^2, а её большее основание видно из центра вписанной окружности под углом 150^0.

3.4.11 Площадь трапеции равна 161 см^2, длина высоты – 7 см, а разность длин параллельных сторон – 11 см. Найдите большее основание трапеции.

3.4.12 Найдите площадь S прямоугольной трапеции с острым углом 60^0, меньшим основанием $\sqrt[4]{3}$ и большей боковой стороной, равной $2\sqrt[4]{3}$. В ответе укажите значение выражения $2 \cdot S$.

3.4.13 Определите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен 60^0, а площадь трапеции равна $288 \cdot \sqrt{3}$.

3.4.14 Основания трапеции имеют длины 10 см и 24 см, а боковые стороны равны 13 см и 15 см. Найдите площадь трапеции.

3.4.15 В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 4 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

3.4.16 Сторона AB правильного многоугольника равна 12 см, а угол AOB, где O – центр многоугольника, равен 24^0. Найдите периметр многоугольника.

3.4.17 Сторона правильного восьмиугольника равна 4 см. Найдите его меньшую диагональ.

3.4.18 Дан правильный многоугольник с периметром 100 см. Сумма всех внутренних его углов равна 1440^0. Найдите сторону этого многоугольника.

4 ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Содержание: окружность, круг, свойства вписанные углы, хорда, секущая, касательная, вписанные фигуры, описанные фигуры.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

4.1.1 Окружность и круг

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки, которая называется ***центром окружности***. Расстояние от точек окружности до её центра называется ***радиусом окружности***. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром***. Длина диаметра равна удвоенному радиусу. ***Кругом*** называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Эта точка называется ***центром круга***, а данная точка называется ***радиусом круга***. ***Секущей*** называется прямая пересекающая кривую в двух и более точках.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется ***вписанным*** в окружность.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрально угла. ***Круговым сегментом*** называется общая часть круга и полуплоскости.

Пусть R – радиус окружности или круга; $d = 2 \cdot R$ – диаметр окружности или круга; C – длины окружности; l – длины дуги, ограничивающей сектор; S_{cir} – площадь круга; S_{sec} – площадь сектора; S_{seg} – площадь сегмента; β – градусная мера центрального угла; α – радианная мера центрального угла.

Справедливы следующие утверждения.

1. Длина окружности: $C = 2 \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot d$.

2. Длина дуги в α радиан: $l = \alpha \cdot R$.

3. Длина дуги в β градусах: $l = \dfrac{\pi \cdot \beta \cdot R}{180^0}$.

4. Площадь круга: $S_{\text{cir}} = \pi \cdot R^2 = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$.

5. Площадь сектора в α радиан: $S_{\text{sec}} = \dfrac{\alpha \cdot R^2}{2}$.

6. Площадь сектора в β градусах: $S_{\text{sec}} = \dfrac{\pi \cdot \beta \cdot R^2}{360^0}$.

7. Площадь кругового сегмента, содержащего дугу в β градусах: $S_{seg} = \dfrac{\pi \cdot \beta \cdot R^2}{360} \pm S_{\Delta}$, где S_{Δ} – площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор; знак минус надо брать, когда $\beta < 180^0$, а знак плюс надо брать, когда $\beta > 180^0$.

4.1.2 Свойства касательных, хорд и углов

Справедливы следующие утверждения.

1. Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

3. Если из точки M к окружности проведена секущая MBC и касательная MA, то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной: $MC \cdot MB = MA^2$.

4. Произведение отрезков пересекающихся хорд равны: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, где M – точка пересечения хорд AB и CD.

5. Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

6. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

7. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

8. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

9. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которой лежат по одну и туже сторону от этой хорды, равны.

10. Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которой лежат по разную сторону от этой хорды, составляет в сумме 180^0.

11. Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

12. Угол между касательной и хордой, проходящими через одну точку окружности, равен половине градусной меры дуги, которую он отсекает.

4.1.3 Вписанные и описанные многоугольники

Многоугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. Многоугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности. Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют один и тот же центр. Его называют ***центром многоугольника***. Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется центральным углом многоугольника.

Рассмотрим правильный многоугольник со стороной длиною a и числом сторон n.

Справедливы следующие утверждения.

1. Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{a}{2 \cdot \sin \dfrac{180^0}{n}}$.

2. Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{180^0}{n}}$.

3. Длина стороны правильного n-угольника: $a = 2 \cdot R \cdot \sin \dfrac{180^0}{n}$.

4.1.4 Вписанные и описанные треугольники

Треугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. Окружностью, ***описанной около треугольника***, называется окружность, которая проходит через все его вершины. Треугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Окружностью, ***вписанной в треугольник***, называется окружность, которая касается всех его сторон.

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь треугольника; m_c – длины высоты, медианы и биссектрисы, проведённых к стороне c; в случае прямоугольного треугольника c – длина гипотенузы.

Справедливы следующие утверждения.

1. В любой треугольник можно вписать единственную окружность.

2. Три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, вписанной в этот треугольник.

3. Радиус вписанной в треугольник окружности: $r = \dfrac{S}{p}$; $r = \dfrac{2 \cdot S}{a+b+c}$.

4. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$; $r = \dfrac{a \cdot b}{a+b+c}$.

5. Центр вписанной в равносторонний (правильный) треугольник окружности совпадает с центром описанной окружности.

6. Радиус вписанной в правильный треугольник окружности: $r = \dfrac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$.

7. Сторона равностороннего треугольника, описанного около окружности: $a = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r$.

8. Около любого треугольника можно описать единственную окружность.

9. Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около данного треугольника.

10. Если треугольник остроугольный, то центр описанной окружности находится внутри треугольника.

11. Если треугольник тупоугольный, то центр описанной окружности находится вне треугольника.

12. Если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности находится на середине гипотенузы.

13. Радиус описанной около треугольника окружности: $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}$; $R = \dfrac{a}{2 \cdot \sin\alpha} = \dfrac{b}{2 \cdot \sin\beta} = \dfrac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$.

14. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине длины гипотенузы или длине медианы, проведённой к гипотенузе: $R = \dfrac{c}{2}$; $R = m_c$.

15. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника: $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $R = 2 \cdot r$.

16. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность: $a = \sqrt{3} \cdot R$.

4.1.5 Вписанные и описанные четырёхугольники

Четырёхугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. Окружностью, ***описанной около четырёхугольника***, называется окружность, которая проходит через все его вершины. Четырёхугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Окружностью, ***вписанной в четырёхугольник***, называется окружность, которая касается всех его сторон.

Пусть a, b, c, d – длины сторон четырёхугольника, причём сторона с длиной a противоположна стороне с длиной b; d_1, d_2 – длины диагоналей четырёхугольника; $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ – полупериметр четырёхугольника; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; h – высота ромба или трапеции; m, n – отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит сторону ромба или боковую сторону трапеции; z – диагональ равнобедренной трапеции; $p_1 = \dfrac{a+z+c}{2}$ – полупериметр треугольника; S – площадь четырёхугольника.

Справедливы следующие утверждения.

1. Четырёхугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны: $a+b=c+d$. В этом случае его площадь равна $S = p \cdot r$.

2. Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180^0. В этом случае справедлива ***теорема Птолемея***: сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей $(a \cdot b + b \cdot c = d_1 \cdot d_2)$ и его площадь равна $S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$.

3. Параллелограмм можно вписать в окружность тогда и толь тогда, когда он является прямоугольником.

4. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

5. Ромб можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.

6. В любой ромб можно вписать окружность, центр которой является точкой пересечения его диагоналей.

7. Радиус окружности, описанной около ромба: $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

8. Радиус окружности, вписанной в ромб: $r = \dfrac{h}{2}$; $r = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{4 \cdot a}$; $r = \sqrt{n \cdot m}$.

9. Около любого прямоугольника можно описать окружность, центр которой является точкой пересечения его диагоналей.

10. Прямоугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.

11. Радиус окружности, описанной около прямоугольника: $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

12. Радиус окружности, вписанной в прямоугольник: $r = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$.

13. В любой квадрат можно вписать окружность, центр которой является точкой пересечения его диагоналей.

14. Около любого квадрата можно описать окружность, центр которой является точкой пересечения его диагоналей.

15. Радиус окружности, описанной около квадрата: $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

16. Радиус окружности, вписанной в квадрат: $r = \frac{a}{2}$.

17. Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

18. В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы её противоположных сторон равны.

19. Радиус окружности, описанной около трапеции: $R = \frac{a \cdot z \cdot c}{4 \cdot \sqrt{p_1 \cdot (p_1 - a) \cdot (p_1 - z) \cdot (p_1 - c)}}$.

20. Радиус окружности, вписанной в трапецию: $r = \frac{h}{2}$; $r = \frac{d_1 d_2}{4a}$; $r = \sqrt{nm}$.

4.1.6 Вписанные и описанные шестиугольники

Шестиугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. Окружностью, ***описанной около шестиугольника***, называется окружность, которая проходит через все его вершины. Шестиугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Окружностью, ***вписанной в шестиугольник***, называется окружность, которая касается всех его сторон.

Рассмотрим правильный шестиугольник со стороной a, радиусом описанной окружности R и радиусом вписанной окружности r.

Справедливы следующие утверждения.

1. Любой правильный шестиугольник можно вписать в окружность.

2. Около любого правильного шестиугольника можно описать окружность.

3. Радиус описанной окружности: $R = a$.

4. Радиус вписанной окружности: $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$.

5. Сторона правильного шестиугольника: $a = R$; $a = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}}$.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти отношение площади круга к длине окружности, которая ограничивает этот круг. Радиус окружности равен 6.

Решение. $\frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

4.2.2 Найти площадь сектора, если его длина дуги равна $2\cdot\sqrt{\pi}$, а центральный угол равен 60^0.

Решение. Найдём радиус по формуле длины дуги: $l=\frac{\pi\cdot\beta\cdot R}{180^0}$. Подставляем исходные значения центрального угла и длины дуги в формулу.

$$2\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\pi\cdot 60^0\cdot R}{180^0}\quad\Rightarrow R=\frac{6}{\sqrt{\pi}}.$$

Находим площадь сектора: $S_{\sec}=\frac{\pi\cdot\beta\cdot R^2}{360^0}=\frac{\pi\cdot 60^0\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{360^0}=6$.

4.2.3 Найти площадь правильного двенадцатиугольника со стороной, равной $3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Решение. Найдём радиус описанной окружности.

$$R=\frac{a}{2\cdot\sin\frac{180^0}{n}}=\frac{3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot\sin 15^0}=\frac{3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 30^0}{2}}}=\frac{3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}=\frac{3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}=3.$$

Находим площадь искомого правильного двенадцатиугольника:

$$S_{12}=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot 12\cdot\sin\frac{360^0}{12}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12\cdot\sin 30^0=54\cdot\frac{1}{2}=27.$$

4.2.4 В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке M, $AB=5$ см, $BC=7$ см, $AC=8$ см. Найдите длину AM.

Решение. Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, соединяющих данную точку и точку касания, равны между собой.

Пусть x – отрезки касательных, проведённых из точки A, y – проведённых из точки B, z – проведённых из точки C. Необходимо найти $AM=x$. С учётом условия задачи, приходим к решению системы уравнений.

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x+z=8, \\ y+z=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x, \\ z=8-x, \\ 5-x+8-x=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=2, \\ z=5. \end{cases}$$

Следовательно, $AM=3$ см.

4.2.5 В параллелограмм с периметром 24 см и острым углом 30^0 вписана окружность. Найти длину этой окружности.

Решение. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом. Следовательно, все стороны параллелограмма равны $a=\frac{24}{4}=6$ (см). Тогда площадь параллелограмма $S=6\cdot 6\cdot \sin 30^0=18$ (см^2). Полупериметр равен $p=\frac{24}{2}=12$ (см). Находим радиус вписанной окружности: $r=\frac{S}{p}=\frac{18}{12}=1{,}5$. Длина окружности $C=2\cdot\pi\cdot r=2\cdot\pi\cdot 1{,}5=3\cdot\pi$ (см).

4.2.6 Найти площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=18$ см и $BC=8$ см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

Решение. Опустим высоту $CK=AB=x$ см. Так как $ABCK$ – прямоугольник, то $AK=8$ см, $KD=10$ см. Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны. Следовательно, $AB+CD=AD+BC=18+8=26$ (см), откуда $CD=(26-x)$ см. По теореме Пифагора из треугольника CKD получим $x^2+10^2=(26-x)^2$, $x^2+100=676-52\cdot x+x^2$, $52\cdot x=576$, $x=\frac{144}{13}$.

Высота трапеции $AB=\frac{144}{13}$ см, а площадь трапеции $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB$ или $S=\frac{18+8}{2}\cdot\frac{144}{13}=144$ (см^2).

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна φ. Найдите отношение длины радиуса вписанной в данный треугольник окружности к длине радиуса описанной окружности. В ответе укажите удвоенное отношение радиусов, при условии $\varphi=60^0$.

4.3.2 В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны – 15 см. Найдите значение выражения $r^2+4\cdot R^2$, где r – радиус вписанной окружности, а R – радиус описанной окружности.

4.3.3 В круге радиуса 12 см длина хорды AB равна 6 см, а длина хорды BC равна 4 см. Найдите длину хорды AC, соединяющей концы дуги AC. В ответе указать значение выражения $\left(\sqrt{35}-\sqrt{15}\right)\cdot AC$.

4.3.4 Две окружности радиусов 64 см и 36 см касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B – точки касания. Найдите периметр P треугольника ABC. В ответе укажите значение $5P$.

4.3.5 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Если $\angle A=70^0$, $\angle D=80^0$, $\angle ABD=50^0$, то какова градусная мера угла между диагоналями четырёхугольника?

4.3.6 Из точки A к окружности проведены касательная $AB=12$ см и секущая AC. Найти хорду CD, если $AD=3$ см.

4.3.7 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанного в треугольник круга равен 2 см, а описанного – 5 см.

4.3.8 В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов на отрезки длины 6 см и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

4.3.9 В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите сумму квадратов длин сторон треугольника.

4.3.10 Около круга радиуса 4 см описана прямоугольная трапеция, меньшая из сторон которой равна 6 см. Найдите площадь этой трапеции.

4.3.11 Вокруг трапеции с высотой длины H описана окружность. Основания трапеции видны из центра окружности под углами α и β. Найдите радиус окружности и площадь трапеции.

4.3.12 Длины боковых сторон трапеции равны 6 см и 10 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите произведение длин оснований.

4.3.13 Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите длину высоты.

4.3.14 Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2. Найдите длину средней линии трапеции, если величина острого угла при её основании равна 30^0.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписан прямоугольный треугольник так, что один из катетов $\sqrt{3}$ раз ближе к центру, чем другой. Найти длину большего катета.

4.4.2 Окружность радиуса $\sqrt{2}+1$ описана около равнобедренного прямоугольного треугольника. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

4.4.3 Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если длина радиуса вписанной окружности равна 3, а одного из катетов – 8.

4.4.4 В треугольнике ABC угол ACB равен 120^0. Найдите длину стороны AB, если радиус описанной окружности равен $\sqrt{75}$.

4.4.5 Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна $5/\sqrt{\pi}$, периметр – $24/\sqrt{\pi}$. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.

4.4.6 Окружность вписана в ромб, длины диагоналей которого равны $\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{3}+1$. Точки касания окружности со сторонами ромба последовательно соединены. Найдите значение $1000\cdot S$, где S – площадь полученного четырёхугольника.

4.4.7 В ромб, длины диагоналей которого равны 12 и 16, вписана окружность. Найдите расстояние от точки касания окружности со стороной ромба до меньшей диагонали.

4.4.8 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Если $\angle A = 70^0$, $\angle D = 80^0$, $\angle ABD = 40^0$, то градусная мера острого угла между диагоналями AC и BD равна … .

4.4.9 В ромб вписана окружность. Сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых равны 9 и 4. Найдите площадь ромба.

4.4.10 В окружности с радиусом 11 проведена хорда AB. Если точка M, отстоящая от центра окружности на 10, делит хорду AB на части, из которых одна больше другой на 4, то длина этой хорды равна … .

4.4.11 Окружность с центром O проходит через вершину A треугольника ABC, касается прямой BC в точке B и пересекает сторону AC в точке D. Если $\angle C = 30^0$, $\angle AOB = 124^0$, то градусная мера угла ABD равна … .

4.4.12 В равнобедренную трапецию вписана окружность. Чему равен острый угол трапеции, если точка касания делит боковую сторону на отрезки, отношение длин которых равно 3:1.

4.4.13 Равнобедренная трапеция описана около окружности. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 12 и 48. Найдите площадь трапеции.

4.4.14 Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 144,5. Найдите радиус окружности, если угол при основании трапеции равен 30^0.

4.4.15 Из одной точки к окружности проведены две касательные длиной 13 см. Найдите радиус окружности, если расстояние между точками касания равно 24 см.

4.4.16 Найти площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 10$ см и $BC = 6$ см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

5 СТЕРЕОМЕТРИЯ. МНОГОГРАННИКИ

Содержание: многогранники, призма, параллелепипед, куб, пирамида, усечённая пирамида, объёмы тел, площади боковых и полных поверхностей многогранников.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Многогранник называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется ***гранью***. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются ***рёбрами многогранника***, а вершины – **вершинами многогранника**.

5.1.1 Призма

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники называются ***основаниями призмы***, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, называются ***боковыми рёбрами*** призмы. В призме основания равны и лежат в параллельных плоскостях. Боковые рёбра призмы равны и параллельны. ***Поверхность*** призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие являются соседними боковыми гранями.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями её оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю призмы***. Призма называется ***n-угольной***, если её основания являются n-угольниками.

Призма называется ***прямой***, если её боковые рёбра перпендикулярны основанию. В противном случае призма называется ***наклонной***. Прямая призма называется правильной, если её основания являются правильными многоугольниками.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. ***Полная поверхность призмы*** равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

5.1.2 Параллелепипед и куб

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется ***параллелепипедом***. У параллелепипеда все грани являются параллелограммами. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются ***противолежащими***. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии. Параллелепипед называется прямым, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям. Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется ***прямоугольным параллелепипедом***. У прямоугольного параллелепипеда все грани являются прямоугольниками. Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называется ***кубом***.

5.1.3 Пирамида

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основание пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками многоугольника основания. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются ***боковыми рёбрами***. Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань является треугольником. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды. ***Высотой пирамиды*** называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. Пирамида называется ***n-угольной***, если её основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется ***тетраэдром***.

Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная основанию, отсекает подобную пирамиду. Другая её часть представляет собой многогранник, который называется ***усечённой пирамидой***. Грани усечённой пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***основаниями***. Остальные грани называются ***боковыми гранями***. Основания усечённой пирамиды представляют собой подобные многоугольники, а боковые грани являются трапециями.

Пирамида называется ***правильной***, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром многоугольника.

У правильной пирамиды боковые рёбра равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется ***апофемой***. ***Боковой поверхностью пирамиды*** называется сумма площадей её боковых граней. Усечённая пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется ***правильной***. Боковыми гранями правильной усечённой пирамиды являются равные равнобедренные трапеции, а их высоты – ***апофемами***.

5.1.4 Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников: ***правильный тетраэдр***, ***куб***, ***октаэдр***, ***додекаэдр***, ***икосаэдр***.

В правильном тетраэдре гранями являются правильные треугольники, а в каждой вершине сходятся по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все рёбра равны.

В кубе все грани являются квадратами, а в каждой вершине сходятся по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными рёбрами.

В октаэдре гранями являются правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой вершине сходятся по четыре ребра.

В додекаэдре гранями являются правильные пятиугольники, а в каждой вершине сходятся по три ребра.

В икосаэдре все грани правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходятся по пять рёбер.

5.1.5 Основные формулы площадей и объёмов многогранников

Приведём формулы, которые могут потребоваться при вычислении площадей поверхностей и объёмов многогранников.

$$S_1 = S \cdot \cos\alpha ,$$

где S – площадь данной плоской фигуры, S_1 – площадь её ортогональной проекции на другую плоскость, α – угол между плоскостями.

$$S = P \cdot l ,$$

где S – площадь боковой поверхности призмы, P – длина периметра ортогонального сечения, l – длина бокового ребра.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2},$$

где S и S_1 – площади параллельных сечений пирамиды, a и a_1 – длины сходственных элементов сечений, h и h_1 – расстояния сечений от вершины пирамиды или расстояния каких-либо сходственных элементов сечений от вершины пирамиды.

$$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot h,$$

где S – площадь боковой поверхности правильной пирамиды, P – длина периметра основания, h – апофема боковой грани.

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где V – объём прямоугольного параллелепипеда, a, b, c – длины его сторон.

$$V = S \cdot h,$$

где V – объём призмы, S – площадь многоугольника, лежащего в основании призмы, h – длина высоты призмы.

$$V = S \cdot l,$$

где V – объём наклонной призмы, S – площадь перпендикулярного сечения к боковому ребру призмы, l – длина бокового ребра призмы.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h,$$

где V – объём пирамиды, S – площадь многоугольника, лежащего в основании пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(S + s + \sqrt{S \cdot s}\right) \cdot h,$$

где V – объём усечённой пирамиды, S и s – площади её оснований, h – длина высоты усечённой пирамиды.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым рёбрам и пересекающее все боковые рёбра. Найти боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен 24 см, а длины боковых рёбер равны 6 см.

Решение. Плоскость проведённого сечения разбивает призму на две части. Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а боковые рёбра равны 6 см. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и исходная. Таким образом, боковая поверхность исходной призмы равна $S = P \cdot l = 24 \cdot 6 = 144$ см.

5.2.2 В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм со сторонами длиной 1 см и 4 см и острым углом 60^0. Большая диагональ параллелепипеда имеет длину 5 см. Найти объём параллелепипеда.

Решение. Пусть $AB = 1$; $AD = 4$; $\angle BAD = 60^0$, тогда большая диагональ $AC_1 = 5$. Объём параллелепипеда равен $V = S_{ABCD} \cdot CC_1$. Находим площадь основания $ABCD$: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^0 = 1 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3}$. Высоту CC_1 параллелепипеда находим из прямоугольного треугольника ACC_1 ($\angle C = 90^0$; $AC_1 = 5$). Для этого достаточно найти AC. По теореме косинусов в треугольнике ADC имеем: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos 120^0 = 16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-0{,}5) = 21$. Тогда $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 21} = 2$. Следовательно,
$V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$.

5.2.3 Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 5. Найти расстояние между прямыми A_1D и B_1C_1.

Решение. Прямые A_1D и B_1C_1 являются скрещивающимися. Поэтому расстояние между ними равно длине общего перпендикуляра к этим прямым. Таковым является отрезок A_1B_1: $A_1B_1 \perp B_1C_1$ и $A_1B_1 \perp AA_1D_1D \Rightarrow A_1B_1 \perp A_1D$. Поэтому расстояние между A_1D и B_1C_1 равно $A_1B_1 = 5$.

5.2.4 Основанием пирамиды $ABCDS$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами 6 и 8. Каждое боковое ребро имеет длину, равную 13. Найти длину высоты пирамиды.

Решение. Пусть $BC = 8$, $AB = 6$, $AS = 13$. Так как все боковые рёбра равны, то вершины основания одинаково удалены от основания пирамиды, то есть $OA = OB = OC = OD$. Следовательно, основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около основания, то есть точка пересечения диагоналей прямоугольника. Поэтому высота пирамиды равна катету прямоугольного треугольника, у которого другой катет равен половине диагонали основания, а гипотенузой является боковое ребро. Длина диагонали основания равна

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Поэтому длина высоты OS пирамиды равна $OS = \sqrt{AS^2 - (AC/2)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

5.2.5 Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объём пирамиды?

Решение. Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная основанию, отсекает подобную пирамиду. Коэффициент подобия равен отношению высот, то есть $\frac{1}{2}$. Поэтому объёмы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$. Следовательно, плоскость делит заданную пирамиду на части, объёмы которых относятся как $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 7$.

5.2.6 Найти объём V правильной усечённой четырёхугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны оснований которой равны 4 см и 2 см, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45^0.

Решение. Находим площади оснований усечённой пирамиды. Площадь основания $ABCD$ равна $S = 4^2 = 16$ (см^2), а площадь основания $A_1B_1C_1D_1$ равна $s = 2^2 = 4$ (см^2).

Пусть O и O_1 – точки пересечения диагоналей квадрата нижнего основания $ABCD$ и квадрата верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Определим длины отрезков OA и OA_1.

$$OA = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$OA_1 = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Из точки A_1 на плоскость $ABCD$ опускаем высоту MA_1 усечённой пирамиды, основание которой попадает на диагональ AC. Находим проекцию AA_1 на плоскость $ABCD$: $AM = OA - OA_1 = 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (см). Из прямоугольного треугольника AMA_1: $h = A_1M = AM \cdot \operatorname{tg} 45^0 = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$ (см). Вычисляем объём усечённой пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(S + s + \sqrt{S \cdot s}\right) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(16 + 4 + \sqrt{16 \cdot 4}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Диагональ прямоугольного параллелепипеда 2 см и образует с плоскостью основания угол 30^0. Найдите площадь S боковой поверхности и объём V параллелепипеда, если площадь его основания равна $\sqrt{2}$ см^2. В ответе укажите значение выражения $(2 \cdot V - 2) \cdot S$.

5.3.2 Найдите площадь S боковой поверхности и объём V параллелепипеда, зная, что его высота равна 4, диагонали составляют с плоскостью основания углы 30^0 и 60^0, а его основанием служит ромб. В ответе укажите значение выражения $V + \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot S$.

5.3.3 Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений равны 5 см^2 и 12 см^2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

5.3.4 Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60^0. Определите объём призмы, если её большая диагональ равна 12 см и образует с плоскостью основания угол 30^0. В ответе укажите значение выражения $\sqrt{3} \cdot V$.

5.3.5 Найдите объём прямой призмы, у которой основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом 15^0, если боковое ребро призмы имеет длину 4 см и составляет с диагональю большей боковой грани угол 60^0.

5.3.6 Основанием прямой призмы служит прямоугольник с гипотенузой длины 4 см и острым углом в 30^0. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45^0. Найдите объём треугольной пирамиды, отсечённой от призмы плоскостью.

5.3.7 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{2}$, а плоский угол при вершине равен 90^0. Найдите объём пирамиды.

5.3.8 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет длину $4\sqrt{3}$ и составляет с плоскостью основания угол 30^0. Найдите объём пирамиды.

5.3.9 Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом длины a и противолежащим углом α. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой грани, проходящей через меньший катет основания, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$, $a = 8$ см.

5.3.10 Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 24 см. Двугранный угол при основании равен 60^0. Найдите $\sqrt{3} \cdot S$, где S – площадь полной поверхности пирамиды.

5.3.11 Высота правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равна 3 см, объём её равен 38 см^2, а площади оснований относятся как 9:4. Найдите $\sqrt{76} \cdot S$, где S – площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

5.3.12 Площади оснований усечённой пирамиды равны 36 см^2 и 64 см^2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна основаниям и равноудалена от них.

5.3.13 Основанием пирамиды является прямоугольник, площадь которого равна 12 см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а две другие составляют с основанием углы 30^0 и 60^0. Найдите $\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot S$, где S – площадь полной поверхности пирамиды.

5.3.14 Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ боковой грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите боковую поверхность пирамиды.

5.3.15 В правильной шестиугольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным ребром основания равен α, сумма радиусов окружностей, вписанной в основание и описанной около основания, равна m. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

5.3.16 Длина диагонали правильной четырёхугольной призмы равна 10 см и образует с плоскостью основания угол, величина которого равна α. Найдите объём призмы.

5.3.17 Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, основание которого имеет длину a и угол при основании равен α. Найдите объём призмы, если площадь её боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

5.3.18 Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см, двугранный угол при основании равен 30^0. Найдите объём пирамиды.

5.3.19 Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, если её диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна a.

5.3.20 Основанием правильной усечённой пирамиды служат квадраты с диагоналями 8 и 5. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45^0. Найдите объём усечённой пирамиды.

5.3.21 Определите объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, если длины сторон оснований равны $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, а острый угол грани равен 60^0.

5.3.22 Объём куба равен 64. Найдите площадь поверхности куба.

5.3.23 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, угол между боковыми гранями равен 2φ. Найдите сторону основания пирамиды.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объём.

5.4.2 В прямоугольном параллелепипеде рёбра относятся как 2:3:6, а диагональ равна 14. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

5.4.3 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 и 3, диагональ параллелепипеда образует с боковой гранью, содержащей сторону основания, равную 4, угол 30^0. Найдите квадрат значения его объёма.

5.4.4 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 6, высота равна $4\sqrt{6}$. Найдите $\mathrm{tg}^2\,\alpha$, где α – угол между диагональю основания и диагональю параллелепипеда, которые не имеют общих точек.

5.4.5 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 и 4. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда. Найдите $5V$, где V – объём параллелепипеда, если указанная плоскость составляет с плоскостью основания параллелепипеда угол 45^0.

5.4.6 Основание наклонного параллелепипеда – прямоугольник, длины сторон которого равны 2 и 4. Боковое ребро, длина которого равна 4, составляет со смежными сторонами основания углы 60^0. Найдите объём параллелепипеда.

5.4.7 В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 5, а боковое ребро равно 5. Найдите площадь сечения, проведённого через диагональ призмы параллельно диагонали основания.

5.4.8 Через середину отрезка, соединяющего центры оснований правильной четырёхугольной призмы, и середины двух смежных рёбер основания призмы проведено сечение. Найдите площадь сечения, если длина основания призмы равна 6, а длина её бокового ребра равна $4\sqrt{2}$.

5.4.9 В прямоугольной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ угол $\angle ABC = 90^0$. Сечение проходит через середины рёбер AB и BB_1, параллельно высоте CD треугольника ΔABC. Найдите значение выражения $4S^2$, где S – площадь сечения, если $AB = BC = BB_1 = 2$.

5.4.10 Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом 60^0. Боковая сторона и меньшее основание трапеции имеют равные длины. Найдите объём призмы, если диагональ призмы равна $4\sqrt{3}$ и образует угол с плоскостью основания 30^0.

5.4.11 Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60^0. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен 45^0. Найдите объём призмы, если меньшая диагональ ромба равна $2\sqrt{3}$.

5.4.12 Найдите объём правильной треугольной призмы, если длина стороны её основания равна 2, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

5.4.13 Найти объём наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной 2, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60^0.

5.4.14 Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы имеет длину 4 и составляет с боковым ребром призмы угол 30^0. Найти объём призмы.

5.4.15 В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Найдите объём пирамиды, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45^0.

5.4.16 В правильной треугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если апофема боковой грани равна 4.

5.4.17 Высота правильной треугольной пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Найдите объём пирамиды, если площадь боковой поверхности пирамиды в 4 раза больше площади её основания.

5.4.18 В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Найдите объём пирамиды, если боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45^0.

5.4.19 В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 120^0, а его большая сторона равна $6\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её высота образует с каждым боковым ребром угол 45^0.

5.4.20 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен 90^0, а площадь её боковой поверхности равна 54.

5.4.21 В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AC = 8$ и $BC = 6$, а высота пирамиды равна 4. Вершина пирамиды S проектируется в середину гипотенузы AB. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

5.4.22 Площадь боковой поверхности пирамиды равна 300, а в её основании лежит ромб со стороной 15. Найдите объём пирамиды, если все двугранные углы при основании равны 45^0.

5.4.23 На боковом ребре AS правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ объёма 96 выбрана точка M так, что $AM : MS = 3:5$. Найдите объём пирамиды $AKCM$, где K – середина ребра AB основания $ABCD$.

5.4.24 На ребре AD правильного тетраэдра $ABCD$ с длиной ребра длиной, равной 4 взята точка M такая, что $MA : MD = 3:1$. Найдите квадрат значения площади сечения тетраэдра плоскостью, содержащей точку M и перпендикулярной ребру AD.

5.4.25 Найдите объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 13 и 5, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45^0.

5.4.26 Площади оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 1 и 4, а её объём равен 21. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

5.4.27 Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной 2 см, а боковые грани являются квадратами. Найдите объём призмы.

5.4.28 В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 см и 4 см. Острый угол параллелограмма равен 60^0. Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Найдите объём параллелепипеда.

5.4.29 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6, а высота равна $\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды.

5.4.30 Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите отношение площади его основания к боковой поверхности.

6 СТЕРЕОМЕТРИЯ. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Содержание: цилиндр, конус, усечённый конус, шар, объёмы тел, площади боковых и полных поверхностей тел вращения.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Телами вращения называются объёмные тела, возникающие при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости. Рассмотрим тела вращения: цилиндр, конус, усечённый конус, шар.

6.1.1 Цилиндр

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков (***образующих***), соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются ***основаниями цилиндра***, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, называются ***образующими цилиндра***. Основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях и равны между собой. В цилиндре образующие параллельны и равны.

Цилиндр называется ***прямым***, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. *Прямой цилиндр представляет собой тело, которое описывает прямоугольник при вращении его около стороны как оси*. ***Радиусом цилиндра*** называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. ***Осью цилиндра*** называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

6.1.2 Конус и усечённый конус

Конусом (***круговым конусом***) называется тело, которое состоит из круга (***основание конуса***), точки, не лежащей в плоскости круга (***вершины конуса***), и всех отрезков, которые соединяют вершины конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются ***образующими конуса***. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется ***прямым***, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. *Прямой круговой конус представляет собой тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси*.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания конуса. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса.

Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется ***усечённым конусом***. *Усечённый конус представляет собой тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной основаниям, и являющейся осью вращения*.

6.1.3 Шар и сфера

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется ***центром шара***, а данное расстояние называется ***радиусом шара***. Граница шара называется ***шаровой поверхностью*** или ***сферой***. Точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой сферы, также называется радиусом. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара, называется ***диаметром шара*** (***сферы***). Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара. *Шар представляет собой тело, которое получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси.*

Любым сечением шара плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость. Плоскость, проходящая через центр шара, называется ***диаметральной плоскостью***. Сечение шара диаметральной плоскостью называется ***большим кругом***, а сечение сферы – ***большой окружностью***. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Плоскость, проходящая через точку сферы и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку, называется ***касательной плоскостью***, а сама точка называется ***точкой касания***. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания. Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется ***касательной к шару*** в этой точке.

6.1.4 Основные формулы площадей и объёмов тел вращения

Приведём формулы, которые могут потребоваться при вычислении площадей поверхностей и объёмов тел вращения.

$$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H, \qquad S_1 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \left(R + H\right),$$

где S – площадь боковой поверхности цилиндра, S_1 – площадь полой поверхности цилиндра, R – длина радиуса окружности основания цилиндра, H – длина высоты цилиндра.

$$S = \pi \cdot R \cdot l, \qquad S_1 = \pi \cdot R \cdot \left(R + l\right),$$

где S – площадь боковой поверхности конуса, S_1 – площадь полой поверхности конуса, R – длина радиуса окружности основания конуса, l – длина образующей конуса.

$$S = \pi \cdot (R + r) \cdot l, \qquad S_1 = \pi \cdot \left(R^2 + r^2 + \left(R + r\right) \cdot l\right),$$

где S – площадь боковой поверхности прямого усечённого конуса, S_1 – площадь полной поверхности прямого усечённого конуса, R и r – длины радиусов окружностей оснований прямого усечённого конуса, l – длина образующей конуса прямого усечённого конуса.

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2,$$

где S – площадь поверхности шара (площадь сферы), R – длина радиуса шара.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H,$$

где V – объём кругового цилиндра, R – длина радиуса круга, лежащего в основании цилиндра, H – длина высоты цилиндра.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H,$$

где V – объём кругового конуса, R – длина радиуса круга, лежащего в основании конуса, H – длина высоты конуса.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r \right) \cdot H ,$$

где V – объём кругового усечённого конуса, R и r – длины радиусов кругов, лежащих в основании усечённого конуса, H – длина высоты конуса.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 ,$$

где V – объём шара, R – длина радиуса шара.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 32π. Отношение объёма цилиндра к его площади боковой поверхности равно 3. Найти отношение площади полной поверхности цилиндра к числу π.

Решение. Находим отношение объёма цилиндра к площади боковой поверхности: $\frac{V}{S} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot H} = \frac{R}{2} = 3 \;\Rightarrow\; R = 6$. Вычисляем отношение площади полной поверхности цилиндра к числу π: $\frac{S_1}{\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2}{\pi} =$ $= \frac{32 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 6^2}{\pi} = 32 + 72 = 104$.

6.2.2 Площадь боковой поверхности конуса равна $32 \cdot \pi$, а площадь его основания равна $64 \cdot \pi$. Найти образующую конуса.

Решение. Найдём радиус основания конуса: $S_2 = \pi \cdot R^2 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; 64 \cdot \pi = \pi \cdot R^2 \;\Rightarrow\; R^2 = 64 \;\Rightarrow R = 8$. Используя формулу боковой поверхности конуса $S = \pi \cdot R \cdot l$, находим образующую конуса: $32 \cdot \pi = \pi \cdot 8 \cdot l \;\Rightarrow\; l = 4$.

6.2.3 В усечённом конусе диагональ осевого сечения равна 10 см, а радиусы оснований равны 4 см и 2 см. Найти объём усечённого конуса.

Решение. $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r \right) \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(4^2 + 2^2 + 4 \cdot 2 \right) \cdot H = \frac{28 \cdot \pi}{3} \cdot H$. Таким образом, для нахождения объёма усечённого конуса необходимо вычислить длину его высоты H.

Осевое сечение усечённого конуса представляет собой равнобедренную трапецию $ABCD$, основания которой совпадают с диаметрами оснований конуса, то есть равны 8 см и 4 см, а высота совпадает с высотой усечённого конуса.

Из вершины C на основание AD опустим высоту $CN = H$. В прямоугольном треугольнике ANC длина гипотенузы AC равна длине диагонали осевого сечения конуса, то есть $AC = 10$ см. Находим длину второго катета треугольника: $AN = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = 4 + 2 = 6$ (см). По теореме Пифагора имеем:

$$AN = H = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

Следовательно, $V = \frac{28 \cdot \pi}{3} \cdot H = \frac{28 \cdot \pi}{3} \cdot 8 = \frac{264\pi}{3}$ (см^3).

6.2.4 Объём одного шара в 64 раза больше объёма второго шара. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара.

Решение. Пусть R_1 и R_2 – радиусы данных шаров.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 64 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = 4.$$

Найдём отношение площадей заданных шаров:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^4} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4^2 = 16.$$

Таким образом, площадь поверхности первого шара в 16 раз больше площади поверхности второго шара.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Объём шара равен 12. Найдите объём другого шара, у которого площадь поверхности в девять раз больше, чем у данного шара.

6.3.2 Шар пересечён плоскостью, отстоящей от центра шара на $\sqrt{10/\pi}$. Найдите площадь сечения, если площадь поверхности шара равна 78.

6.3.3 Радиус круга, полученного при сечении шара плоскостью, вдвое меньше радиуса шара. Найдите объём шара, если площадь сечения равна $\frac{9}{4}\sqrt[3]{\pi}$.

6.3.4 Определите площадь полной поверхности цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат, а площадь его боковой поверхности равна 4 см^2.

6.3.5 Развёртка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат со стороной $\sqrt[3]{40\pi}$. Найдите объём цилиндра.

6.3.6 Прямоугольник со сторонами $\sqrt{3/\pi}$ и $\sqrt{27/\pi}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности фигуры вращения.

6.3.7 Развёртка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна $4\sqrt{3}$ см и составляет угол 60^0 с основанием. Найдите объём цилиндра. В ответе укажите значение произведения объёма цилиндра на число π.

6.3.8 Радиус основания конуса равен $\sqrt{15}$, а угол при вершине в развёртке его боковой поверхности равен 90^0. Найдите значение выражения V/π, где V – объём конуса.

6.3.9 Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна 9, а расстояние от центра основания до образующей равно 2. Найдите объём конуса.

6.3.10 Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой треть круга радиуса $3\sqrt{110/\pi}$. Найдите площадь основания конуса.

6.3.11 Прямоугольный треугольник с катетами длиной $6/\sqrt{\pi}$ и $8/\sqrt{\pi}$ вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь полной поверхности фигуры вращения.

6.3.12 Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 9 м^2. Найдите объём конуса.

6.3.13 Ромб с диагоналями длиной $\sqrt{15}$ и $60/\pi$ вращается вокруг большей диагонали. Найдите объём фигуры вращения.

6.3.14 Радиусы оснований прямого усечённого конуса равны 3 см и 6 см, а его высота равна 4 см. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.

6.3.15 Площади оснований прямого усечённого конуса равны 4 см^2 и 16 см^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

6.3.16 Длины радиусов оснований прямого усечённого конуса равны $9/\sqrt[3]{\pi}$ и $6/\sqrt[3]{\pi}$. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Найдите объём этого усечённого конуса.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Плоскость сечения шара плоскостью равна 15. Расстояние от секущей плоскости до центра шара равно $\sqrt{30/\pi}$. Найдите площадь поверхности шара.

6.4.2 Площадь поверхности шара равна 504. Найдите площадь поверхности другого шара, у которого радиус в три раза меньше, чем у данного шара.

6.4.3 Площадь поверхности шара равна 18. Найдите площадь поверхности другого шара, у которого объём в три раза больше, чем у данного шара.

6.4.4 Через конец радиуса шара под углом 45^0 проведена секущая плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если площадь поверхности шара равна 125.

6.4.5 Площадь сечения шара плоскостью равна 16π. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра шара, если объём шара равен $500\pi/3$.

6.4.6 Через точку, не лежащую на сфере радиуса 5, проведены к сфере две касательные плоскости. Каково расстояние от линии пересечения плоскостей до наиболее удалённой от этой линии точки сферы, если угол между плоскостями равен 60^0?

6.4.7 Площадь сечения шара плоскостью в 8 раз меньше площади поверхности шара. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра шара, если радиус шара равен $\sqrt{242}$.

6.4.8 В цилиндре радиус основания равен 2, а высота равна 7. Найдите радиус круга равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

6.4.9 Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π. Найдите высоту этого цилиндра.

6.4.10 Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

6.4.11 Площадь осевого сечения цилиндра равна 24. Найдите площадь его боковой поверхности.

6.4.12 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 136π, а его объём равен 17π. Найдите высоту цилиндра.

6.4.13 Полукруг свёрнут в каноническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью этого конуса.

6.4.14 Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен 9, а дуга, его ограничивающая, равна 120^0. Найдите высоту конуса.

6.4.15 Объём конуса равен 117, а длина окружности основания равна 13. Найти площадь осевого сечения конуса.

6.4.16 Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая в основании дугу в 120^0. Определите площадь сечения, если радиус основания конуса равен 8, а плоскость сечения наклонена к основанию под углом 30^0.

6.4.17 Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вращается около гипотенузы. Найдите объём V полученного тела. В ответе укажите значение выражения V/π

6.4.18 Диаметры оснований усечённого конуса равны 4 и 6, а образующая наклонена к плоскости большего основания под углом 60^0. Найдите $\dfrac{30\sqrt{3}\cdot V}{S}$, где V – объём усечённого конуса, а S – площадь его боковой поверхности.

7 СТЕРЕОМЕТРИЯ. КОМБИНАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ

Содержание: вписанные тела, описанные тела.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

7.1.1 Шар и многогранники

Шар называется ***вписанным в многогранник***, а многогранник – описанным около шара, если поверхность шара касается всех граней многогранника.

Шар называется ***описанным около многогранника***, а многогранник – вписанным в шар, если поверхность шара проходит через все вершины многогранника.

Центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника и расположена внутри многогранника.

Центр шара, описанного около многогранника – это точка пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем рёбрам многогранника и проходящих через их середины. Он может быть расположен внутри, на поверхности и вне многогранника.

7.1.2 Шар и призма

Шар, вписанный в призму, должен касаться всех её граней. В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в это перпендикулярное сечение. Если призма является прямой, то ортогональная проекция шара на плоскость основания призмы является кругом, вписанным в многоугольник основания. Для наклонной призмы проекция шара на плоскость основания является кругом, выходящим за пределы основания призмы.

Как для прямой, так и для наклонной призмы, высота призмы равна диаметру вписанного шара.

Описать шар около призмы можно тогда и только тогда, когда призма является прямой и около её основания можно описать окружность. В этом случае многоугольники оснований призмы являются вписанными в некоторое сечение шара, не проходящее через его центр, а все вершины призмы лежат на поверхности шара.

7.1.3 Шар и пирамида

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то в такую пирамиду можно вписать шар. Центр шара есть точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, одной из сторон которого служит высота боковой грани, проведённой из вершины пирамиды. В правильную пирамиду всегда можно вписать шар.

Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность. Центр шара, описанного около пирамиды, есть точка пересечения прямой, перпендикулярной основанию пирамиды и проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру и проведённой через середину этого ребра.

Если боковые рёбра пирамиды равны между собой (или одинаково наклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар. Центр шара в этом случае находится в точке пересечения высоты пирамиды (или её продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

7.1.4 Шар и цилиндр

Шар называется ***вписанным в цилиндр***, а цилиндр – описанным около шара, если поверхность шара касается оснований цилиндра и всех его образующих. Шар можно вписать только в такой цилиндр, высота которого равна диаметру основания (такой цилиндр называется равносторонним). Шар касается оснований цилиндра в их центрах и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям цилиндра. Радиус шара R равен радиусу основания цилиндра r, а диаметр шара равен высоте цилиндра.

Шар называется ***описанным около цилиндра***, если окружности оснований цилиндра принадлежат поверхности шара. Шар можно описать около любого прямого кругового цилиндра. Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на середине высоты, проходящей через ось цилиндра.

Радиус описанного шара R, радиус основания вписанного цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 .$$

7.1.5 Шар и конус

Шар называется ***вписанным в конус*** (***усечённый конус***), а конус (усечённый конус) – описанным около шара, если поверхность шара касается основания (оснований) конуса и всех образующих. Шар можно вписать в любой конус. Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса. Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

Шар называется ***описанным около конуса*** (***усечённого конуса***), если окружность основания и вершина (окружности оснований) конуса принадлежат поверхности шара. Шар можно описать около любого конуса. Окружность основания конуса и вершина конуса лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.

7.1.6 Цилиндр и призма

Цилиндр может быть вписан в прямую призму, основаниями которой являются многоугольники, в которые можно вписать окружность. Радиус цилиндра равен радиусу этой окружности. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой, совпадающей с высотой призмы, соединяющей центры окружностей, вписанных в основания призмы.

Цилиндр может быть описан около прямой призмы, основанием которой являются многоугольники, около которых можно описать окружность. Радиус цилиндра R равен радиусу этой окружности. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы. Высота призмы совпадает с высотой цилиндра.

7.1.7 Цилиндр и пирамида

В пирамиду можно вписать прямой круговой цилиндр. При этом окружность одного из оснований цилиндра касается всех боковых граней пирамиды, а другое основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, но не является вписанным в многоугольник основания, а находится внутри его.

Пирамида вписана в цилиндр, если её основание лежит в плоскости одного из оснований цилиндра и является многоугольником, вписанным в окружность основания цилиндра, а вершина пирамиды находится в плоскости другого основания цилиндра.

7.1.8 Конус и призма

Прямой круговой конус вписан в призму, если его вершина лежит на одном из оснований (нижнее основание) призмы, а его основание представляет собой круг, вписанный в многоугольник другого основания (верхнее основание) призмы. В этом случае многоугольник основания призмы должен быть таким, чтобы в него можно было вписать окружность. Прямая, перпендикулярная к нижнему основанию и проходящая через центр круга, вписанного в многоугольник основания, должна пересекать верхнее основание, так как эта прямая является осью конуса. Высота конуса равна высоте призмы.

Прямой круговой конус описан около призмы, если все вершины верхнего основания призмы лежат на боковой поверхности конуса, а нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. В этом случае верхним основанием призмы является многоугольник, около которого можно описать окружность, а нижнее основание призмы не вписано в основание конуса.

7.1.9 Конус и пирамида

Конус можно вписать в пирамиду, если основанием пирамиды является многоугольник, описанный около окружности, а вершина пирамиды проецируется в центр этой окружности. Радиус конуса R равен радиусу этой окружности, а высоты H конуса и пирамиды совпадают.

Конус можно описать около пирамиды, если основанием пирамиды является многоугольник, вписанный в окружность, а вершина пирамиды проецируется в центр этой окружности. Радиус конуса R равен радиусу этой окружности, а высоты H конуса и пирамиды совпадают.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 В цилиндр вписана прямая призма, в основании которой – равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами длиной $AB = CB = 6$ и углом 120^0 между ними. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

Решение. Так как треугольник ABC равнобедренный, то угол BCA равен 30^0. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $R = \dfrac{6}{2 \cdot \sin 30^0} = 6$. Следовательно, диаметр основания цилиндра равен 6. Так как осевым сечением цилиндра является квадрат, то площадь осевого сечения равна $S = 12^2 = 144$.

7.2.2 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна $a=6$. Известно, что призму можно вписать шар и около неё можно описать шар. Найти квадрат отношения радиуса описанного к радиусу вписанного шара.

Решение. Радиус вписанного шара совпадает с радиусом окружности, вписанной в треугольник основания. Этот радиус равен $r=\dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{6}=\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$. Тогда высота призмы равна $2\cdot\sqrt{3}$.

Центр описанного шара находится в середине высоты, то есть расстояние от него до плоскости равно $OO_1=\sqrt{3}$, где O – центр описанного шара, а O_1 – центр основания. Радиус описанной окружности около треугольника ABC будет равен $AO_1=2\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника AO_1O, по теореме Пифагора, находим радиус описанного шара: $OA=\sqrt{AO_1^2+OO_1^2}=\sqrt{15}$.

Таким образом, квадрат искомого отношения равен $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}\right)^2=5$.

7.2.3 Шар вписан в цилиндр. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади поверхности шара.

Решение. Радиус цилиндра равен радиусу шара R, а высота цилиндра равна диаметру шара, то есть $h=2R$. Площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$, а площадь полной поверхности цилиндра равна $2\pi R^2+2\pi Rh=6\pi R^2$. Таким образом, искомое отношение равно $\dfrac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=1,5$.

7.2.4 Найти радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра $SABC$ с ребром длиной $2\sqrt{6}$.

Решение. Центр шара O, описанного около правильной пирамиды, лежит на высоте, то есть $O\in O_1S$, где O_1 – центр описанной окружности около правильного треугольника ABC, следовательно, $O_1A=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника AO_1S, по теореме Пифагора, находим длину высоты пирамиды: $O_1S=\sqrt{AS^2-O_1A^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$. Пусть $R=OA=OS$ – радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра $SABC$. Следовательно, $OO_1=O_1S-OS=4\sqrt{2}-R$. Из прямоугольного треугольника AO_1O, по теореме Пифагора, находим радиус сферы.

$$OA^2=O_1A^2+OO_1^2\Rightarrow R^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(4-R\right)^2\Rightarrow R=3.$$

Таким образом, радиус сферы, описанной около тетраэдра $SABC$, равен 3.

7.2.5 Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ASB со сторонами $AS = BS = 17$ и $AB = 30$. Найти объём вписанного в конус шара.

Решение. Центром вписанного шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса. Следовательно, радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса: $R_{шара} = r_{\Delta ASB} = \dfrac{S_{\Delta ASB}}{p}$.

Найдём площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{17+17+30}{2} = 32;$$

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = \sqrt{32\cdot(32-17)\cdot(32-17)\cdot(32-30)} = 120.$$

Тогда радиус вписанного шара равен $R_{шара} = \dfrac{S_{\Delta ASB}}{p} = \dfrac{120}{32} = \dfrac{15}{4}$.

Следовательно, объём вписанного в конус шара равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{15}{4}\right)^3 = \frac{1125\pi}{16}.$$

7.2.6 В конус с высотой длиной $32/\pi$ см и радиусом основания длиной 4 см вписан цилиндр с радиусом основания длиной 2 см. Найти объём цилиндра.

Решение. Рассмотрим цилиндр, вписанный в конус. Радиус конуса R, радиус основания цилиндра r, высота конуса H и высота цилиндра h связаны соотношением:

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{R-r}.$$

Тогда

$$\frac{32/\pi}{h} = \frac{4}{4-2} \Rightarrow h = \frac{16}{\pi}.$$

Находим искомый объём цилиндра:

$$V = \pi\cdot r^2\cdot h = \pi\cdot 2^2\cdot\frac{16}{\pi} = 64.$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Шар вписан в куб, площадь поверхности которого равна $\frac{9}{\pi}$. Найдите удвоенное значение площади поверхности шара.

7.3.2 Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 0,5. Площадь боковой поверхности призмы равна 8. Найдите высоту цилиндра.

7.3.3 Цилиндр, объём которого равен 33, описан около шара. Найдите объём шара.

7.3.4 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 45.

7.3.5 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите удвоенное значение площади полной поверхности цилиндра.

7.3.6 Длина стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковая грань составляет с плоскостью основания 30^0. Найдите радиус описанного шара.

7.3.7 Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна $12\sqrt{2}$, а плоский угол при вершине пирамиды равен 60^0. Найдите длину радиуса, вписанного в пирамиду шара.

7.3.8 В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 60^0. Определите объём конуса, если сторона основания пирамиды имеет длину $\frac{27}{\sqrt[3]{\pi}}$.

7.3.9 В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна $\sqrt{3}$. Угол между его высотой и образующей равен 60^0. Найдите объём шара.

7.3.10 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $52\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

7.3.11 Шар вписан в усечённый конус, у которого длина образующей равна 12 см, а радиус меньшего основания равен 8 см. Найдите отношение площади большего основания конуса к площади меньшего основания.

7.3.12 $SABCD$ – прямоугольная пирамида, вписанная в цилиндр, $ABCD$ – квадрат, SB – высота. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π, а его объём 72π. Найдите объём пирамиды.

7.3.13 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $1/2$ высоты конуса. Объём жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

7.3.14 В правильную четырехугольную призму вписан конус так, что его основание вписано в нижнее основание призмы, а вершина находится в центре верхнего основания. Найдите отношение объема призмы к объему конуса.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Сфера радиуса 1,5 описана около прямоугольного параллелепипеда, у которого сумма рёбер, выходящих из одной вершины, равна 5. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

7.4.2 Найдите объём правильной шестиугольной призмы, если сфера радиусом 1 касается всех её граней.

7.4.3 Найдите объём прямой призмы, в которую вписан шар, если в её основании лежит ромб со стороной, равной 6, и острым углом 30^0.

7.4.4 Найти объём цилиндра, описанного около шара объёмом 20 см^3.

7.4.5 Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, равный $\arcsin\left(2\sqrt{2}/2\right)$. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит треугольник со сторонами 5, 7 и 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

7.4.6 Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90^0, а радиус вписанного в конус шара равен $3\sqrt{2}-3$. Найдите объём конуса.

7.4.7 Найдите объём усечённого конуса с образующей, равной 10, если в этот конус вписан шар радиуса 4.

7.4.8 В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и углом при вершине 120^0. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 15^0. Найдите радиус описанного около пирамиды шара.

7.4.9 Одно ребро треугольной пирамиды равно $2\sqrt{6}$, а все остальные равны 3. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

7.4.10 В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды, а четыре – в плоскости основания, все рёбра пирамиды равны между собой и каждое из них равно $4\sqrt{2}$. Найдите объём вписанного куба.

7.4.11 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а плоский угол при вершине пирамиды равен 60^0. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

7.4.12 Боковые рёбра и две стороны основания треугольной пирамиды равны $4\sqrt{6}$, а угол между равными сторонами основания равен 60^0. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

7.4.13 В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно 4, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60^0. Найдите объём пирамиды.

7.4.14 В шар радиуса 4 вписана правильная четырёхугольная пирамида с плоским углом при вершине, равным 15^0. Определите боковую поверхность пирамиды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика. Арифметические преобразования, уравнения, неравенства и прогрессии : методические указания к решению задач централизованного тестирования / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 51 с.

2. Математика. Тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения и неравенства : методические указания к решению задач централизованного тестирования / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 63 с.

3. Шлыков В. В. Геометрия 11 класс / В. В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2013. – 160 с.

4. Погорелов А. В. Учебник для 7–11 классов средней школы / А. В. Погорелов. – Москва : Просвещение, 1990. – 384 с.

5. Гусак, Г. М. Математика для подготовительных отделений / Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая. – Минск : Выш. шк., 1989. – 495 с.

6. Цыпкин, А. Г. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. – Москва : Наука, 1994. – 416 с.

7. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1991. – 352 с.

8. Гусев, В. А. Практикум по элементарной математике / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1988. – 350 с.

9. Куланин, Е. Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин [и др]. – Москва : Айрис Пресс, 2007. – 623 с.

10. Говоров, В. М. Сборник конкурсных задач по математике / В. М. Говоров [и др]. – Москва : Оникс, 2006. – 384 с.

11. Сканави, М. И. Сборник задач по математике в вузы / М. И. Сканави [и др]. – Москва : Оникс, 2007. – 608 с.

12. Мамонтова, Г. Г. Математика. Подготовка к тестированию / Г. Г. Мамонтова. – Минск. : Новое знание, 2008. – 686 с.

13. Азаров, А. И. Математика. Пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию за курс средней школы / А. И. Азаров [и др]. – Минск : Аверсэв, 2004. – 416 с.

14. Генденштейн, Л. Э. Наглядный справочник по математике с примерами / Л. Э. Генденштейн [и др.]. – Москва : Илекса, 2005. – 192 с.

15. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2005. – 80 с.

16. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2006. – 63 с.

17. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2007. – 62 с.

18. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2008. – 72 с.

19. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2009. – 72 с.

20. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2010. – 36 с.

21. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2011. – 37 с.

22. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2012. – 38 с.

23. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2013. – 35 с.

24. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2014. – 40 с.

25. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2015. – 42 с.

26. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2016. – 35 с.

27. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2017. – 40 с.

28. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2018. – 48 с.

29. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2019. – 56 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА.
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ.
ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович

Редактор *Т. А. Осипова*
Корректор *Т. А. Осипова*
Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати 17.06.2020. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Усл. печ. листов 4,5.
Уч.-изд. листов 5,7. Тираж 65 экз. Заказ № 175.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.