УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ЭВОЛЮЦИЮ МИКРОТРЕЩИН И ПОР В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Даль Ю. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Микроскопические поры и трещины образуются в процессе пластической деформации твёрдых тел или вследствие технологических особенностей получения последних. Это явление, называемое накоплением повреждений, заканчивается, когда в нагруженном теле, путем слияния смежных микродефектов, возникает макроскопическая трещина. Вторая стадия разрушения состоит в распространении трещины и завершается разделением тела на части.

Подавляющее большинство исследований по прочности твёрдых тел базируется на предположении о необратимости обеих стадий разрушения. С некоторыми оговорками это предположение можно принять для этапа распространения макротрещины. Что касается стадии накопления повреждений, то здесь постулат необратимости оказывается, вообще говоря, несправедливым. В последнее время получены убедительные экспериментальные данные об уменьшении деформационной пористости в твёрдых телах, находящихся под воздействием высокого гидростатического давления. Одновременно в этих опытах было обнаружено заметное повышение основных физико-механических характеристик твёрдых тел, обусловленное частичной регенерацией их сплошности.

Ниже в п.2 и п.3 получено решение задачи для больших деформаций шаровой полости в неограниченном упругом теле, нагруженном на бесконечности гидростатическим давлением. Произведена оценка влияния геометрической нелинейности на конфигурацию поры и распределение напряжений в её окрестности. В п.4 излагаются основные положения, связанные с завершающей фазой накопления повреждений, когда происходит слияние многих микроразрывов сплошности и образуется макроскопическая трещина.

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченное упругое изотропное тело S с шарообразной полостью радиуса R_0. Пусть на бесконечности тело загружено равномерным гидростатическим давлением $p=const$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в S.

Введем сферические координаты $r\theta\varphi$ с началом в центре поры. Из условий симметрии вытекает, что напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ являются главными напряжениями, тангенциальные перемещения $u_\varphi=u_\theta=0$, а радиальное перемещение u зависит только от координаты r.

Радиус деформированной полости будет равен

$$R_* = R_0 + u(R_0)\,. \tag{1.1}$$

1. Линейное решение. Согласно [1], имеем

$$u = -\frac{p(1-2\nu)}{E}r - \frac{p(1+\nu)R_0}{2E}\left(\frac{R_0}{r}\right)^2,$$
$$\sigma_{rr} = -p\left(1-\frac{R_0^3}{r^3}\right), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left(1+\frac{R_0^3}{2r^3}\right). \tag{1.2}$$

Здесь E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона материала пространства, r – расстояние (*до деформации*) рассматриваемой точки от начала координат.

Радиальное перемещение сферической полости вычисляется по формуле

$$u(R_0) = -\frac{3p(1-\nu)}{2E}R_0,$$

подставив которую в равенство (1.1), получим величину деформированного радиуса полости:

$$R = R_0\left(1-\frac{3(1-\nu)}{2E}p\right). \tag{1.3}$$

2. Геометрически нелинейное решение. Располагая результатами (1.1)–(1.3), учтём основные моменты, связанные с геометрической нелинейностью задачи. В основу дальнейшего анализа положим следующее предположение: *бесконечно малое изменение давления p на бесконечности вызывает в окрестности сферической поры приращение перемещений и напряжений, зависящее от её текущей (деформированной) конфигурации.* Тогда, после соответствующих преобразований [2], получим:

– выражение для радиуса деформированной поры

$$R_* = R_0 e^{-\frac{3(1-\nu)p}{2E}}; \tag{2.1}$$

– формулы для главных напряжений:

$$\sigma_{rr} = -p\left(1-\frac{R_*^3}{r_*^3}\right), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left(1+\frac{R_*^3}{2r_*^3}\right); \tag{2.2}$$

– соотношения для максимальных касательных напряжений:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{3p}{2}\left(\frac{R_*}{r_*}\right)^3, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2} = \frac{3p}{2}\left(\frac{R_*}{r_*}\right)^3, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь символами R_* и r_* обозначены, соответственно, радиус шаровой поры и координата r рассматриваемой точки после деформации. Вопрос теперь заключается в том, как определить параметр r_*.

Обратимся к формуле $(1.2)_1$. Исходя из принятого выше предположения, запишем приращение du_i деформированной координаты r_i на i-ой ступени нагружения $dp_i = p/n = const$ $(n>>1)$:

$$du_i = -\frac{pr_i}{nE}\left[(1-2\nu)+\frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{R_i}{r_i}\right)^3\right], \quad (r_i \geq R_i).$$

Отсюда находим перемещение контура поры

$$du_i(R_i) = -\frac{pR_i}{nE}\left[(1-2\nu)+\frac{(1+\nu)}{2}\right] = -\frac{3(1-\nu)pR_i}{2nE}.$$

Радиус деформированной поры и деформированная координата произвольной точки пространства перед следующей (i+1)-ой ступенью нагружения будут:

$$R_{i+1} = R_i\left(1-\frac{3(1-\nu)p}{2En}\right), \qquad (0 \le i+1 \le n), \tag{2.4}$$

$$r_{i+1} = r_i + du_i = r_i\left\{1-\frac{p}{En}\left[(1-2\nu)+\frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{R_i}{r_i}\right)^3\right]\right\}, \quad (r_i \ge R_i). \tag{2.5}$$

Представим теперь переменную r_{i+1} в виде суммы

$$r_{i+1} = R_{i+1} + \rho_{i+1}, \tag{2.6}$$

где слагаемое ρ_{i+1} является координатой, отсчитываемой от *деформированного* контура поры.

Внеся (2.6) в (2.5), находим

$$R_{i+1} + \rho_{i+1} = (R_i+\rho_i)\left\{1-\frac{p}{En}\left[(1-2\nu)+\frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{1}{1+\rho_i/R_i}\right)^3\right]\right\}, \quad (\rho_i \ge 0). \tag{2.7}$$

Пусть $\rho_i / R_i << 1$. Тогда

$$\left(\frac{1}{1+\rho_i/R_i}\right)^3 = 1-\frac{3\rho_i}{R_i}. \tag{2.8}$$

В результате подстановки (2.8) в (2.7) получаем

$$R_{i+1} + \rho_{i+1} = (R_i+\rho_i)\left\{1-\frac{p}{En}\left[(1-2\nu)+\frac{(1+\nu)}{2}\left(1-\frac{3\rho_i}{R_i}\right)\right]\right\}, \quad (\rho_i / R_i << 1). \tag{2.9}$$

Отсюда, после соответствующих преобразований, выводим

$$\rho_* = \rho_0 e^{\frac{3\nu p}{E}}.$$

Следовательно

$$r_* = R_* + \rho_* = R_0 e^{-\frac{3(1-\nu)p}{2E}} + \rho_0 e^{\frac{3\nu p}{E}}. \tag{2.10}$$

Подставив найденное выражение в формулы (2.2) и (2.3), будем иметь

$$\sigma_{rr} = -p\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{\rho_0}{R_0}e^{\frac{3(1+\nu)p}{2E}}\right)^3}\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left[1+\frac{1}{2\left(1+\frac{\rho_0}{R_0}e^{\frac{3(1+\nu)p}{2E}}\right)^3}\right]. \tag{2.11}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{3p}{2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{\rho_0}{R_0}e^{\frac{3(1+\nu)p}{2E}}\right)^3}\right], \quad \tau_3 = 0. \tag{2.12}$$

Здесь и выше R_0 и ρ_0 –соответственно *недеформированные* значения радиуса поры и расстояния до него от рассматриваемой точки.

Из этих соотношений вытекает, что *с точки зрения геометрически нелинейной теории упругости в окрестности шаровой поры распределение нормальных и касательных напряжений зависит от трёх параметров*: одного геометрического (отношения ρ_0 / R_0) и двух механических (модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν материала тела).

3. Физически нелинейное решение. По условиям постановки задачи, главными осями напряжений и деформаций будут направление центрального радиуса r и два любых, перпендикулярных к нему и взаимно перпендикулярных направления на сфере $r = const$.

Истинные деформации определяются выражениями

$$\varepsilon_{rr} = \ln(1+\frac{du}{dr}), \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \ln(1+\frac{u}{r}). \tag{3.1}$$

Напряжения и деформации связаны между собой зависимостями [3]

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{rr}, && \sigma_i = \Phi(\varepsilon_i),\\
\sigma_{\theta\theta} - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{\theta\theta}, && \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\\
\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{\varphi\varphi}, && \sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr})^2},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2}.$$

Обозначим, как и выше, деформированную координату произвольной точки через

$$r_* = r + u(r). \tag{3.3}$$

Условие несжимаемости $\theta = 0$ после подстановки в него соотношений (3.1) и (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{r_*^2}{r^2}\frac{dr_*}{dr} = 1$$

Интегрируя полученное уравнение, получим

$$r_* = \sqrt[3]{r^3 + c}, \qquad u = \sqrt[3]{r^3 + c} - r, \tag{3.4}$$

где c – произвольная постоянная интегрирования.
Подставляя (3.4) в (3.1) получаем

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{rr} = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{c}{r^3}\right). \tag{3.5}$$

Внеся эти выражения в формулу для интенсивности деформаций ε_i, находим

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{c}{r}\right). \tag{3.6}$$

Умножая уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr_*} + \frac{2}{r_*}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

на $\dfrac{dr_*}{dr}$, приведем его к виду

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r_*}\frac{dr_*}{dr}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \tag{3.7}$$

Из формул (3.1) и (3.2) имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} \quad , \qquad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_i .$$

В результате подстановки этих выражений в уравнение (3.7) и его последующего интегрирования, выводим

$$\sigma_{rr} = 2\int_{R_0}^{r} \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + c} dr + A, \qquad (A = const). \tag{3.8}$$

Учитывая краевые условия $\sigma_{rr}(R_0) = 0$, $\sigma_{rr}(\infty) = -p$, из формулы (3.8) находим

$$\sigma_{rr} = 2\int_{R_0}^{r} \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + c} dr, \tag{3.9}$$

$$-p = 2\int_{R_0}^{\infty} \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + c} dr. \tag{3.10}$$

При известном законе $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) = f(r)$ соотношение (3.10) определяет постоянную c. Отсюда вытекает, что упруго-пластические напряжения полностью характеризуется формулами (3.9), (3.1), (3.2).

4. Критерий разрушения. Критический размер макроскопической трещины определяется формулой

$$l_k = A / \sigma^2 .$$

Здесь A – константа, зависящая от формы тела с трещиной; σ – растягивающее напряжение в окрестности трещины.

Пусть длина имеющейся в теле трещины равна l_0. Тогда, если эта трещина начала расти и достигла размера l_k, то на основании предыдущей формулы имеем

$$(\delta l_k / l_0) = A/(l_0\sigma^2) - 1 = (S/\sigma)^2 - 1. \qquad (4.1)$$

Выражение (4.1) определяет критическое значение приращения трещины δl_k. Входящая сюда константа $S = A/l_0^2$ имеет размерность напряжений. Если под l_0 понимать меру длины начальных микротрещин, образовавшихся при деформации, то отношение $\delta l_k / l_0$ можно истолковать как безразмерную характеристику повреждений ω, накопленных в теле при его деформировании. Отсюда получаем искомый критерий разрушения:

$$\omega = (S/\sigma)^2 - 1.$$

Работа выполнена по теме исследований гранта РФФИ № 03-01-00601

УДК 539.4.015

О СВЯЗИ НАЧАЛЬНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА С ЕГО ДОЛГОВЕЧНОСТЬЮ ПРИ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКЕ

Холодарь Б. Г.

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь
hbg@bstu.by

При проведении испытаний различных материалов на долговечность отмечается значительный разброс результатов. В зависимости от материала, уровня и характера нагружения разброс долговечности может достигать нескольких десятичных порядков [1,2]. Определенную роль в этом играют условия проведения эксперимента, но основной причиной разброса является наличие исходной поврежденности структуры материала и вероятностный характер ее распределения по объему. Особенно сложен учет влияния разброса на результаты эксперимента при непостоянных нагрузках.

Формально связь долговечности образца с уровнем исходной поврежденности и напряженным состоянием можно проанализировать с помощью соответствующего кинетического уравнения развития поврежденности. В качестве меры поврежедености в точке тела может быть использована некоторая непрерывным образом распределенная по объему образца скалярная величина $0 \le \omega \le 1$ [2], которая, в общем случае, состоит из мгновенно-обратимой, запаздывающе-обратимой и необратимой компонент, изменение которых во времени подчиняется соответствующим кинетическим уравнениям [3]. В большинстве случаев интерес представляет необратимая часть поврежденности, поэтому далее именно ее будем понимать под поврежденностью. Внутри каждой из компонент можно выделить гидростатическую и девиаторную составляющие, имея ввиду их связь с гидростатической и девиаторной компонентами напряженно-деформированного состояния тела. Необходимость такого выделения подтверждается, например, обработкой данных по долговечности поливинилхлорида при сложном на-