

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

Л.Г. Сильченко

Институт прикладной механики РАН.
117334, Москва, Ленинский проспект 32А
e-mail: iam@ipsun.ras.ru

В работе анализируется устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении. Рассмотрены два подхода к изучению задачи. Найдена критическая нагрузка. Показано, что при сжимающей нагрузке значительно меньшей критической, возможны недопустимо большие уровни деформации.

Изделия, выполненные из сплавов с памятью формы (СПФ) часто испытывают сжимающие напряжения большой величины. Жесткость конструктивных элементов из СПФ существенно меняется при термоупругих превращениях. В результате становится возможной потеря устойчивости элементов из СПФ, вызванная фазовыми переходами.

В работе [1] анализировалась потеря устойчивости тонкостенных элементов из СПФ при обратном превращении, вызванная сжимающими реактивными напряжениями. Однако неустойчивость возможна и при прямом мартенситном переходе.

Рассмотрим деформирование прямолинейного однородного консольного стержня из СПФ, нагруженного сжимающей «мертвой» силой P на свободном конце при прямом мартенситном превращении, в так называемой несвязной постановке, когда объемная доля мартенситной фазы q не зависит от уровня действующих напряжений. На рис. 1 схематично представлены два положения изучаемого стержня: 1) исходное (сжимающая сила отсутствует) и 2) отклоненное, которое стержень принимает в закритическом состоянии. На этом же рисунке показана начальная материальная система координат Ox_1x_2 , связанная со стержнем, которая используется в работе. Ее начало расположено в центре тяжести поперечного сечения консольно закрепленного конца стержня, а ось Ox_1 направлена вдоль линии центров тяжести его поперечных сечений (упругой линии). Ось Ox_2 ортогональна оси Ox_1 .

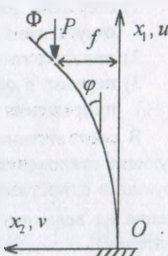


Рис. 1

Далее используется безразмерная форма изложения. В качестве основных размерных величин приняты длина стержня l_0 в аустенитном состоянии и некая величина E_0 , имеющая размерность модуля упругости. Кроме них, используется размерный параметр $G = E_0 J_0^4$, где J безразмерный момент инерции сечения стержня (образован делением размерного аналога на l_0^4). Все величины, имеющие размерность длины, безразмерны путем деления на l_0 . Безразмерные нормальная сила N , сосредоточенная сжимающая внешняя нагрузка P получены из соответствующих размерных величин

путем деления на G/l_0^2 , а изгибающий момент M — на G/l_0 . Что касается других безразмерных величин, то правила их образования будут оговорены по мере необходимости.

Используется одномерный вариант определяющих уравнений для СПФ [2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}, \sigma = E(q)\varepsilon^{(1)}, \frac{1}{E(q)} = \frac{1}{E_2} \left(1 + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) q \right), \lambda = \frac{E_1}{E_2}, \\ \varepsilon_q^{(2)} &= \frac{2}{3} f \left(\frac{\sigma}{\sigma_m} \right) + a_0 \varepsilon^{(2)}, f \left(\frac{\sigma}{\sigma_m} \right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^m, q = \sin \left(\frac{\pi}{2} t \right),\end{aligned}\quad (1)$$

причем указанная зависимость модуля упругости E от q предложена в [3].

В формулах (1) ε , $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ — полная, упругая, фазовая деформации соответственно; q — объемная доля мартенситной фазы в СПФ; σ , E_1 , E_2 — безразмерные осевое напряжение, а также модули упругости мартенситного и аустенитного состояний материала стержня соответственно. Три последние величины, а также модуль упругости $E(q)$, рассматриваемый как функция величины q , обезразмерены отнесением соответствующих размерных аналогов к E_0 . Величины a_0 , m , σ_m являются константами материала, причем последняя получена делением соответствующей размерной величины на E_0 . Напомним, что в работе рассмотрен материал с памятью формы, у которого объемная доля мартенситной фазы q зависит лишь от температуры, что выражено последней формулой (1). В ней безразмерная температура t образована по формуле $t = (M - T)/(M_1 - M_2)$, где T , M_1 , M_2 — абсолютная температура, а также температура начала и конца реакции прямого термоупругого превращения. Очевидно, что величины q , t должны принадлежать интервалу $q, t \in [0, 1]$, причем ноль соответствует началу, а единица — концу прямого термоупругого превращения. Отметим, что символ после запятой в нижнем индексе указывает на соответствующее частное дифференцирование.

Первоначально будем использовать приближенный подход. В его основу положим упрощающие предположения и допущения относительно поведения стержня:

- 1) стержень деформируется в соответствии с гипотезой плоских сечений (сдвиги отсутствуют);
- 2) при докритическом обжати стержень остается прямолинейным;
- 3) переход в отклоненное положение равновесия происходит на фоне отсутствия приращения объемной доли мартенситной фазы ($dq = 0$).

В соответствии с третьим допущением все используемые величины, характеризующие отклоненное положение равновесия изучаемого стержня, рассматриваются как функции единственной переменной — материальной координаты x_1 . Никакие ограничения на величину смещений не накладываются. При деформировании стержней из материала с памятью формы при термоупругих превращениях осевые деформации могут достигать десятков процентов. Это делает оправданным учет сжимаемости оси изучаемого стержня. В работе [4] показано, что в случае, когда наряду с гипотезой плоских сечений учитывается также сжимаемость оси, то для распределения деформаций, в качестве которых рассматриваются относительные удлинения, справедлива зависимость

$$\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon_0(x_1) - x_2 \kappa(x_1), \quad (2)$$

причем для ε_0 , κ (умножена на l_0 при обезразмеривании) верны либо выражения

$$\varepsilon(x_1) = \sqrt{(1+u')^2 + (v')^2} - 1, \quad \kappa(x_1) = (v'/(1+u'))' / (1+(v'/(1+u'))^2), \quad (3)$$

когда в качестве основных неизвестных выбираются v, u — прогиб и осевое смещение оси стержня соответственно, либо выражения

$$\varepsilon(x_1) = v' / \sin \varphi - 1, \quad \kappa(x_1) = \varphi', \quad (4)$$

когда в качестве основных неизвестных выбираются v, φ (угол наклона) (см. рис. 1).

Из рассмотрения равновесия отсеченной верхней части стержня, соответствующей координате x_1 , следуют уравнения (f — прогиб верхнего конца стержня)

$$M + P(f - v) = 0, \quad N = -P \cos \varphi. \quad (5)$$

Для момента и нормальной силы в соответствии с (2) следуют зависимости

$$M = -E(q)\kappa, \quad N = E(q)\varepsilon_0 / i^2. \quad (6)$$

Здесь $i = \sqrt{J/F}$ — безразмерный радиус инерции сечения стержня, причем F — безразмерная площадь этого сечения, получена отнесением к l^2 .

С учетом соотношений (4)–(6) изучаемая задача сводится к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi' + p^2(q)(v - f) = 0, \quad \frac{v'}{\sin \varphi} - 1 - \tilde{\varepsilon}^{(2)} = -p^2(q)i^2 \cos \varphi,$$

где введено обозначение $p^2(q) = P/E(q)$, а под $\tilde{\varepsilon}^{(2)}$ понимается фазовая составляющая докритической деформации. Например, для $m = 1$ (см. (1))

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)} = -\frac{2}{3} \frac{P i^3}{\sigma_1 a_0} (\exp(a_0 q) - 1).$$

Указанная система сводится к одному нелинейному уравнению

$$\varphi'' + p^2(q) \sin \varphi (1 + \tilde{\varepsilon}^{(2)} - p^2(q)i^2 \cos \varphi) = 0. \quad (7)$$

Если дополнить уравнение (7) соответствующими краевыми условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(\Phi) = 0, \quad (8)$$

то постановка изучаемой задачи окажется завершенной.

Можно показать, что решением задачи (7), (8) является зависимость

$$\frac{1}{\sqrt{2p(q)}} \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos \varphi - \cos \Phi)((1 + \tilde{\varepsilon}^{(2)}) - (\cos \varphi + \cos \Phi)p^2(q)i^2/2)}} = 1. \quad (9)$$

Последней формуле можно придать другой вид

$$\frac{1}{p(q)\sqrt{1 - p^2(q)i^2 \cos \Phi}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - \cos \Phi)(2 + p^2(q)i^2(1 - \cos \Phi))}{1 - p^2(q)i^2 \cos \Phi}}\right) = 1, \quad (10)$$

где использован эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$.

При помощи либо зависимости (9), либо (10) по заданной нагрузке P и заданной же объемной доли мартенситной фазы q может быть установлен соответствующий угол наклона верхнего конца стержня Φ (см рис. 1). Очевидно, критической следует считать такое наименьшее значение силы P при превышении которого, наряду с нулевым, существует также ненулевой угол Φ .

Обычно для стержня критической называется нагрузка, соответствующая бифуркации исходной прямолинейной формы равновесия, когда наряду с прямолинейной, появляются отклоненные формы равновесия. Чтобы найти такие нагрузки, достаточно линеаризовать (в окрестности $\varphi = 0$) уравнение (7) и исследовать его. Можно также линеаризовать решения (9), (10). В итоге для разыскания критической нагрузки, соот-

ветствующей точке бифуркации, в случае, когда (см. (1)) $m=1$, можно получить формулу

$$P_{cr}(q) = \frac{1}{2i^2 \psi(q)} \left(1 - \sqrt{1 - \pi^2 i^2 E(q) \psi(q)} \right), \quad \psi(q) = \frac{1}{E(q)} + \frac{2}{3\sigma_0 a_0} (\exp(a_0 q) - 1). \quad (11)$$

Интересно отметить, что при нагрузке, даже несколько меньшей, чем подсчитанная по (11), для коротких стержней (параметр i — относительно велик) существуют отклоненные формы равновесия, несмежные с исходной прямолинейной. Они могут быть найдены лишь при помощи точных нелинейных формул (9), (10).

Далее рассмотрен подход к анализу устойчивости изучаемого стержня, при котором третье допущение не используется, а смещения стержня считаются малыми.

Если при докритическом обжатии стержня, изготовленного из СПФ, в условиях термоупругого превращения развиваются значительные осевые деформации, то к исследованию статической устойчивости такого стержня применимы линеаризованные уравнения, учитывающие укорочение оси стержня.

Все переменные величины в формулах (1), за исключением $E(q)$, далее рассматриваются как функции трех переменных x_1, x_2, q .

Поскольку в работе рассматривается несвязная постановка, то гипотеза плоских сечений Бернулли-Эйлера, справедлива как в отношении упругой, так и в отношении фазовой составляющих деформации. Тогда относительное удлинение продольного волокна стержня, отстоящего на расстояние x_2 от его упругой оси, определяется по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_1, x_2, q) &= \varepsilon_0(x_1, q) - x_2 \kappa(x_1, q) = \varepsilon^{(1)}(x_1, x_2, q) + \varepsilon^{(2)}(x_1, x_2, q) = \\ &= \varepsilon_0^{(1)}(x_1, q) - x_2 \kappa^{(1)}(x_1, q) + \varepsilon_0^{(2)}(x_1, q) - x_2 \kappa^{(2)}(x_1, q), \\ \varepsilon_0(x_1, q) &= u_{,1}(x_1, q), \quad \kappa(x_1, q) = \left(v_{,1}(x_1, q) / (1 + u_{,1}(x_1, q)) \right)_{,1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\varepsilon_0, \varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}$ — относительное удлинение упругой оси, а также его упругая и фазовая составляющие. Величиной κ определяется часть относительного удлинения продольного элемента стержня, отстоящего от упругой оси стержня на расстояние x_1 и связанная с изгибом. Символами $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}$ обозначены упругая и фазовая составляющие κ .

Воспользовавшись формулами (2), (12) можно получить выражения для внутренних силовых факторов — нормальной силы и изгибающего момента

$$M(x_1, q) = -E(q) \kappa^{(1)}, \quad N(x_1, q) = E(q) \varepsilon_0^{(1)} / i^2. \quad (13)$$

Из рассмотрения равновесия верхней отсеченной части стержня, но с учетом линеаризации приходим к двум уравнениям — аналогам формул (5)

$$M + P(f - v) = 0, \quad N = -P. \quad (14)$$

Нужные уравнения (1), (12) — (14), если к ним добавить краевые условия

$$v(0, q) = v_{,1}(0, q) = u(0, q) = 0 \quad (15)$$

и начальные условия

$$\varepsilon^{(2)}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad v(x_1, 0) = \bar{v}(x_1), \quad (16)$$

обеспечивают постановку задачи.

Из второго уравнения (1), а также с учетом формул (13), (14), следует выражение для распределения напряжений по сечению

$$\sigma(x_1, x_2, q) = -P(i^2 - x_2(v(x_1, q) - f(q))). \quad (17)$$

Подставляя в пятое уравнение (1), в котором положим $m = 1$, выражение для $\varepsilon^{(2)}$ из формул (12), а напряжение по формуле (17), приравнявая далее члены при одинаковых степенях x_1 , можно получить два уравнения в частных производных:

$$\varepsilon_{x_1 q}^{(2)} - a_0 \varepsilon_0^{(2)} = -2/3 P i^2 / \sigma_1, \quad \kappa_{x_1}^{(2)} - a_0 \kappa^{(2)} = -2/3 P (v - f) / \sigma_1. \quad (18)$$

Первое из этих уравнений на самом деле является обыкновенным дифференциальным уравнением. Подчиняя его решение начальному условию

$$\varepsilon_0^{(2)}(x_1, 0) = 0,$$

следующему из первого уравнения (16), находим (сравни с формулой предшествующей (7))

$$\varepsilon_0^{(2)}(x_1, q) = -\frac{2}{3} \frac{P i^2}{\sigma_1 a_0} (\exp(a_0 q) - 1). \quad (19)$$

Преобразуя второе уравнение (18) с учетом соотношений (12) - (14), (19), вводя новую искомую функцию

$$w(x_1, q) = v(x_1, q) - f(q), \quad (20)$$

окончательно получаем

$$\left(\frac{w_{,11}}{\gamma(q)} \right)_{,1} + P \left(\frac{w}{E(q)} \right)_{,1} - a_0 \left(\frac{w_{,11}}{\gamma(q)} + \frac{P w}{E(q)} \right) + \frac{2}{3} \frac{P}{\sigma_1} w = 0, \quad (21)$$

в котором введено обозначение

$$\gamma(q) = 1 + u_1 = 1 - P i^2 \psi(q), \quad \psi(q) = \frac{1}{E(q)} + \frac{2}{3 \sigma_1 a_0} (\exp(a_0 q) - 1) \quad (22)$$

Заметим, что введение новой искомой функции по формуле (20) требует соответствующего изменения части краевых условий (15), накладываемых на функцию v . Первые два краевых условия (15) имеет смысл заменить на следующие

$$w(1, q) = w_1(0, q) = 0. \quad (23)$$

Воспользовавшись при решении дифференциального уравнения в частных производных (21) методом разделения переменных, в соответствии с которым

$$w(x_1, q) = W(x_1) Q(q), \quad (24)$$

можно получить два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$W'' + \alpha^2 W = 0, \quad \left[\left(\frac{1}{E(q)} - \frac{\alpha^2}{P \gamma(q)} \right) Q \right]' + \left(\frac{2}{3 \sigma_1} - \frac{a_0}{E(q)} - \frac{\alpha^2 a_0}{P \gamma(q)} \right) Q = 0, \quad (25)$$

где α^2 — искомый параметр, а штрихом в первом уравнении обозначена производная по x_1 , а во втором уравнении — по q .

Бесконечный набор фундаментальных решений уравнения (21) можно получить, если воспользоваться решениями системы (25) с учетом представления (24) и краевых условий (23). Любое решение может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальных решений ($\alpha_n = \pi / 2(2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots, \infty$):

$$w(x_1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Q_n(q) \cos(\alpha_n x_1), \quad (26)$$

$$Q_n(q) = \left| \frac{1}{E_1} - \frac{\alpha_n^2}{P \gamma(0)} \right| \left| \frac{1}{E(q)} - \frac{\alpha_n^2}{P \gamma(q)} \right|^{-1} \exp \left(a_0 q - \frac{2}{3 \sigma_1} \int_0^q \left(\frac{1}{E(q)} - \frac{\alpha_n^2}{P \gamma(q)} \right)^{-1} dq \right).$$

Коэффициенты C_n определяются начальным условием (см. (20))

$$w(x_1, 0) = \tilde{w}(x_1), \quad \tilde{w}(x_1) = \tilde{v}(x_1) - f(0). \quad (27)$$

Анализ формулы (26) убеждает, что при некоторых значениях дискретного параметра волнообразования n , существуют значения сжимающей силы P , при которых соответствующие фундаментальные решения обращаются в бесконечность. Очевидно, этому отвечает обращение в ноль выражения $1/E(q) - \alpha_n^2/(Py(q))$. Значения внешней нагрузки P , при котором это достигается можно найти по формуле

$$P_{\beta}^{(n)}(q) = \frac{1}{2i^2 \psi(q)} \left(1 + (-1)^{\beta} \sqrt{1 - (1 + 2n)^2 \pi^2 i^2 E(q) \psi(q)} \right) \quad (\beta = 1, 2; \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max}) \quad (28)$$

Из формулы (28) ясно, что для каждого допустимого значения n ($0 \leq n \leq n_{\max}$) существуют два значения нагрузки $P_{\beta}^{(n)}(q)$, ($\beta = 1, 2$), обращающих указанный выше знаменатель в ноль. Очевидно, наименьшей такой нагрузке (критической силе) соответствуют параметры $n = 0, \beta = 1$. Соответствующая нагрузка $P_1^{(0)}(q)$ совпадает с критической силой $P_{cr}(q)$ (см. (11)), найденной ранее.

Из формулы (26) видно, что нагрузка, даже существенно более низкая, чем критическая (11), может вызывать столь большие отклонения стержня, а следовательно и напряжения, возникающие в нем, которые приведут к его разрушению. Действительно, если считать начальное условие (27) не нулевым, а это практически всегда верно, то за счет экспоненциальных множителей в (26) прогибы $Q_0(q)$ стержня могут достигнуть очень больших значений. В качестве примера рассмотрим стержень с безразмерными параметрами $j = 0.025$, $a_0 = 0.718$, $\sigma_1 = 0.0490$, $\lambda = 1/3$ (при обезразмеривании в качестве E_0 использовался размерный модуль упругости СПФ в аустенитном состоянии), нагруженный сжимающей силой P , равной половине критической силы $P = 0.5 P_{cr}(1)$. При заданных параметрах $P_{cr}(1) = 0.832$ (см. (11)). На рис. 2 представлен график величины $Q_0(q)$, являющейся частью нулевого (с индексом $n = 0$) фундаментального решения (см (26)) $u_0(x, q) = C_0 Q_0(q) \cos(\alpha_0 x)$. Из графика видно, что уже при $q < 1$ происходит очень большой рост $Q_0(q)$, а следовательно прогиба (см. (20)). Все это позволяет сделать вывод о том, что для изучаемого стержня из СПФ опасной является нагрузка, значительно меньшая критической.

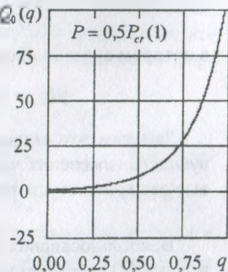


Рис. 2

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ. Проект №990101187.

Список литературы

1. Хусаинов М. А., Беляков В. Н. Исследование силовых характеристик при прощелкивании арки-полоски из никелида титана // I Международный семинар "Актуальные проблемы прочности" им. В. А. Лихачева и XXXIII семинар "Актуальные проблемы прочности". Научные труды. Т. 2, Ч.2 С. 139 – 142.
2. Мовчан А. А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. АН МТТ. 1995. № 1. С. 197 – 205.
3. Бречко Т. М., Лихачев В. А. Моделирование эффекта памяти формы // Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами: XXIV Всесоюз. семинар "Актуальные проблемы прочности". Рубежное. 1990. С. 57 – 60.
4. Сильченко Л. Г. Критическое деформирование стержня с учетом сжимаемости его оси // ИПРИМ РАН, Механика композиционных материалов и конструкций, 1999, Т.5, № 1. С. 24—38.