

О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПЛОСКИМ КРУГОВЫМ ШТАМПОМ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

В.И.Смирнов

*Институт проблем транспорта РАН,
199178, С.-Петербург, В.О., 12-я линия, д.13*

Приведены формулы для вычисления напряженно-деформированного состояния (НДС) в любой точке полупространства. Построены линии равных касательных напряжений. Рассмотрена асимптотика НДС у границы контактной площадки. Получено выражение для коэффициента интенсивности напряжений.

Данная работа дополняет результаты, полученные в [1,2,3]. Приведены точные формулы для вычисления компонент упругого поля, дано выражение для коэффициента интенсивности напряжений на краю штампа.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) задача сводится к нахождению углового смещения u_θ из уравнения равновесия

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

при следующих условиях на границе $z = 0$ полупространства $z \geq 0$, $-\infty < r < \infty$:

$$\begin{aligned} u_z &= \theta_0 r, \quad z=0, \quad r < a; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= 0, \quad z=0, \quad r > a, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ_0 – угол поворота, a – радиус штампа.

В данном случае имеем только два ненулевых компонента тензора напряжений – $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$, которые определяются через смещения по формулам:

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); \quad \sigma_{z\theta} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad (3)$$

где μ – упругая константа Ламе.

Решение краевой задачи (1),(2) ищем в виде разложения в интеграл Фурье–Бесселя

$$u_\theta(r, z) = \int_0^\infty A(k) k e^{-kz} J_1(kr) dk, \quad (4)$$

где постоянная $A(k)$ определяется из решения парного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(k) k J_1(kr) dk &= \theta_0 r, \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} A(k) k^2 J_1(kr) dk &= 0, \quad r > a. \end{aligned} \quad (5)$$

Парному уравнению (5) удовлетворяет функция [4]

$$A(k) = \frac{4\theta_0}{\pi} \left(\frac{\sin(ka)}{k^3} - a \frac{\cos(ka)}{k^4} \right). \quad (6)$$

Подставляя (6) последовательно в (4) и (3), вычисляя интегралы по k , и переходя к безразмерным координатам по формулам $\xi = r/a$, $\eta = z/a$, получим решение задачи, позволяющее определить напряженно-деформированное состояние в любой точке полупространства:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^0(\xi, \eta) &= \frac{4\theta_0}{\pi} (S_1^{-1} - C_1^0); \\ \sigma_{r\theta}^0(\xi, \eta) &= \frac{4\theta_0}{\pi} \mu \left(S_0^0 - C_0^1 - \frac{2}{\xi} S_1^{-1} + \frac{2}{\xi} C_1^0 \right); \\ \sigma_{z\theta}^0(\xi, \eta) &= -\frac{4\theta_0}{\pi} \mu (S_1^0 - C_1^1), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} S_0^0 &= \operatorname{arctg} \frac{1 + \Omega \sqrt{R}}{\eta + F \sqrt{R}}; \quad S_1^0 = \frac{1}{\xi} (1 - \Omega \sqrt{R}); \\ S_1^{-1} &= \frac{1}{2\xi} [\xi^2 S_0^0 + \sqrt{R} (\eta \Omega + F) - 2\eta]; \quad C_0^1 = F / \sqrt{R}; \\ C_1^0 &= \frac{1}{\xi} (F \sqrt{R} - \eta); \quad C_1^1 = \frac{1}{\xi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{R}} (\Omega + \eta F) \right]; \\ F &= \sqrt{\frac{R+A}{2R}}; \quad \Omega = \sqrt{\frac{R-A}{2R}}; \quad A = \xi^2 + \eta^2 - 1; \quad R = \sqrt{A^2 + 4\eta^2}; \\ u_{\theta}^0(\xi, \eta) &= \frac{\pi}{4\theta_0} u_{\theta}(\xi, \eta); \quad \sigma_j^0(\xi, \eta) = \frac{\pi}{4\theta_0 \mu} \sigma_j(\xi, \eta), \quad j = r\theta, z\theta. \end{aligned}$$

На поверхности полупространства $\eta = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^0(\xi, 0) &= \begin{cases} \frac{\pi \xi}{4}, & 0 < \xi < 1; \\ \frac{\xi}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\xi}, & 1 < \xi < \infty; \end{cases} \\ \sigma_{r\theta}^0(\xi, 0) &= \begin{cases} 0, & 0 < \xi < 1; \\ -\frac{1}{\xi^2 \sqrt{\xi^2 - 1}}, & 1 < \xi < \infty; \end{cases} \\ \sigma_{z\theta}^0(\xi, 0) &= \begin{cases} -\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, & 0 < \xi < 1; \\ 0, & 1 < \xi < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

на оси симметрии ($\xi = 0$):

$$u_{\theta}^0(0, \eta) = \sigma_{r\theta}^0(0, \eta) = \sigma_{z\theta}^0(0, \eta) = 0, \quad (8)$$

и, наконец, на границе контактной площадки $\xi = 1, \eta = 0$:

$$u_{\theta}^0(1, 0) = \frac{\pi}{4}, \quad \xi \rightarrow 1 \pm 0;$$

$$\sigma_{r\theta}^0(1, 0) = \begin{cases} 0, & \xi \rightarrow 1-0; \\ -\infty, & \xi \rightarrow 1+0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\sigma_{z\theta}^0(1, 0) = \begin{cases} -\infty, & \xi \rightarrow 1-0; \\ 0, & \xi \rightarrow 1+0. \end{cases}$$

На рис. 1, 2 и 3 показаны линии равных смещений u_{θ} и напряжений, $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$.

Рассмотрим асимптотику напряженно-деформированного состояния у края штампа ($\xi = 1, \eta = 0$). Введем полярные координаты (ρ_0, φ) с началом на границе контактной площадки по формулам $\eta = \rho_0 \sin \varphi$, $\xi = 1 + \rho_0 \cos \varphi$, $\rho_0 = \rho/a$.

Асимптотические ($\rho_0 \rightarrow 0$) значения интегралов, входящих в решение (7), имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1^{-1} &= \pi/4; \quad C_1^0 = 0; \quad S_0^0 = \pi/2; \quad S_1^0 = 1; \\ C_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \cos \frac{\varphi}{2}; \quad C_1^1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

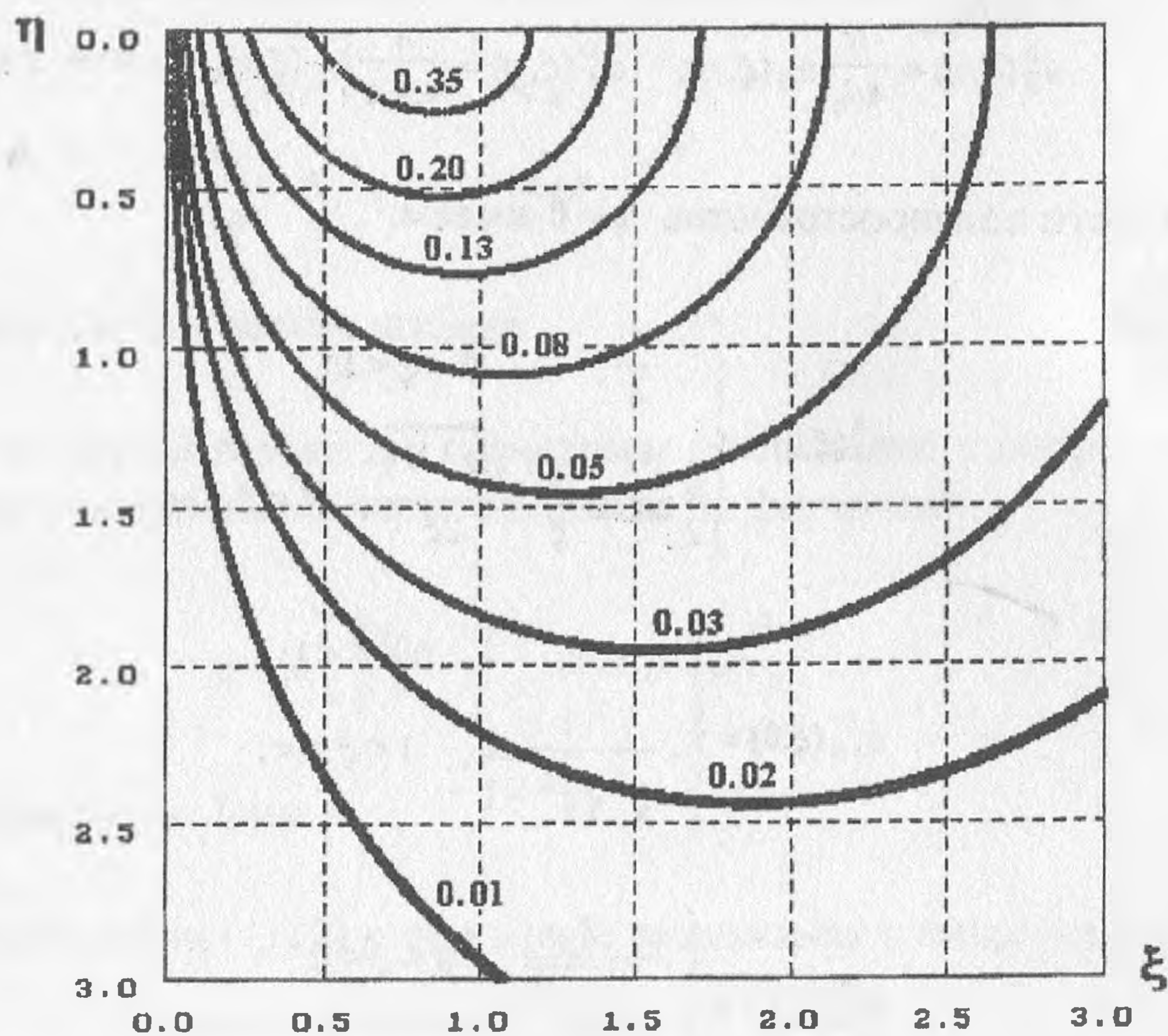


Рис. 1. Линии равных смещений u_{θ}

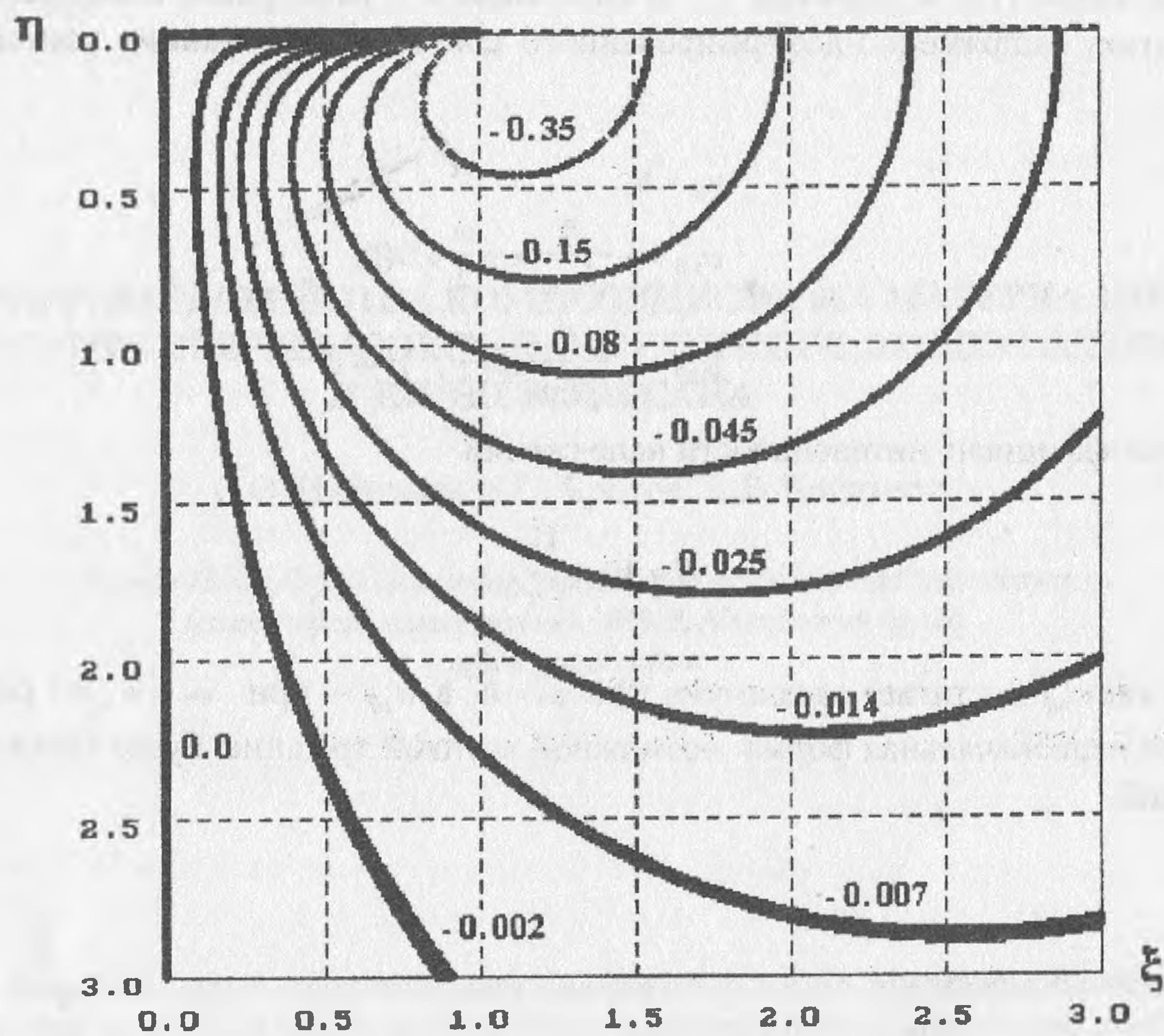


Рис.2. Линии равных напряжений $\sigma_{r\theta}$.

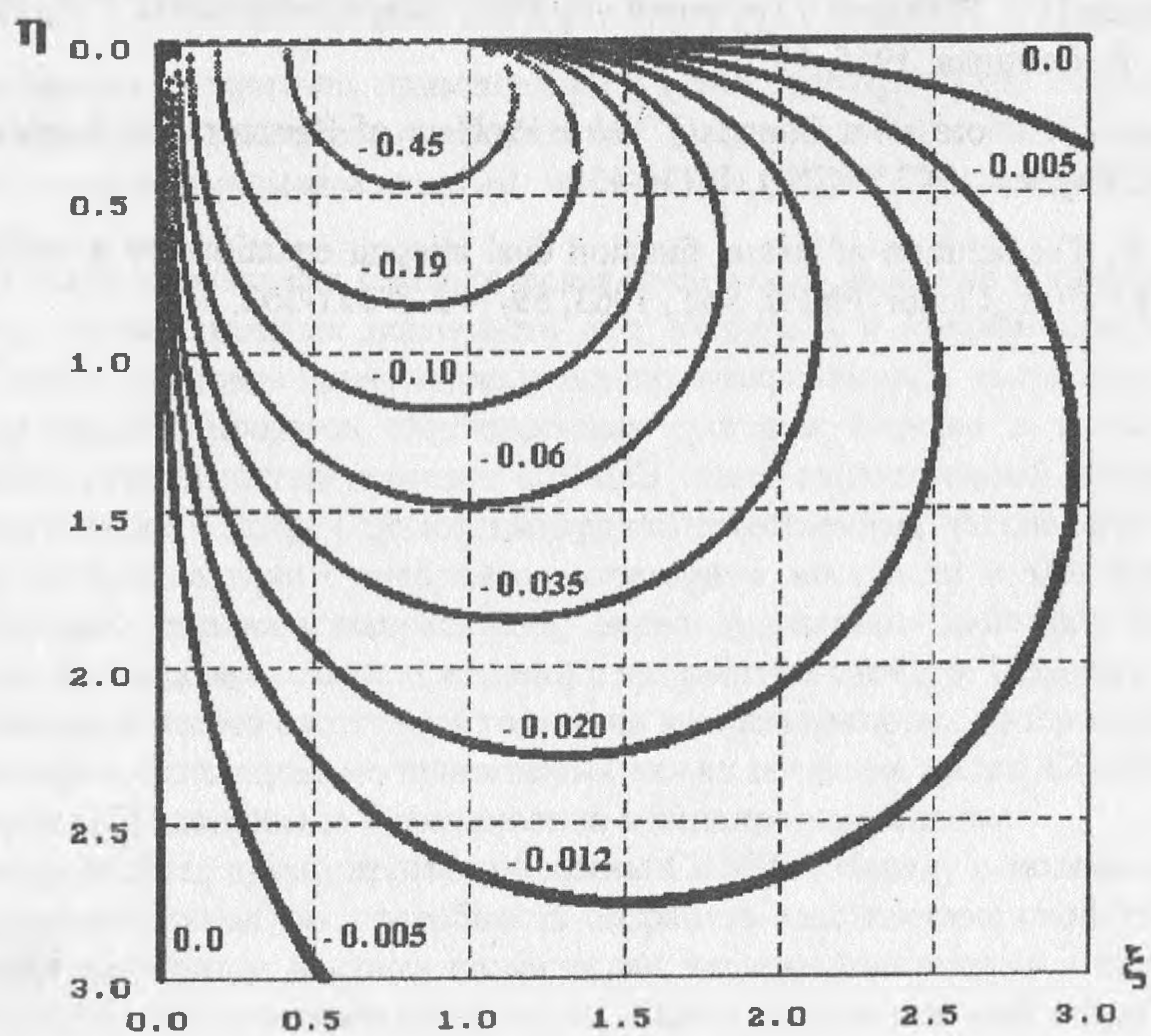


Рис.3. Линии равных напряжений $\sigma_{z\theta}$.

Подставляя (10) в формулы (7) и возвращаясь к размерным величинам, получим асимптотику напряженно-деформированного состояния на границе контактной площадки

$$\begin{aligned} u_\theta &= \theta_0; \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{K}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} + O(1); \\ \sigma_{z\theta} &= -\frac{K}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \rho \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где K – коэффициент интенсивности напряжений

$$K = 4\theta_0\mu\sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Так как $\sigma_{r\theta}$ достигает максимума при $\varphi_* = 0$, а $\sigma_{z\theta}$ – при $\varphi_* = \pi$, то следует ожидать, что первоначальная форма возможной хрупкой трещины будет близка к цилиндрической.

Список литературы

1. Минцберг Б.Л. К вопросу о кручении полупространства // Прикладная математика и механика, 1957, **21**, N 1. С.116-118.
2. Ростовцев Н.А. К задаче о кручении упругого полупространства // Прикладная математика и механика, 1955, **19**, N 1. С.55-60.
3. Sneddon I.N. Note on a Boundary Value Problem of Reissner and Sagoci // Journal of Applied Physics, 1947, **18**, N 1. P.130-132.
4. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying--factor method // Proc. Cambr. Philos. Soc., 1963, **59**, N 2. P.351-362.